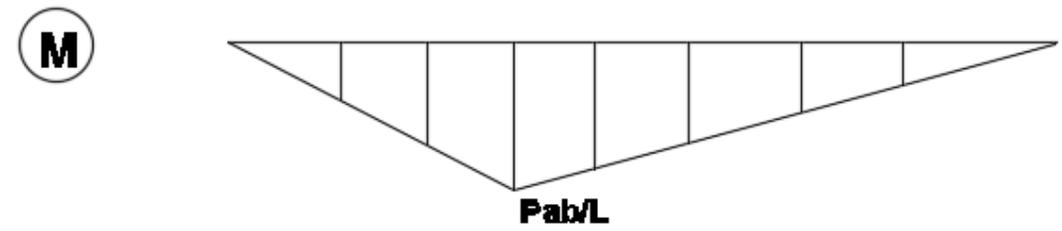
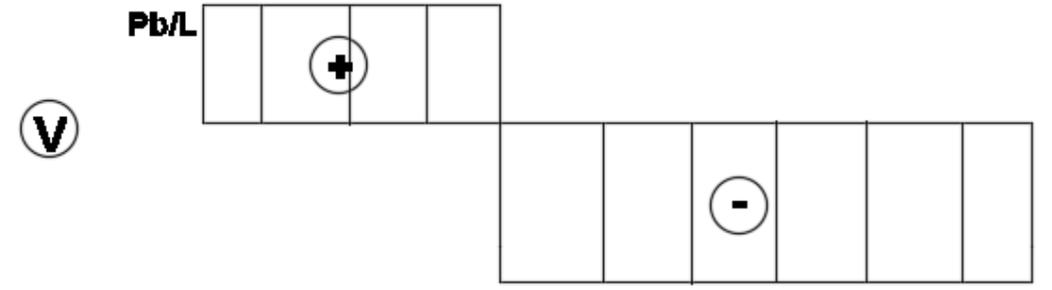
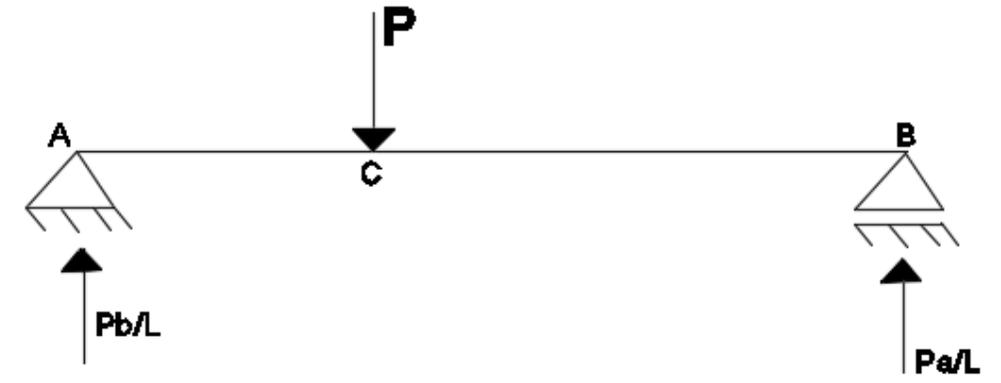
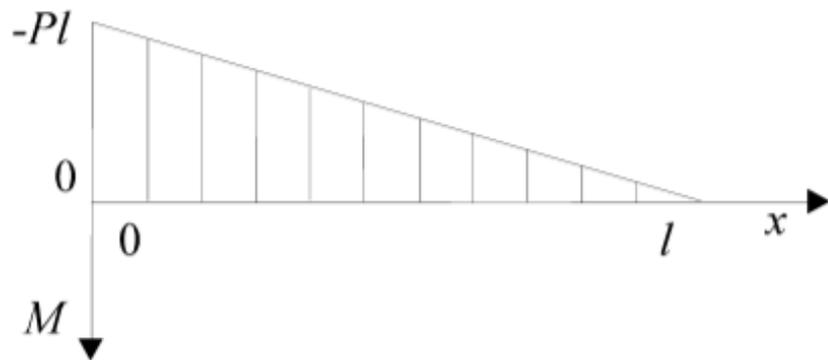
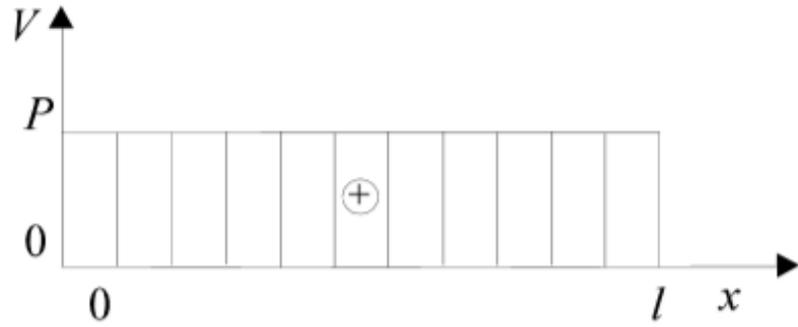
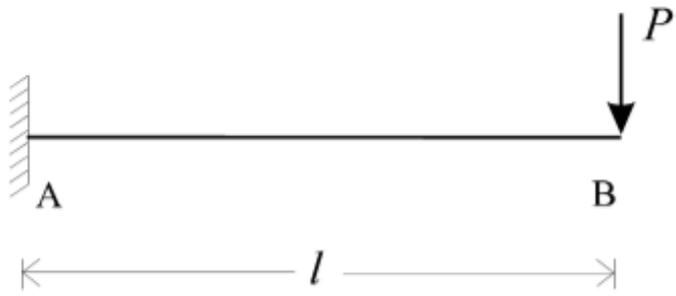




**PEF 3200**  
***Linhas de Influência***  
***Capítulo 6 – apostila***

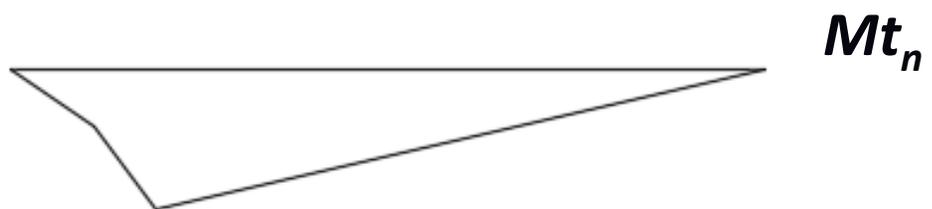
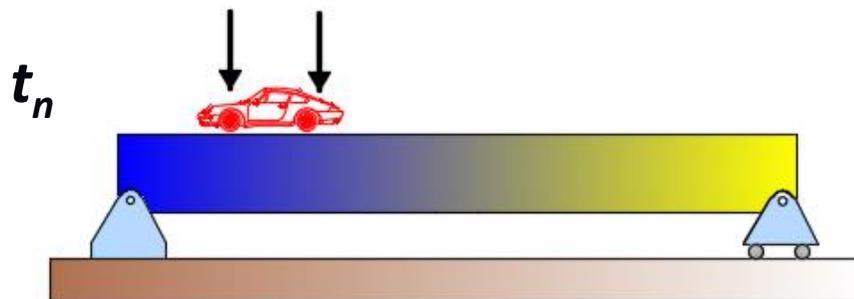
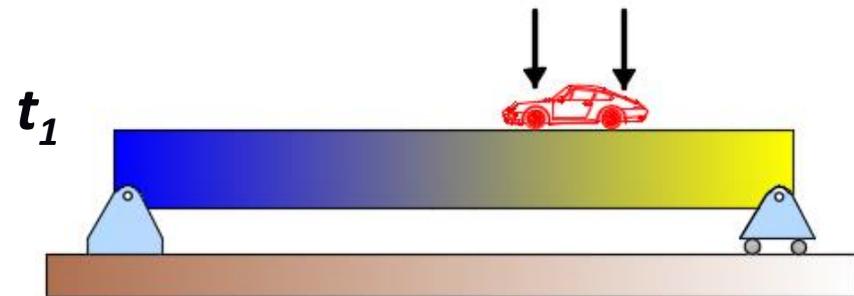
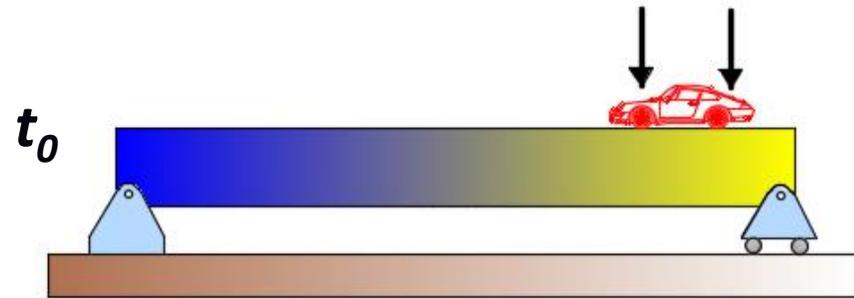
***Valério S. Almeida***  
***Maio/2023***

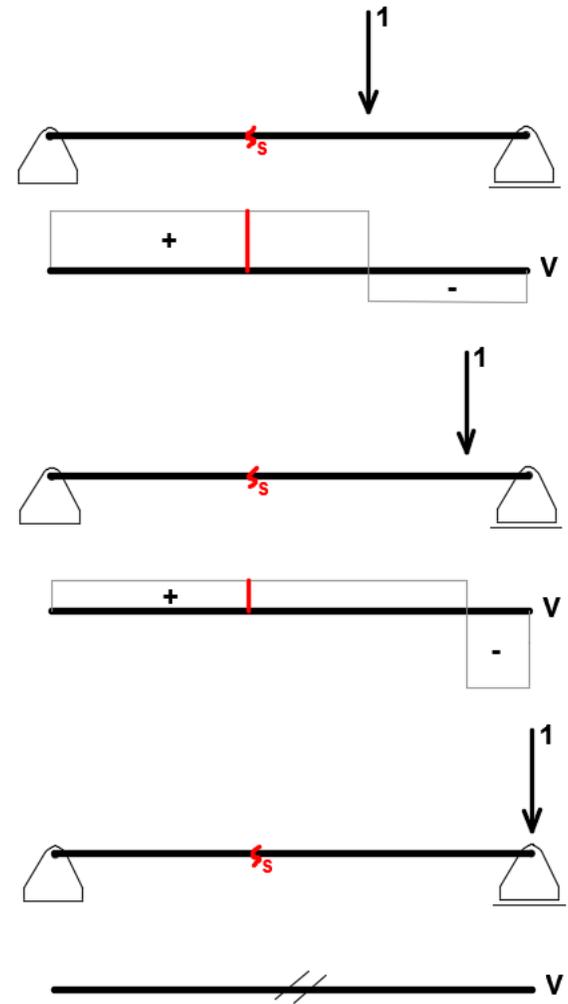
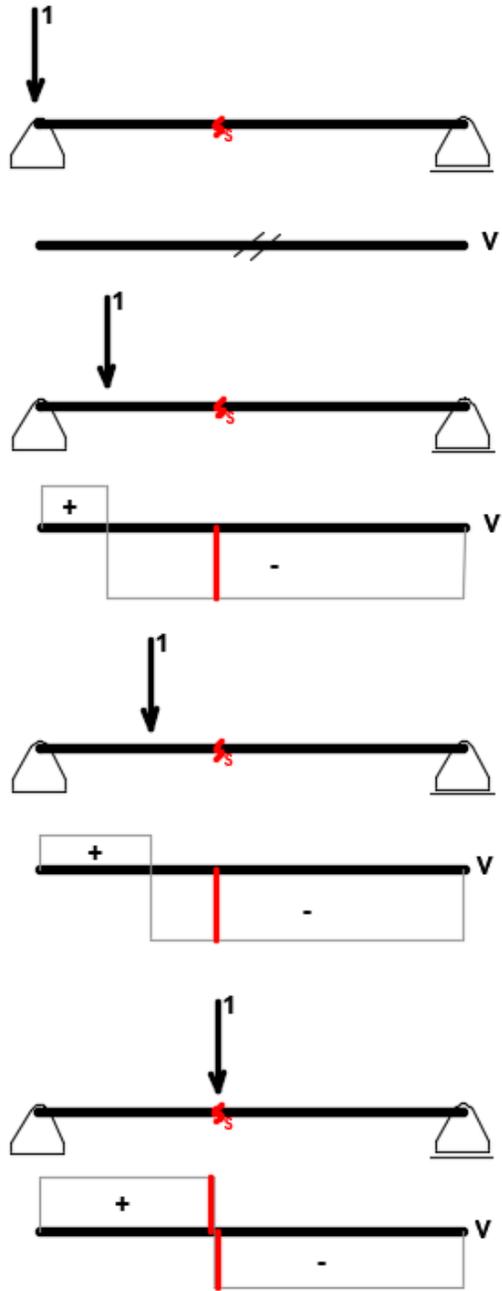
# CARGAS IMÓVEIS

