Exercícios Prova 2: 

1) a) $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$

b) $\begin{cases} n \text{ autovalores} \\ \leqslant n \text{ autovetores} \end{cases}$

c) $c\vec{v}$ também é autovetor de A

d) $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ $\begin{cases} \vec{x} \text{ é autovetor de } A \\ \lambda \text{ é autovalor de } A \end{cases}$

$$A\vec{x} - cI\vec{x} = \lambda\vec{x} - cI\vec{x}$$

$$(A - cI)\vec{x} = (\lambda - c)\vec{x}$$

logo $\vec{x}$ é autovetor de $A - cI$
e $\lambda - c$ é autovalor de $A - cI$

e) $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ $\begin{cases} \vec{x} \text{ é autovetor de } A \\ \lambda \text{ é autovalor de } A \end{cases}$

$$A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\lambda\vec{x}$$

$$I\vec{x} = \lambda A^{-1}\vec{x}$$

$$A^{-1}\vec{x} = \frac{1}{\lambda}\vec{x}$$ $\begin{cases} \vec{x} \text{ é autovetor de } A^{-1} \\ 1/\lambda \text{ é autovalor de } A^{-1} \end{cases}$

f) resposta em d)

e) resposta em e)

h) Para o maior autovalor em módulo

i) Para $1/\lambda_n$, onde $\lambda_n$ é o menor autovalor em módulo

j) Para $\gamma = \dfrac{1}{\lambda_i - \alpha}$, onde $\lambda_i$ é o autovalor mais próximo de $\alpha$.

K) se $|\lambda_1|$ não for maior que os demais autovalores, e se A não tiver n autovetores L.I., pois na prova de convergência do método, um vetor qualquer $\vec{v}$ é escrito na base dos n autovetores $\vec{x}_i$, e $\left[\dfrac{\lambda_i}{\lambda_1}\right]^K$ precisa tender à zero com $K \to \infty$.

l) uma matriz $A_{n \times n}$ é diagonalizável se possui n autovetores L.I.

m) não.

2) a) Verdadeiro, pois se A possui n autovalores distintos, ela possui n autovetores L.I.

b) Verdadeiro

c) Verdadeiro

3) $$\underbrace{\vec{f}(\vec{x}) \approx \vec{f}(\vec{a}) + J_{\vec{f}}(\vec{a})(\vec{x}-\vec{a})}$$

aproximação de Taylor de ordem 1 em torno de $\vec{a}$ para uma função $\vec{f}(\vec{x}): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qualquer, onde $J_{\vec{f}}$ é a matriz Jacobiana de $\vec{f}$.

No método de Newton, a cada iteração aproximamos a função $\vec{f}(\vec{x})$ em torno de $\vec{x}^{(k)}$, e encontramos o valor de $\vec{x}^{(k+1)}$ correspondente ao ponto em que a aproximação é zero, ou seja:

$$f(\vec{x}^{(k+1)}) = \vec{f}(\vec{x}^{(k)}) + J_{\vec{f}}(\vec{x}^{(k)})(\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}) = 0$$

$$J_{\vec{f}}(\vec{x}^{(k)})(\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}) = -f(\vec{x}^{(k)})$$

$$\boxed{\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - J_{\vec{f}}^{-1}(\vec{x}^{(k)})\, f(\vec{x}^{(k)})}$$

4) É necessário que o determinante da matriz Jacobiana de $\vec{f}$ aplicado em $\vec{x}^{(k)}$ seja diferente de zero, para que sua inversa exista.