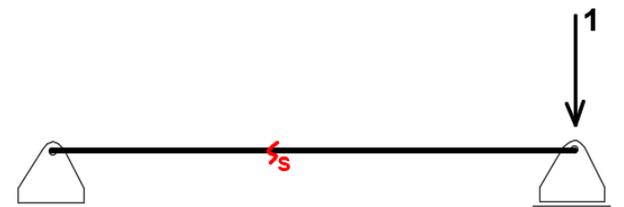
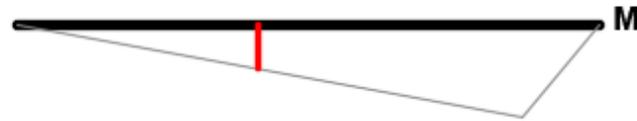
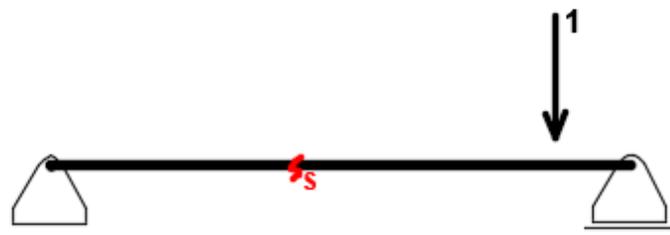
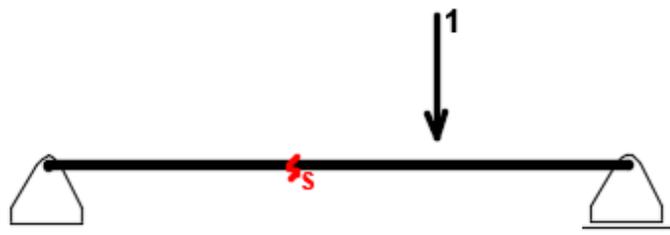
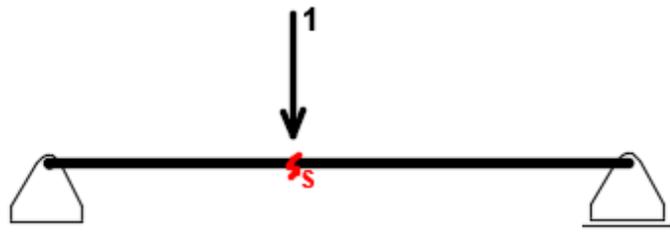
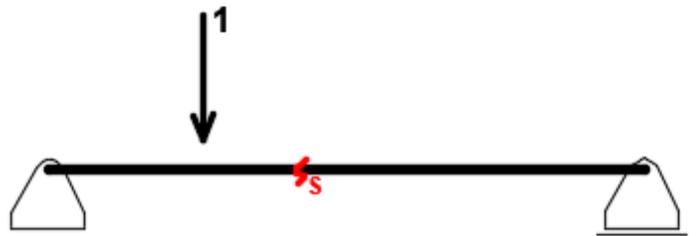
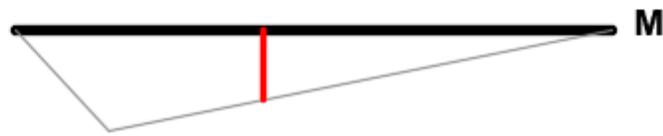
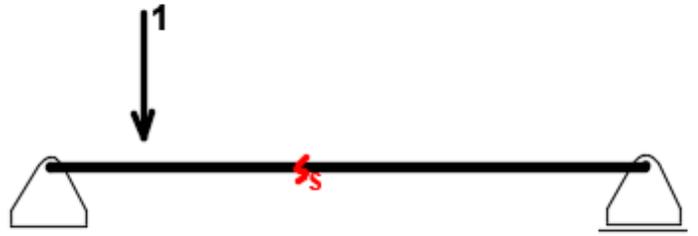
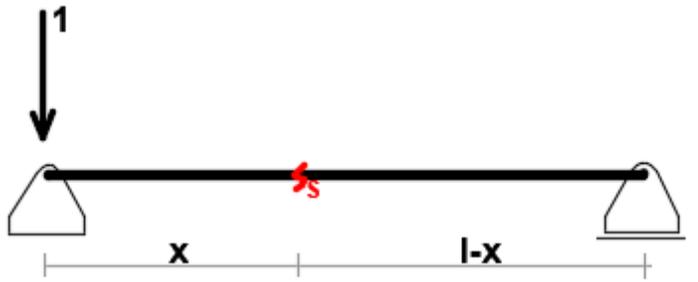


*Veículo se move na ponte*

*Cada posição tem-se um diagrama de M*







# Norma ABNT – carga móvel



**ABNT-Associação Brasileira de Normas Técnicas**

Sede:  
Rio de Janeiro  
Av. Treze de Maio, 13 - 28º andar  
CEP 20003 - Caixa Postal 1680  
Rio de Janeiro - RJ  
Tel.: FAPX (021) 210-3122  
Telex: (021) 34353 ABNT-BR  
Endereço Telegráfico:  
NORMATECNICA

Copyright © 1990,  
ABNT-Associação Brasileira de Normas Técnicas  
Printed in Brazil  
Impresso no Brasil  
Todos os direitos reservados

CDU: 624.9.042

DEZ./1982

NB-6

## Carga móvel em ponte rodoviária e passarela de pedestre

Procedimento

Registrada no INMETRO como NBR 7188  
NBR 3 - Norma Brasileira Registrada

Origem: Projeto NB-8/82  
CB-02 - Comitê Brasileiro de Construção Civil  
CE-02:003.09 - Comissão de Estudo de Cargas Móveis em Pontes Rodoviárias  
NB-8 - Moving load in railway bridge and pedestrian by pass - Procedure

Palavras-chave: Ponte rodoviária; Passarela 4 páginas

### SUMÁRIO

- 1 Objetivo
- 2 Definições
- 3 Trens-tipo
- 4 Disposições das cargas
- 5 Simplificações de cálculo
- 6 Características da classe da ponte

#### 1 Objetivo

Esta Norma fixa as condições exigíveis de cargas móveis a serem consideradas no cálculo das pontes rodoviárias e das passarelas de pedestres.

#### 2 Definições

Para os efeitos desta Norma são adotadas as definições de 2.1 a 2.3.

##### 2.1 Ponte rodoviária

Toda e qualquer estrutura destinada a permitir a transposição de um obstáculo, natural ou artificial, por veículos rodoviários passíveis de trafegar na via terrestre de que esta ponte faz parte.

##### 2.2 Passarela de pedestres

Toda e qualquer estrutura destinada a permitir a transposição, por pedestres, de um obstáculo natural ou artificial.

#### 2.3 Carga móvel

Sistema de cargas representativo dos valores característicos dos carregamentos provenientes do tráfego a que a estrutura está sujeita em serviço.

Nota: A carga móvel em ponte rodoviária é também referida pelo termo trem-tipo.

#### 3 Trens-tipo

3.1 Quanto às cargas móveis previstas nesta Norma, as estruturas de transposição classificam-se como segue:

##### 3.1.1 Pontes

Divididas em três classes a seguir discriminadas:

- a) classe 45 - na qual a base do sistema é um veículo-tipo de 450kN de peso total;
- b) classe 30 - na qual a base do sistema é um veículo-tipo de 300kN de peso total;
- c) classe 12 - na qual a base do sistema é um veículo-tipo de 120kN de peso total.

Nota: A utilização das diferentes classes de pontes fica a critério dos órgãos com jurisdição sobre as pontes.

##### 3.1.2 Passarelas de pedestres

Classe única, na qual a carga móvel é uma carga uniformemente

distribuída de intensidade  $p = 5 \text{ kN/m}^2$  ( $500 \text{ kgf/m}^2$ ), não majorada pelo coeficiente de impacto.

#### 3.1.3 Fixação da carga móvel

Para qualquer estrutura de transposição definida por esta Norma, cuja geometria, finalidade e carregamento não se encontrem aqui previstos, a carga móvel é fixada em instrução especial redigida pelo órgão com jurisdição sobre a referida obra. Em particular, as pontes que sejam utilizadas com certa frequência por veículos especiais transportando cargas de peso excepcional devem ser verificadas para trens-tipo também especiais. A fixação dos parâmetros destes trens-tipo e das condições de travessia é atribuição do órgão que tenha jurisdição sobre as referidas pontes.

3.2 Os trens-tipo compõem-se de um veículo e de cargas uniformemente distribuídas, de acordo com a Tabela 1 e a Figura 1, e dispostos como adiante se prescreve.

3.3 Os veículos são de três tipos, com as características da Tabela 2 e da Figura 2.

3.4 A área ocupada pelo veículo é supostamente retangular, com 3,0 m de largura e 6,0 m de comprimento.

3.5 As cargas uniformemente distribuídas são de intensidades  $p$  e  $p'$ , conforme a Tabela 1 e a Figura 1.

Tabela 1 - Cargas dos veículos

Classe da ponte	Veículo			Carga uniformemente distribuída				Disposição da carga
	Tipo	Peso total		p		p'		
		kN	t <sub>r</sub>	kN/m <sup>2</sup>	kgf/m <sup>2</sup>	kN/m <sup>2</sup>	kgf/m <sup>2</sup>	
45	45	450	45	5	500	3	300	Carga p em toda a pista
30	30	300	30	5	500	3	300	Carga p' nos passeios
12	12	120	12	4	400	3	300	

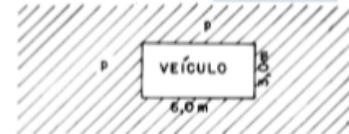


Figura 1

Tabela 2 - Características dos veículos

	Unidade	Tipo 45	Tipo 30	Tipo 12
Quantidade de eixos	Eixo	3	3	2
Peso total de veículo	kN-t <sub>f</sub>	450-45	300-30	120-12
Peso de cada roda dianteira	kN-t <sub>f</sub>	75-7,5	50-5	20-2
Peso de cada roda traseira	kN-t <sub>f</sub>	75-7,5	50-5	40-4
Peso de cada roda intermediária	kN-t <sub>f</sub>	75-7,5	50-5	-
Largura de contato b <sub>1</sub> de cada roda dianteira	m	0,50	0,40	0,20
Largura de contato b <sub>3</sub> de cada roda traseira	m	0,50	0,40	0,30
Largura de contato b <sub>2</sub> de cada roda intermediária	m	0,50	0,40	-
Comprimento de contato de cada roda	m	0,20	0,20	0,20
Área de contato de cada roda	m <sup>2</sup>	0,20xb	0,20xb	0,20xb
Distância entre os eixos	m	1,50	1,50	3,00
Distância entre os centros de roda de cada eixo	m	2,00	2,00	2,00

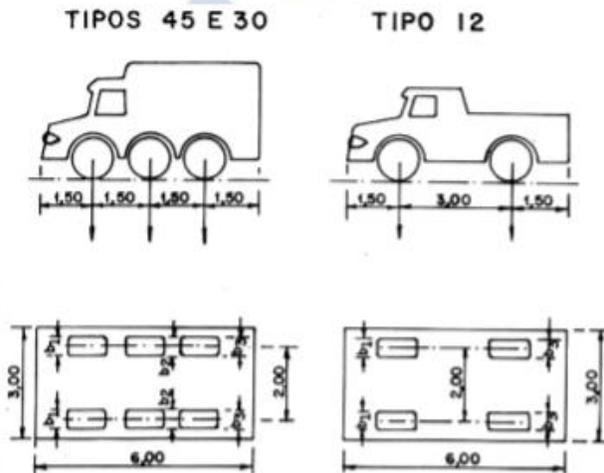


Figura 2

Unid.:mm



ABNT – Associação  
Brasileira de  
Normas Técnicas

Sede:  
Rio de Janeiro  
Av. Treza de Melo, 13 2º andar  
CEP 20003-900 – Caixa Postal 1000  
Rio de Janeiro – RJ  
Tel.: PARQ (21) 210-3122  
Fax: (21) 220-1782/220-6438  
Endereço eletrônico:  
www.abnt.org.br

Copyright © 1985,  
ABNT – Associação Brasileira  
de Normas Técnicas  
Printed in Brazil  
Impresso no Brasil  
Todos os direitos reservados

DEZ 1985

NBR 7189

## Cargas móveis para projeto estrutural de obras ferroviárias

### Procedimento

Origem: Projeto NB-7/1983

ABNT/CB-02 - Comitê Brasileiro de Construção Civil  
CE-02:003.08 - Comissão de Estudo de Cargas Móveis em Pontes  
Ferroviárias

NBR 7189 - Moving loads for structural engineering for railway construction -  
Procedure  
Reimpressão da NB-7, de Julho de 1983

Palavras-chave: Carga móvel. Obra ferroviária

2 páginas

### 1 Objetivo

Esta Norma fixa as condições exigíveis na definição dos trens-tipo brasileiros ferroviários (TB) que representam a carga móvel vertical a ser considerada nos projetos estruturais de obras novas, bem como na verificação e no reforço de obras existentes.

### 2 Condições específicas

#### 2.1 Trem-tipo

Em qualquer caso, o trem-tipo a ser adotado nos projetos deve ser um dos definidos em 2.2, ressalvado o disposto nos Capítulos 3 e 4, sempre especificado pela entidade responsável pela via.

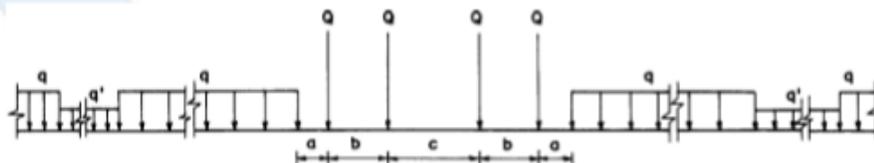
#### 2.2 Classes, características geométricas e cargas dos trens-tipo

##### 2.2.1 Classes dos trens-tipo

De acordo com o carregamento a que a via estiver sujeita, o TB deve ser um dos seguintes abaixo relacionados:

- TB-360: para ferrovias sujeitas a transporte de minério de ferro ou outros carregamentos equivalentes;
- TB-270: para ferrovias sujeitas a transporte de carga geral;
- TB-240: para ser adotado somente na verificação de estabilidade e projeto de reforço de obras existentes;
- TB-170: para vias sujeitas exclusivamente ao transporte de passageiros em regiões metropolitanas ou suburbanas.

## 2.2.2 Características geométricas e cargas dos trens-tipo



Onde:

Q = carga por eixo

Q e q' = cargas distribuídas na via, simulando, respectivamente, vagões carregados e descarregados (ver Tabela 1).

Tabela 1 - Cargas dos trens-tipo

TB	Q (kN)	Q (kN/m)	q' (kN/m)	a (m)	b (m)	c (m)
360	360	120	20	1,00	2,00	2,00
270	270	90	15	1,00	2,00	2,00
240	240	80	15	1,00	2,00	2,00
170	170	25	15	11,00	2,50	5,00

## 2.3 Obras com três ou mais vias

Nestes casos, a consideração da simultaneidade do carregamento nas vias para o projeto estrutural é feita a partir da mais desfavorável entre as seguintes situações:

- duas vias carregadas com o TB em sua posição mais crítica e as demais vias descarregadas;
- todas as vias carregadas com o TB em sua posição mais crítica, com suas cargas afetadas de um fator de redução dado pela Tabela 2.

Tabela 2 - Fator de redução

n	$\rho$
3	0,73
4	0,66
5	0,59

Onde:

$\rho$  = fator de redução

n = número de vias, nunca tomado maior que 5

## 3 Obras existentes

### 3.1 Verificação da estabilidade

Na verificação da estabilidade de obras existentes, quando justificada, a entidade responsável pela via pode optar pela utilização de seu trem-padrão operacional como base para determinação das solicitações na estrutura.

### 3.2 Reforço

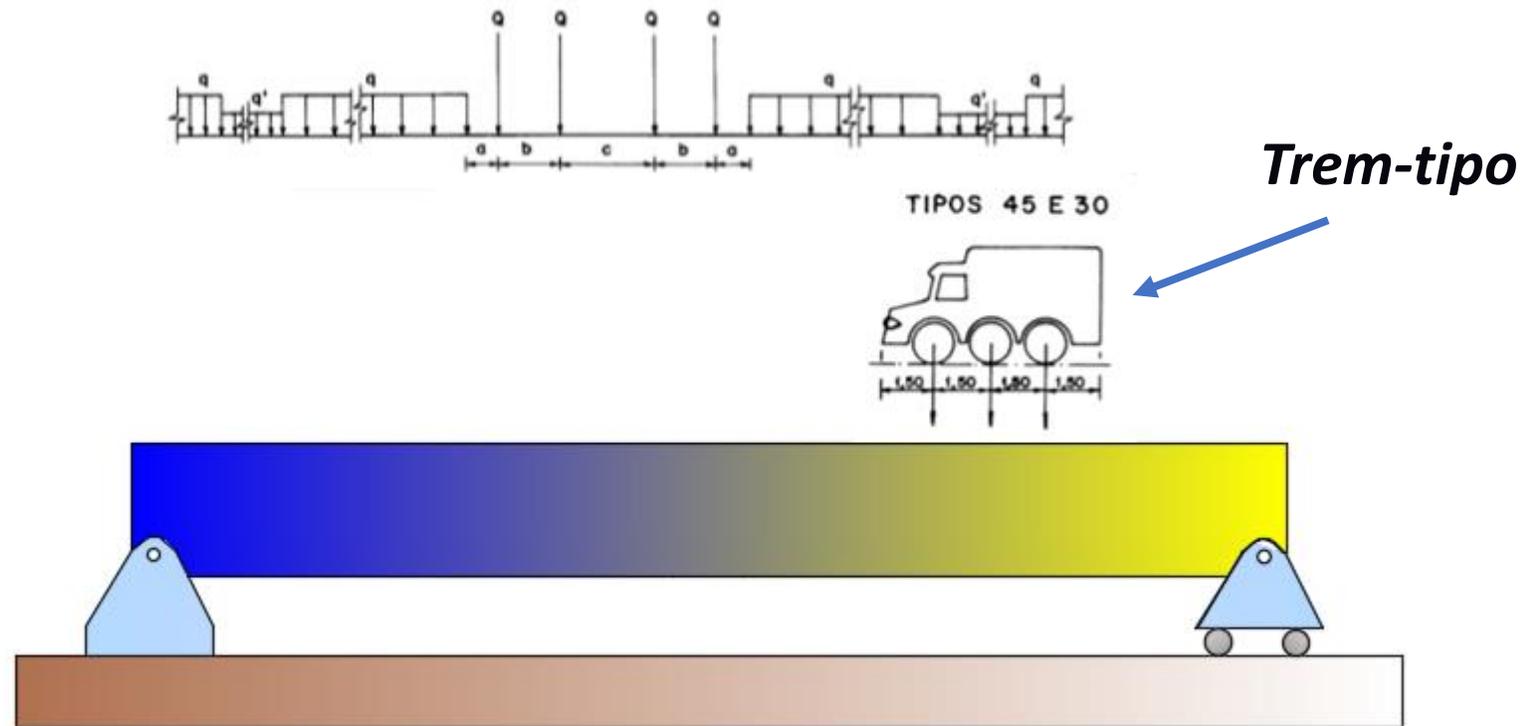
No projeto de reforço de obras existentes, ainda que oriundo de verificação da estabilidade efetuada conforme 3.1, deve ser considerado no mínimo um dos trens-tipo definidos em 2.2.

## 4 Casos especiais

4.1 No caso de obra situada em ramal, pátio ou terminal privados, o trem-tipo a ser adotado no projeto estrutural pode ser diferente dos especificados nesta Norma, a critério de seus proprietários, mas nunca inferior ao trem-tipo da via de acesso correspondente.

4.2 No caso de obra situada dentro de área de processo industrial, o trem-tipo a ser adotado deve ser especificado pelos proprietários das indústrias.

# ***Norma indica: posicionar carga de referencia sobre a ponte com cargas distribuídas de projeto***

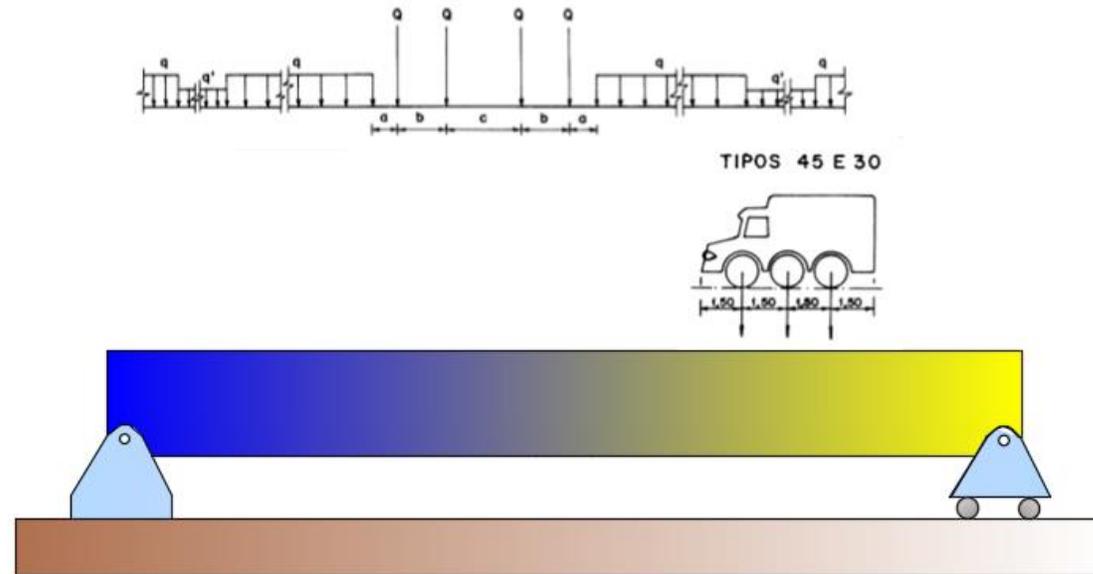


## **“2.3 Carga móvel**

Sistema de cargas representativo dos valores característicos dos carregamentos provenientes do tráfego a que a estrutura está sujeita em serviço.

Nota: A carga móvel em ponte rodoviária é também referida pelo termo **trem-tipo.**”

***Norma indica: posicionar carga de referencia sobre a ponte com cargas distribuídas de projeto***



***Qual posição do trem-tipo que leva aos maiores momento/reação/cortante?***

***Qual seção isso ocorre?***



***Estudo das Linhas de Influência***

## Definição de Linha de Influência (LI)

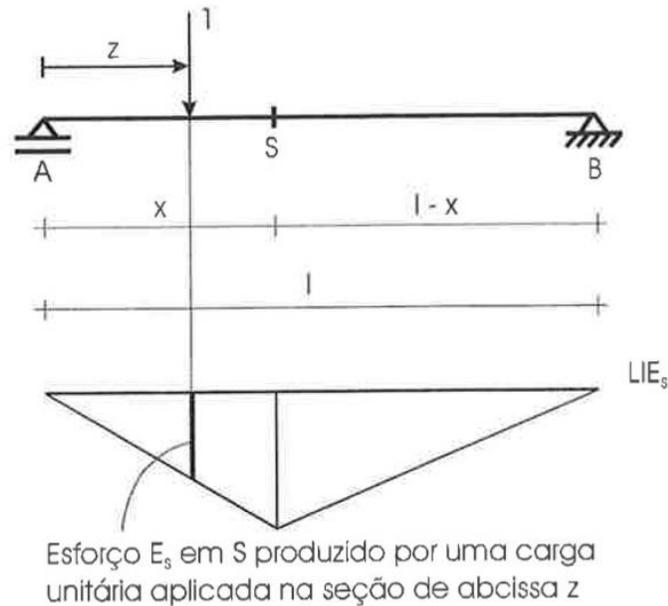


Figura 6.7

**1. Fixar uma seção genérica  $S$**

**2. Força unitária vertical de cima para baixo caminhando em toda a estrutura**

**3. Obtêm esforços/reação em  $S$**

### Definição 6.1

*Linha de influência* do esforço  $E_s$  na seção fixa  $S$  é o diagrama que fornece o valor de  $E_s$  produzido por uma carga unitária móvel adimensional que percorre toda a extensão da viga (Figura 6.7).

## Obtenção da LI – viga biapoiada

Serão determinadas:

1. A linha de influência da reação vertical do apoio da esquerda;
2. A linha de influência da reação vertical do apoio da direita;
3. A linha de influência da força cortante em uma seção fixa  $S$ ;
4. A linha de influência do momento fletor na mesma seção fixa  $S$ .

Considere-se a viga simplesmente apoiada da Figura 6.8, sobre a qual se desloca uma força unitária móvel adimensional, de A até B. No instante mostrado na Figura 6.8, esta força encontra-se em uma posição genérica, caracterizada pela abcissa  $z$ .

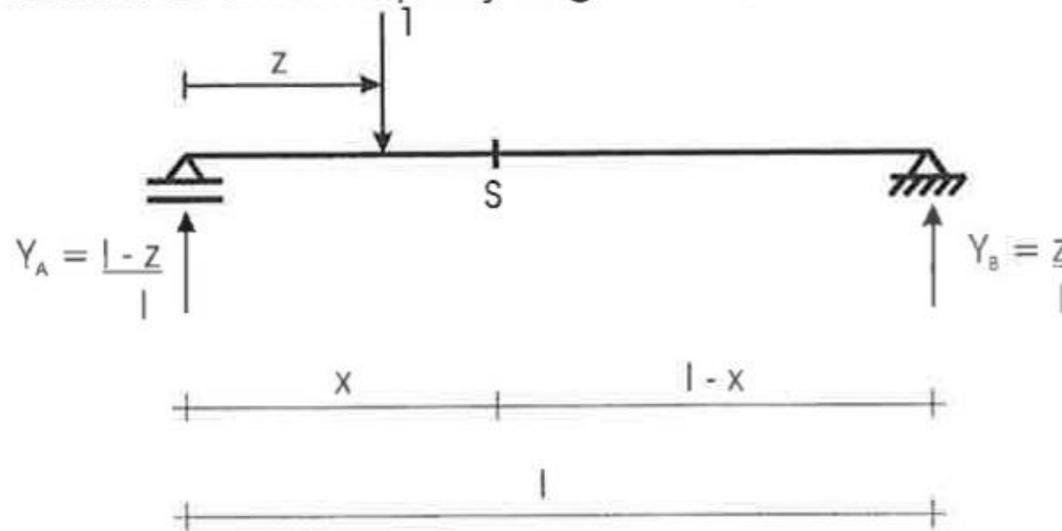
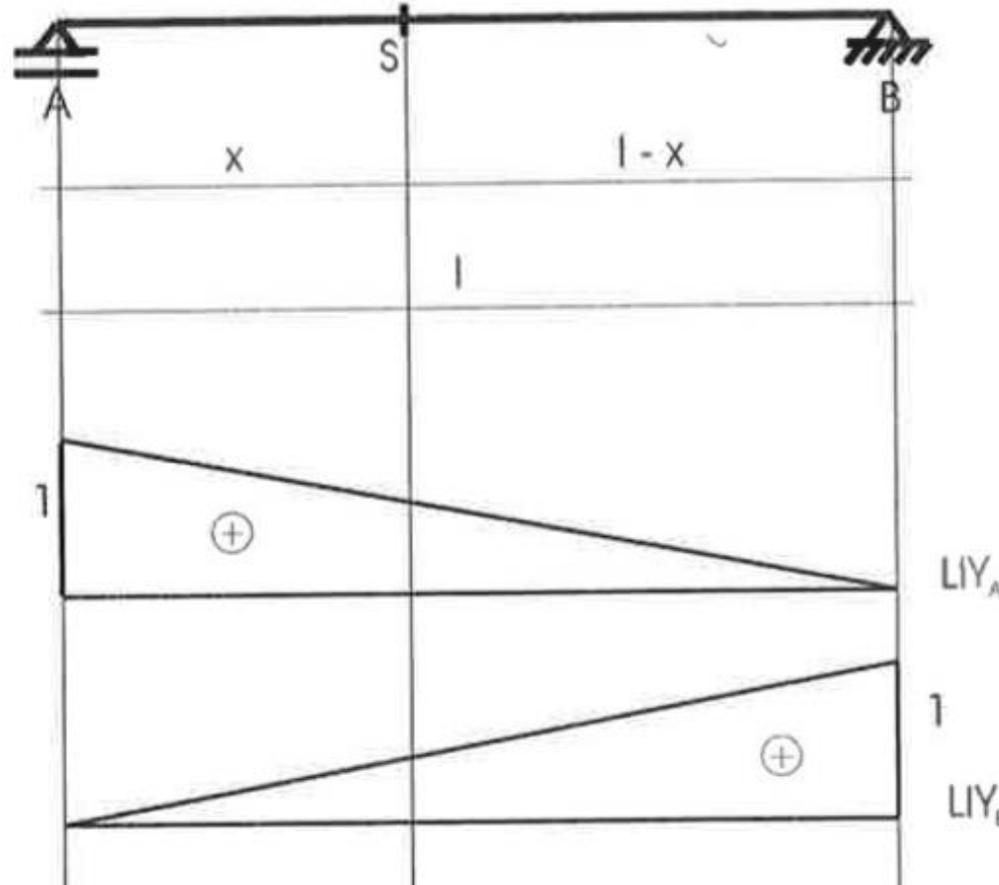
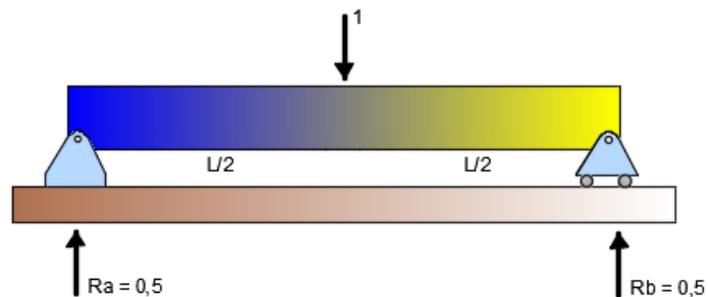
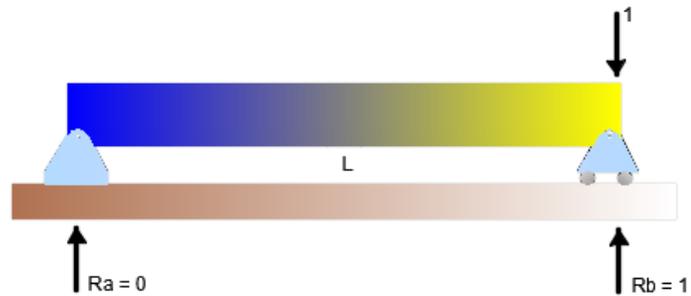
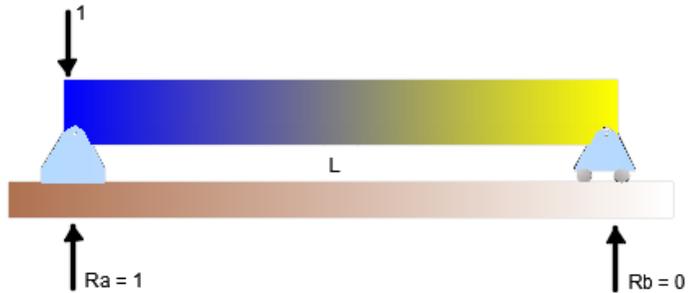


Figura 6.8

# Obtenção da LI – viga biapoçada

## LI das reações da viga:



e

$$Y_A = \frac{l-z}{l}$$

$$Y_B = \frac{z}{l}$$

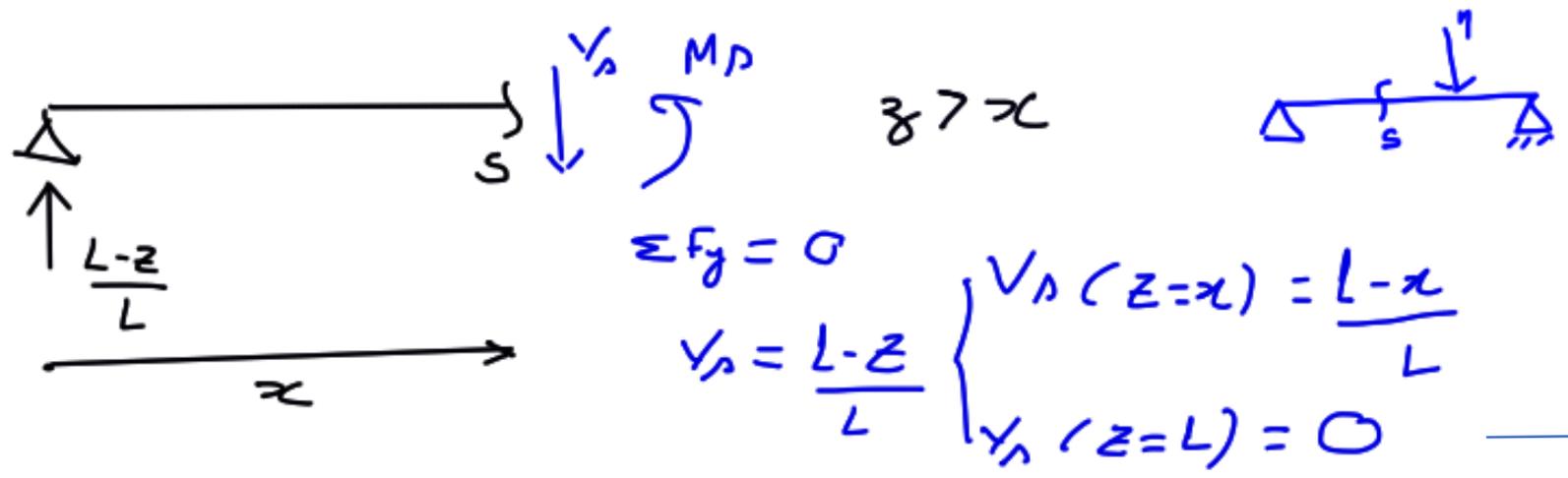
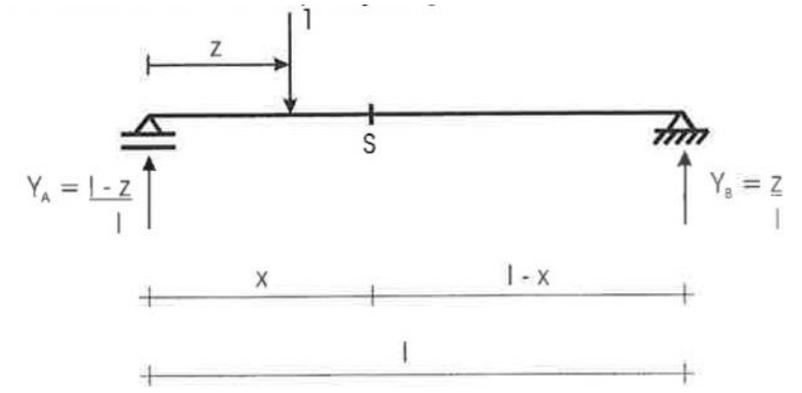
As linhas de influências das reações verticais em A

$$LIY_A = \frac{l-z}{l}$$

$$LIY_B = \frac{z}{l}$$

# Obtenção da LI – viga biapoçada

LI do cortante e momento:



$$\sum F_y = 0$$

$$V_S = \frac{l-z}{l}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_S(z=x) = \frac{l-x}{l} \\ V_S(z=l) = 0 \end{array} \right.$$

$$\rightarrow LIV_S = \frac{l-z}{l}, \quad x < z \leq l$$

$$\sum M_A = 0$$

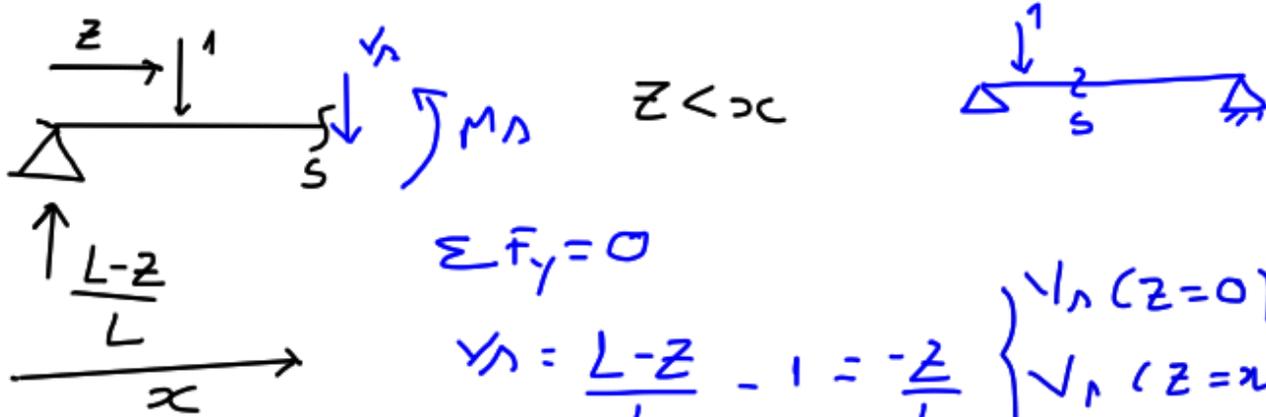
$$M_A = \left(\frac{l-z}{l}\right)x$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M_A(z=x) = \left(\frac{l-x}{l}\right)x \\ M_A(z=l) = 0 \end{array} \right.$$

$$LIM_S = \frac{(l-z)x}{l}, \quad x \leq z \leq l$$

# Obtenção da LI – viga biapoçada

LI do cortante e momento:



$$\sum \bar{F}_y = 0$$

$$V_s = \frac{L-z}{L} - 1 = -\frac{z}{L}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_s(z=0) = 0 \\ V_s(z=x) = -\frac{x}{L} \end{array} \right.$$

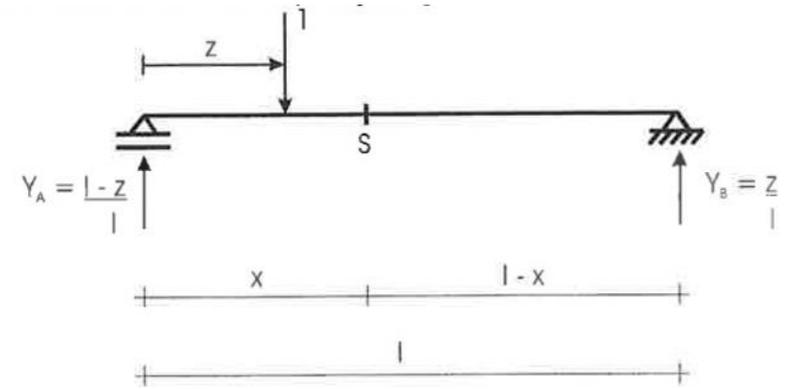
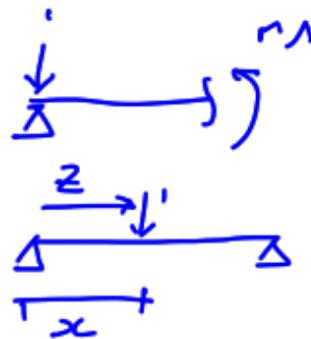
$$\sum M_s = 0:$$

$$M_s + 1(x-z) = \frac{L-z}{L} \cdot x$$

$$M_s = (L-z)\frac{x}{L} - (x-z)$$

$$M_s(z=0) = 0$$

$$M_s(z=x) = (l-x)\frac{x}{L}$$

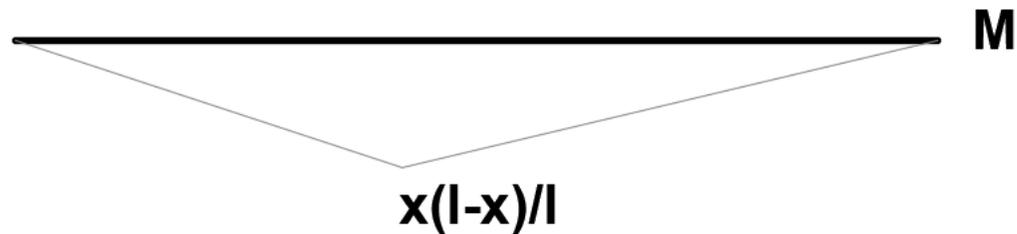
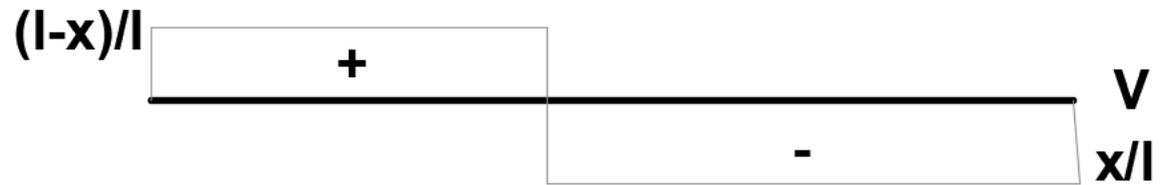
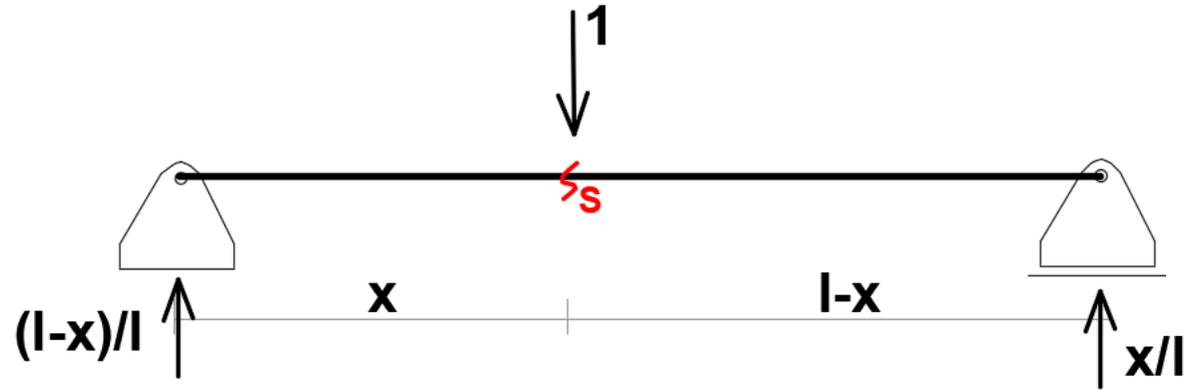


$$LIV_s = -\frac{z}{l}, \quad 0 \leq z < x$$

$$LIM_s = \frac{z(l-x)}{l}, \quad 0 \leq z \leq x$$

## Diagramas...

Se  $z = x$



Se  $z = x_+$

$$LIV_s = -\frac{z}{l}, \quad 0 \leq z < x$$

$$LIM_s = \frac{z(l-x)}{l}, \quad 0 \leq z \leq x$$

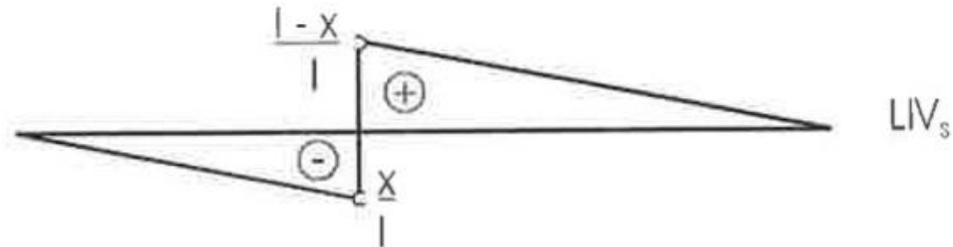
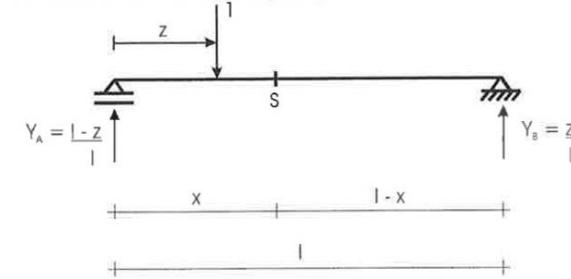
Se  $z = x_-$

$$LIV_s = \frac{l-z}{l}, \quad x < z \leq l$$

$$LIM_s = \frac{(l-z)x}{l}, \quad x \leq z \leq l$$

## Obtenção da LI – viga biapoada

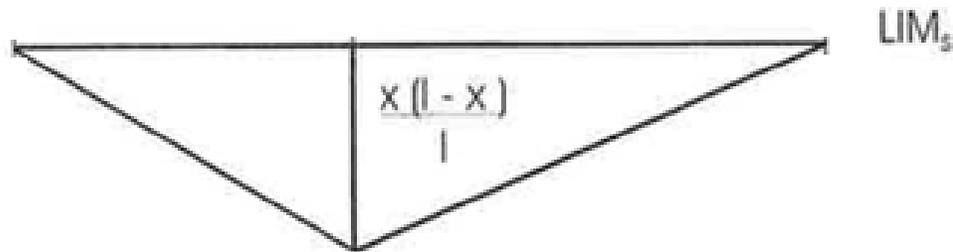
LI do cortante e momento:



$LIV_s$

$$LIV_s = -\frac{z}{l}, \quad 0 \leq z < x$$

$$LIV_s = \frac{l-z}{l}, \quad x < z \leq l$$



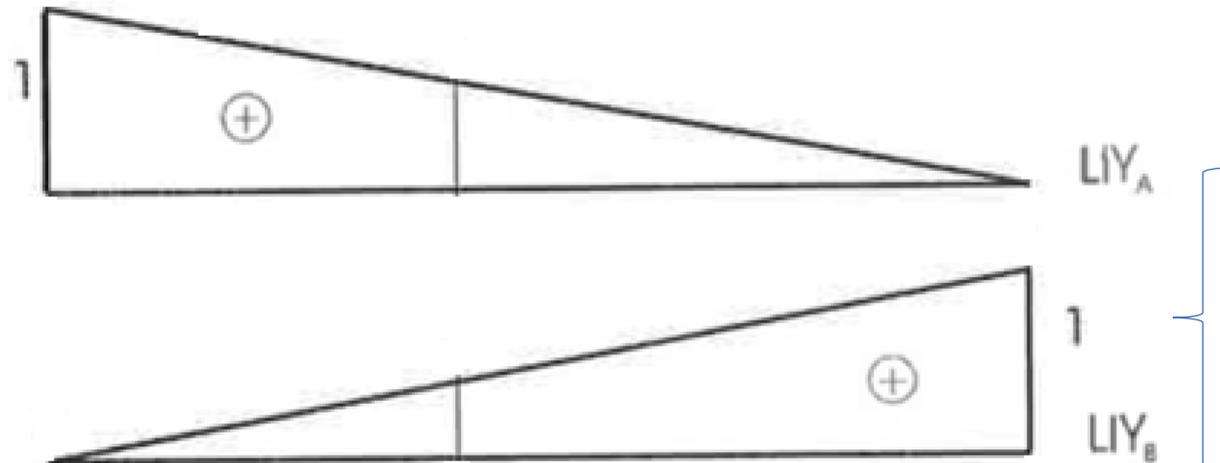
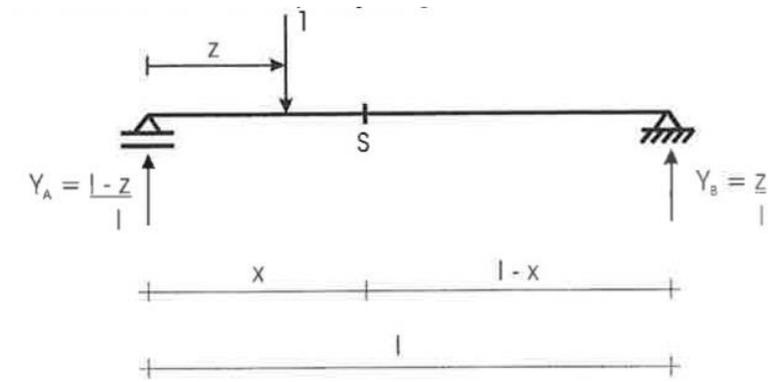
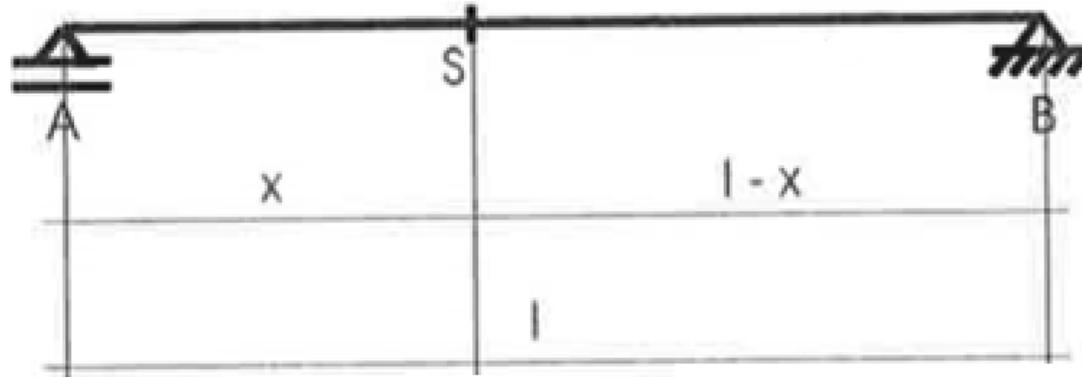
$LIM_s$

$$LIM_s = \frac{z(l-x)}{l}, \quad 0 \leq z \leq x$$

$$LIM_s = \frac{(l-z)x}{l}, \quad x \leq z \leq l$$

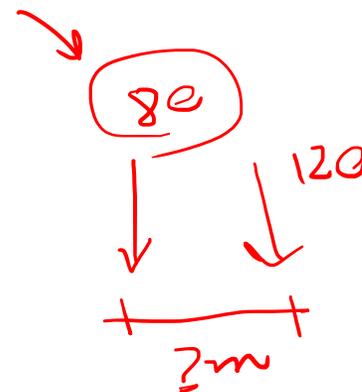
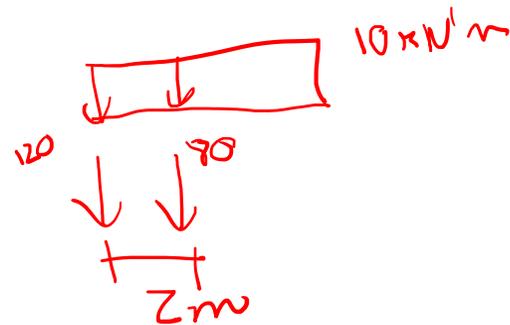
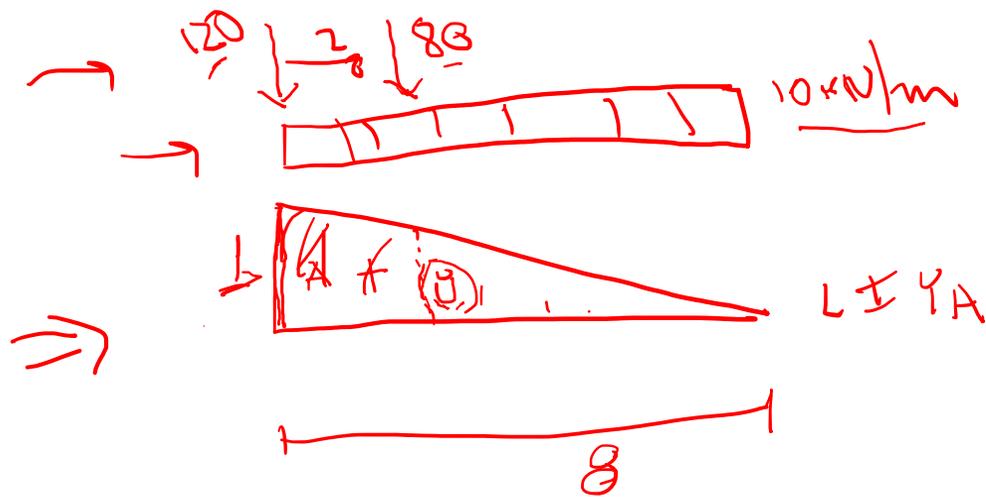
**LI não é diagramas de esforços!!**

# LI – viga biapoiada - reações

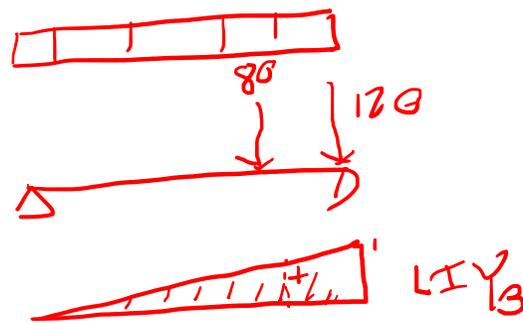
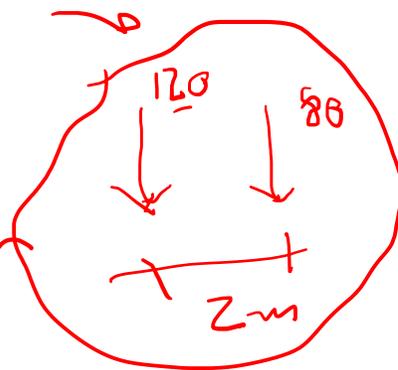


Convenção sinal da reação:

$$\uparrow > 0$$



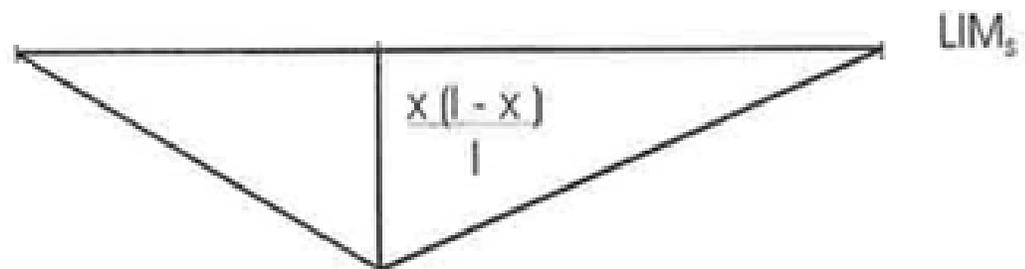
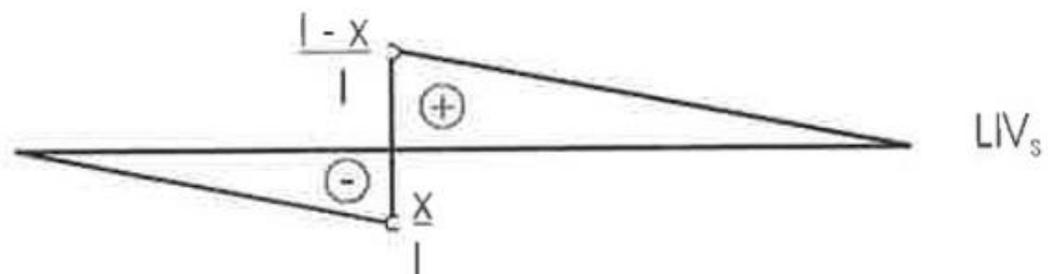
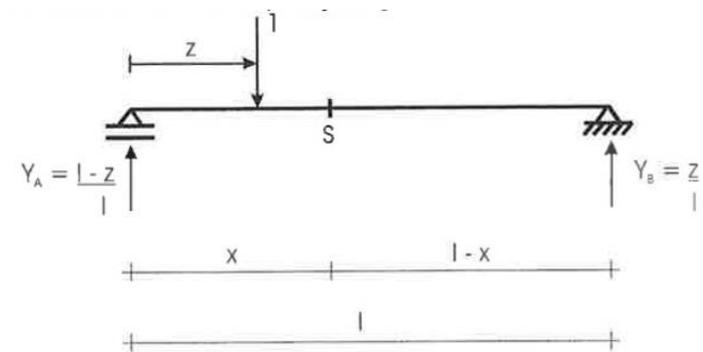
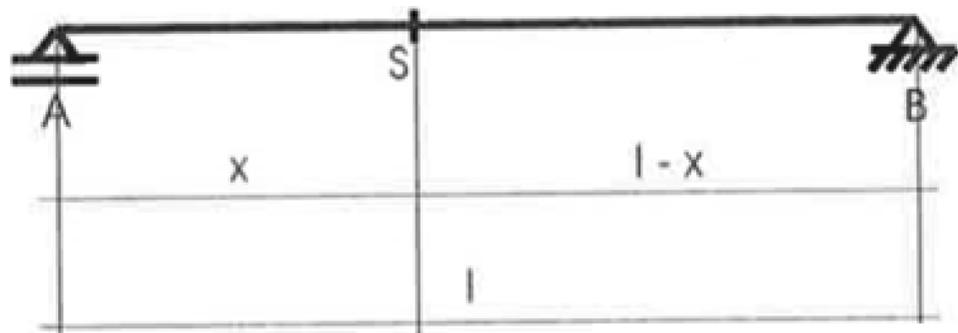
$$\max Y_A = 120 \cdot 1 + 80 \cdot 0,75 + A \cdot 10 \text{ kN/m} + 1,8 \cdot \left(\frac{10}{2}\right) =$$



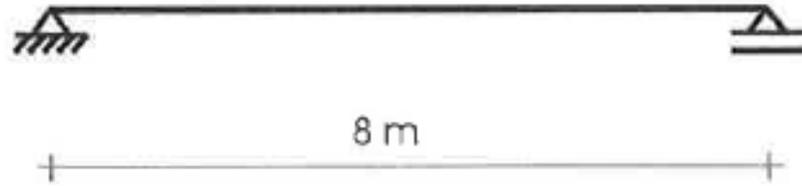
$$\frac{1}{8} = \frac{y}{\phi}$$

$$y = 0,75 = \frac{\phi}{4}$$

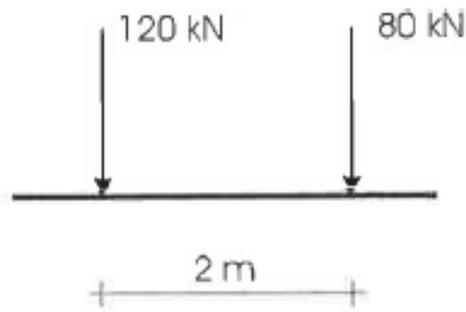
# LI – viga biapoiada – V e M



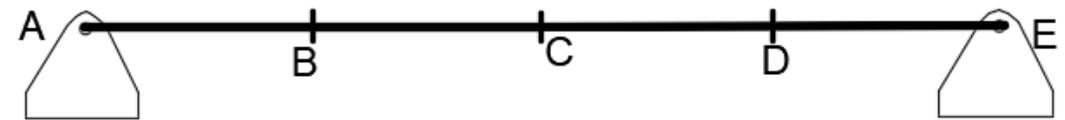
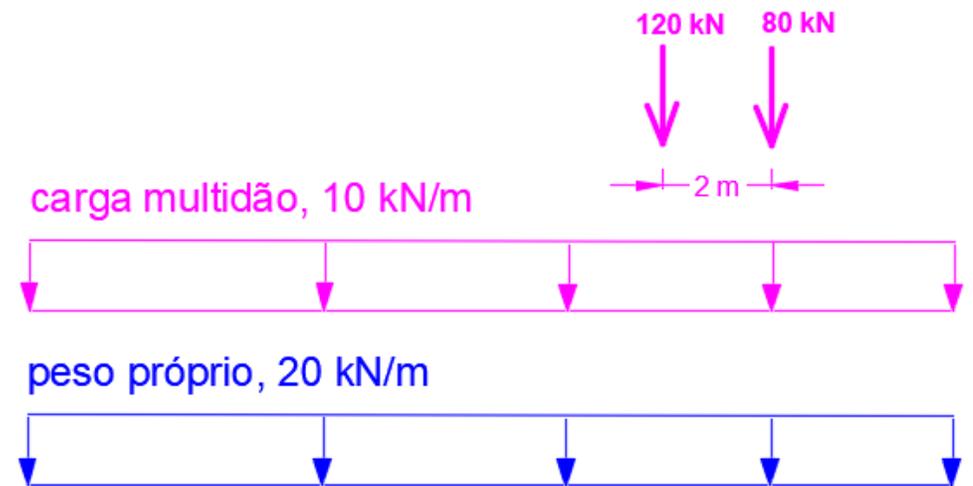
## Exercício da apostila – pgs. 19 a 37



- Peso próprio:  $g = 20 \text{ kN/m}$
- Carga de multidão:  $p = 10 \text{ kN/m}$
- veículo-tipo:



- Determinar:
- Reações de apoios extremos
  - Esforços solicitantes extremos em seções transversais em quartos de vão



## Passos:

1) Obtenha a LI de:

- reações  $R_a$  e  $R_b$
- V e M nas seções seccionadas

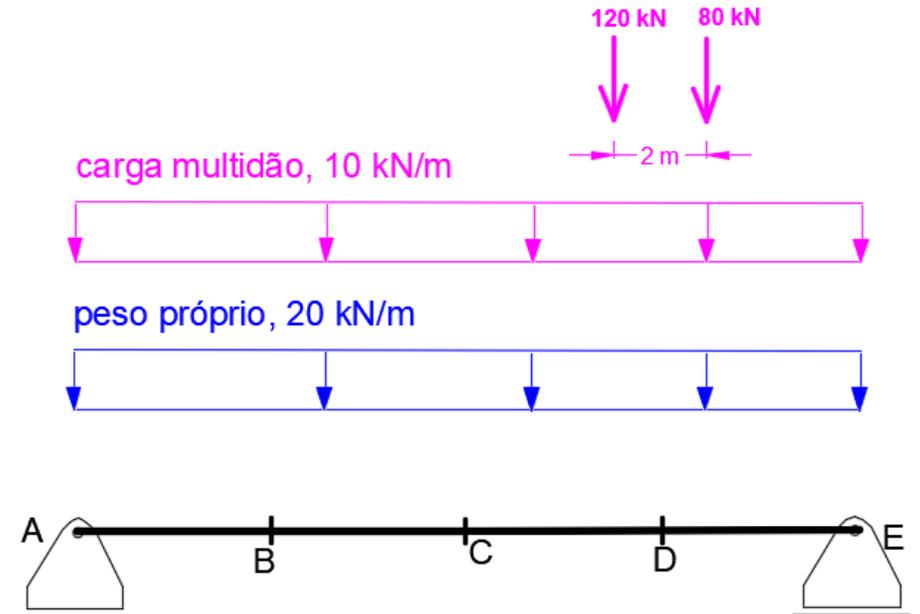
2) Obtenha máximos e mínimos de cada efeito

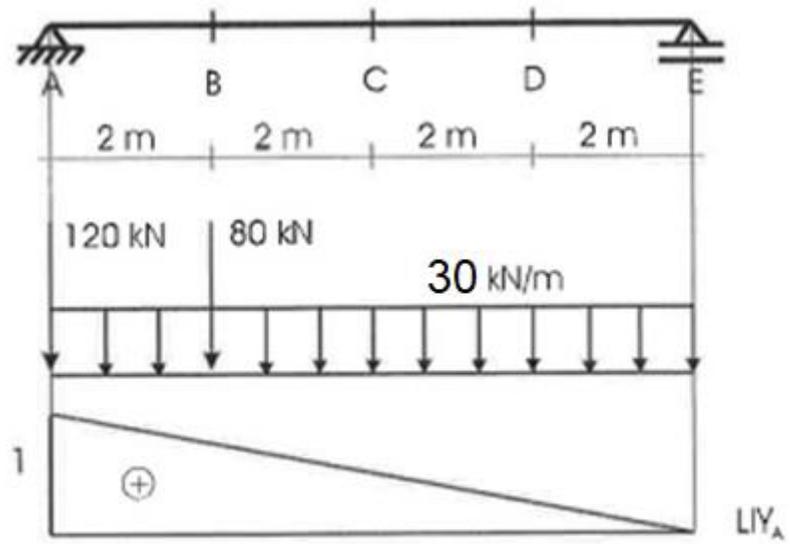
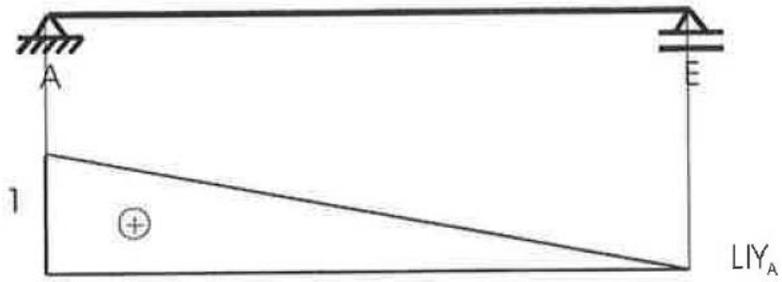
**Máximo:** maior valor positivo do efeito

**Mínimo:** menor valor negativo do efeito

**Peso próprio não pode** ser removido da estrutura

**Carga de multidão e veículo-tipo pode** ser inserido/removido para maximizar/minimizar efeito





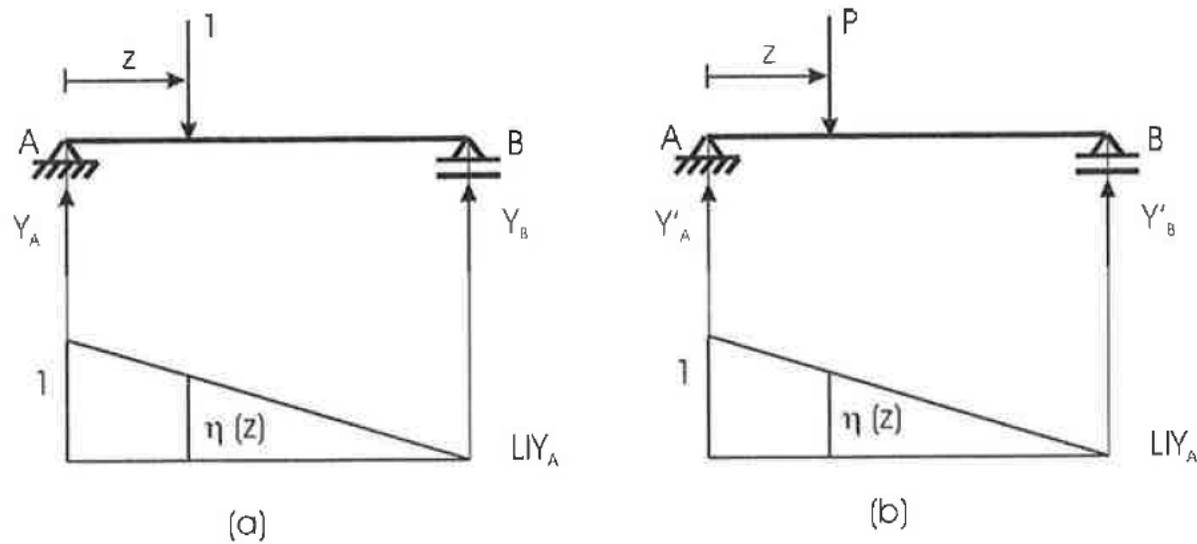


Figura 6.24

Como o modelo matemático que está sendo empregado para analisar esta viga é linear, tem-se a seguinte relação entre as reações das duas vigas da Fig. 6.24:

$$\frac{Y'_A}{Y_A} = \frac{P}{1} \quad (6.12)$$

logo

$$Y'_A = \frac{P \cdot Y_A}{1} = \frac{P \cdot \eta(z)}{1}, \quad (6.13)$$

$$Y'_A = P \cdot \eta(z).$$

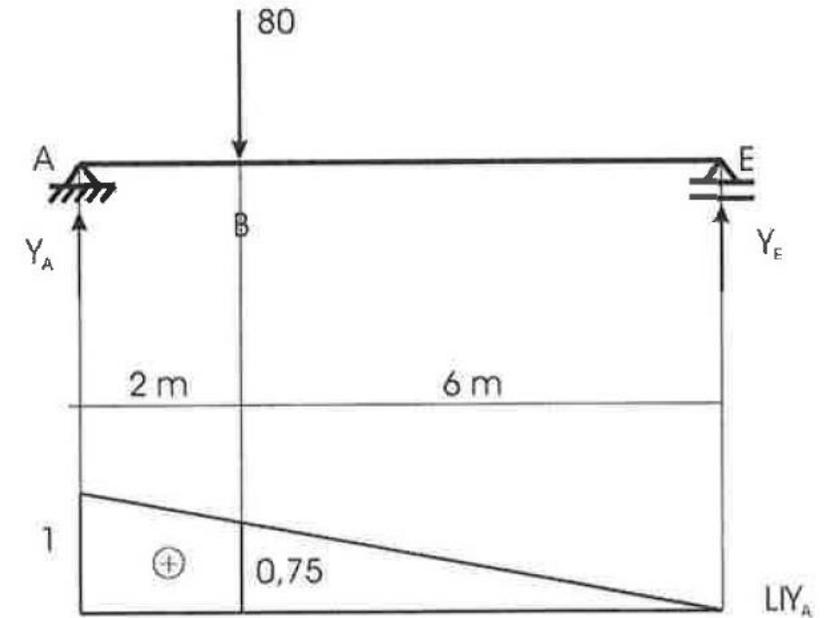


Figura 6.25

$$Y_A = 80 \text{ kN} \cdot \eta(z) = 80 \text{ kN} \cdot 0,75 = 60 \text{ kN}. \quad (6.15)$$

b) Obtenção dos esforços produzidos por cargas uniformemente distribuídas

Na Fig. 6.26 mostra-se uma viga simplesmente apoiada parcialmente submetida a uma carga uniformemente distribuída. Deseja-se determinar a reação em A produzida por esta carga.

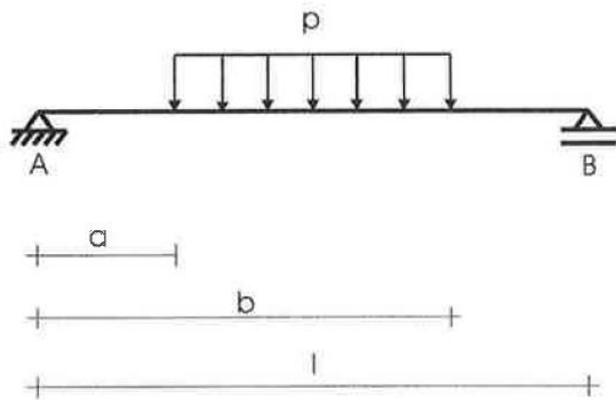


Figura 6.26

A reação em A produzida pela força elementar  $p(z) dz$  mostrada na Fig. 6.27 é

$$dY_A = p(z) dz \eta(z) \quad (6.16)$$

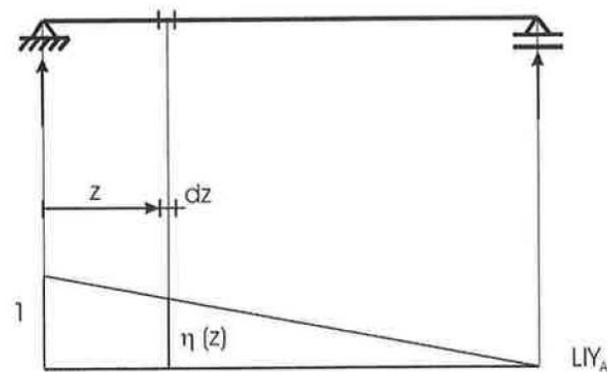
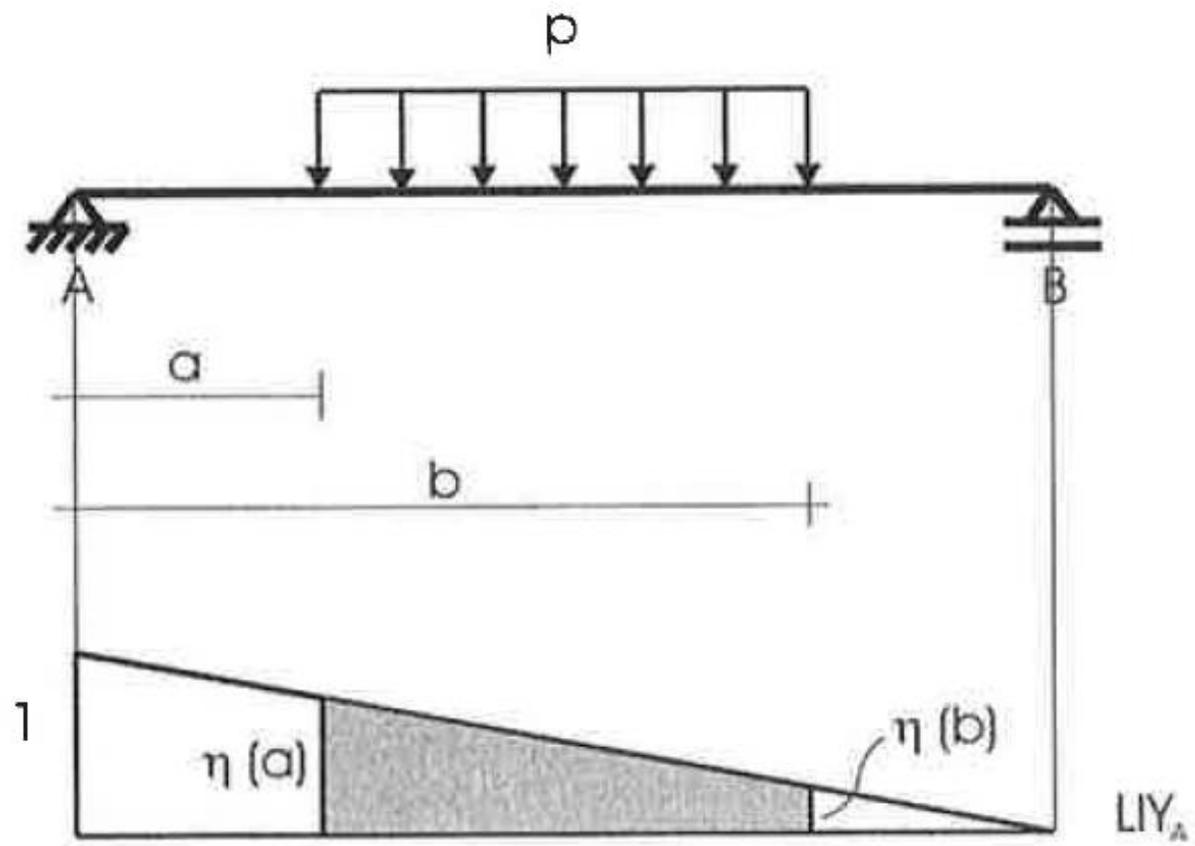


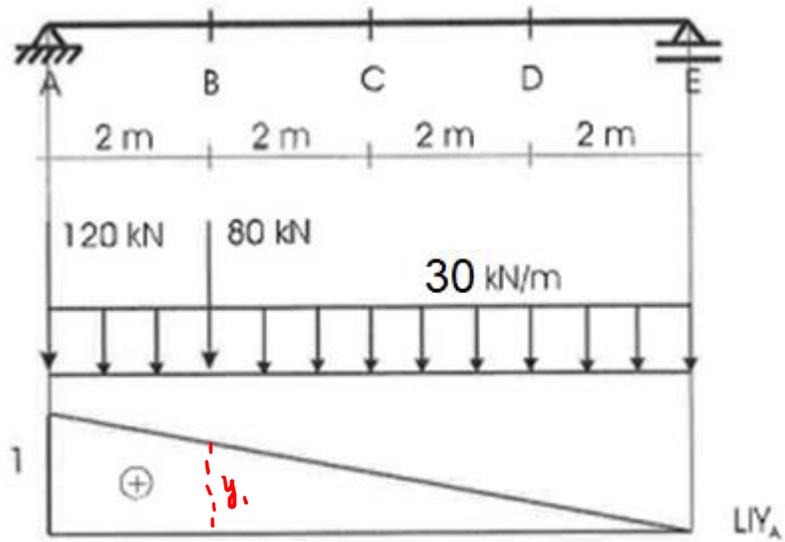
Figura 6.27

A reação procurada é então

$$Y_A = \int_a^b p(z) \eta(z) dz = p \int_a^b \eta(z) dz = p A, \quad (6.17)$$

sendo  $p(z) = p$  o carregamento uniformemente distribuído da viga e  $A = \int_a^b \eta(z) dz$



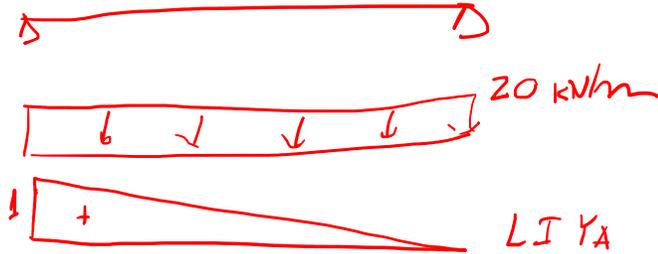


$$Y_A^{\text{máx}} = 120 \cdot 1 + 80 \cdot y_1 + 30 \cdot \left[ 1 \cdot \frac{8}{2} \right] = 300 \text{ kN}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{y_1}{6}$$

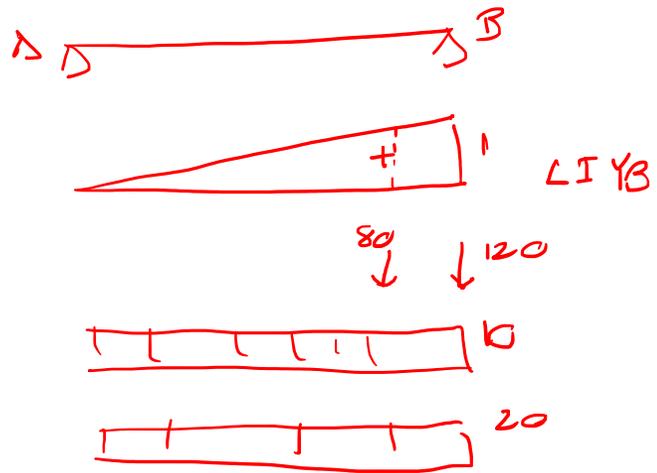
$$y_1 = 0,75$$

mínimo: manter apenas peso próprio

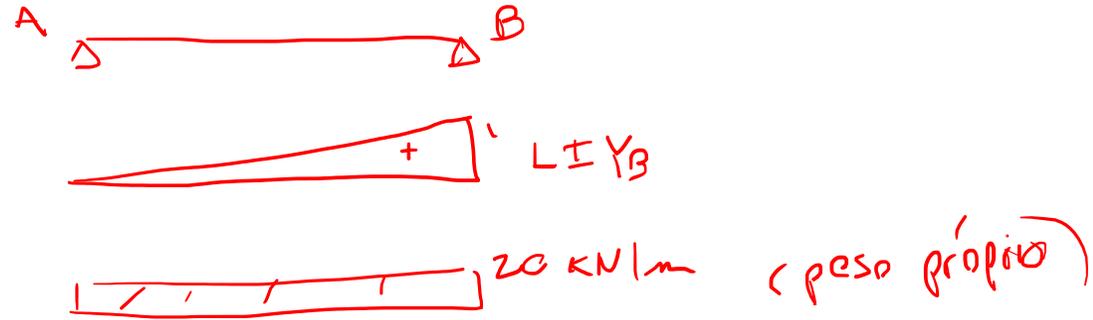


$$Y^{\text{mín}} = \frac{1 \cdot 8}{2} \cdot 20 = 80 \text{ kN}$$

# EXTREMOS DA REAÇÃO EM B

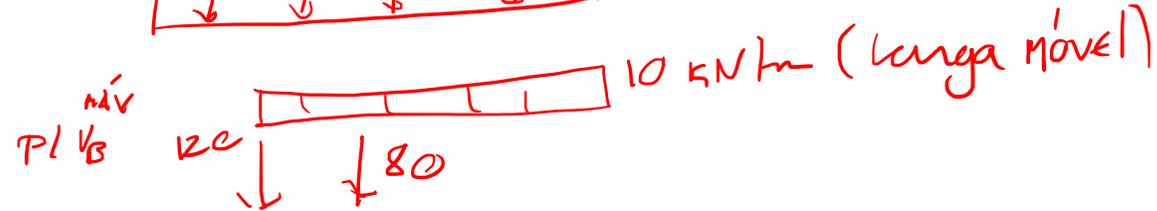
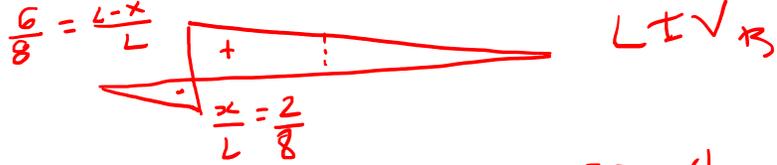


$$Y_B^{\text{max}} = 120 \cdot 1 + 80 \cdot 0,75 + (10 + 20) \left( \frac{1,8}{2} \right) = 300 \text{ kN}$$



$$Y_B^{\text{min}} = \frac{1,8}{2} \cdot 20 = 18 \text{ kN}$$

# EXTREMOS DO CONTINUA:



$$V_B^{\text{máx}} = 20 \cdot \left[ -\frac{2}{8} \cdot \frac{2}{2} + \frac{6}{8} \cdot \frac{6}{2} \right] + 120 \cdot \frac{6}{8} + 80 \cdot y_2 + 10 \cdot \left[ \frac{6}{8} \cdot \frac{6}{2} \right] =$$

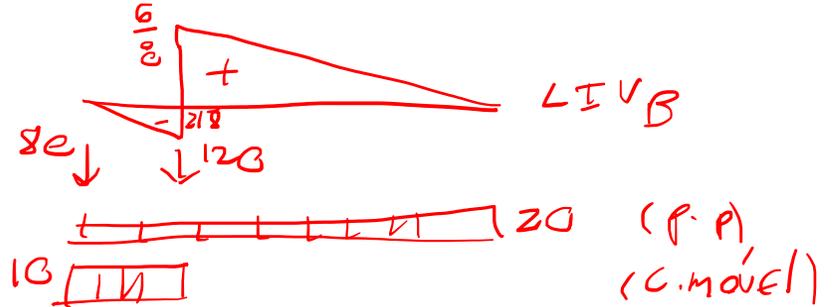
(P.P.)



$$\frac{y_2}{6} = \frac{y_2}{4} \Rightarrow y_2 = 0,5$$

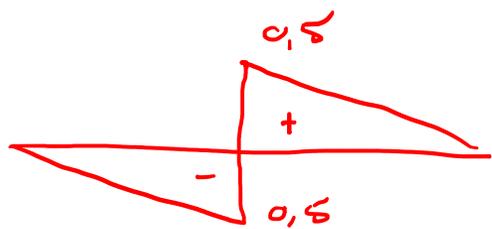
$$V_B^{\text{máx}} = 40 + 90 + 40 + 22,5 = 192,5 \text{ kN}$$

$V_B^{\text{mín}}$



$$V_B^{\text{mín}} = 20 \left[ -\frac{2}{8} \cdot \frac{2}{2} + \frac{6}{8} \cdot \frac{6}{2} \right] + 120 \cdot \left(-\frac{2}{8}\right) + 10 \left(-\frac{2}{8} \cdot \frac{2}{2}\right)$$

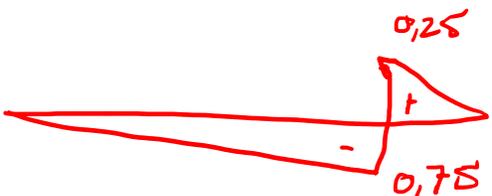
$$V_B^{\text{mín}} = 40 - 30 - 2,5 = 7,5 \text{ kN}$$



LIV<sub>C</sub>

$$\min V_C = 0 + \left[ -\frac{10}{2} \cdot 4 \cdot 0,5 - 120 \cdot 0,5 - 80 \cdot 0,25 \right] = -90 \text{ kN}$$

$$\max V_C = 0 + \left[ \frac{10}{2} \cdot 4 \cdot 0,5 + 120 \cdot 0,5 + 80 \cdot 0,5 \right] = 90 \text{ kN}$$



LIV<sub>D</sub>

$$\min V_D = -192,5 \text{ kN}$$

$$\max V_D = -7,5 \text{ kN}$$



LIV<sub>E</sub>

$$\min V_E = -300 \text{ kN}$$

$$\max V_E = -80 \text{ kN}$$



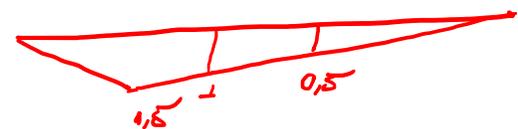
LIM<sub>A</sub>

$$\min M_A = \max M_A = 0$$



LIM<sub>E</sub>

$$\min M_E = \max M_E = 0$$

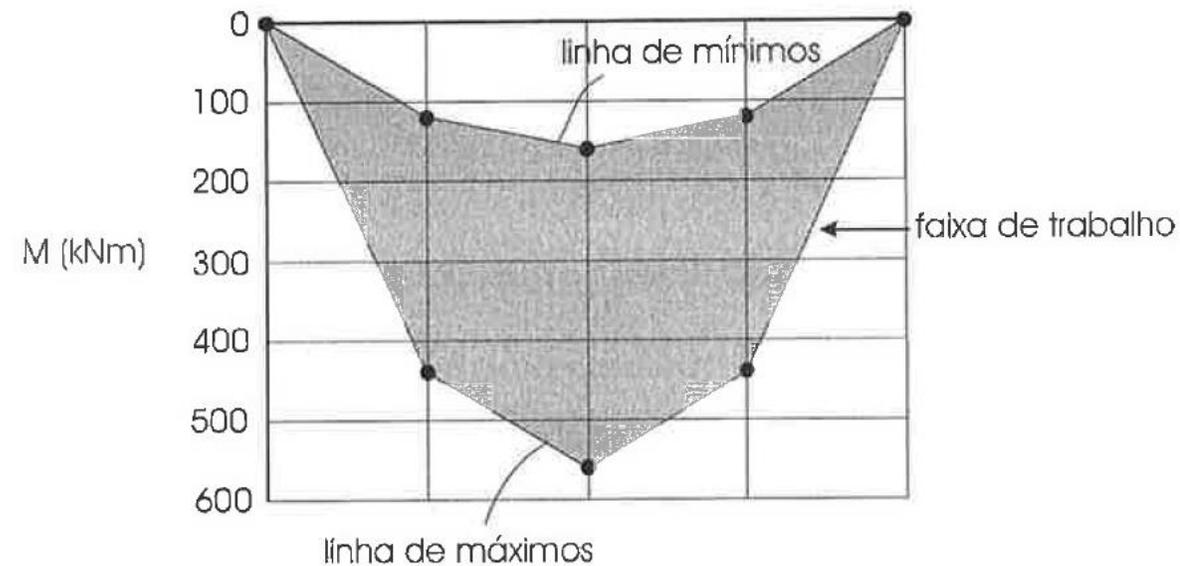
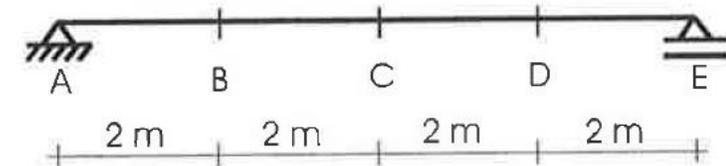
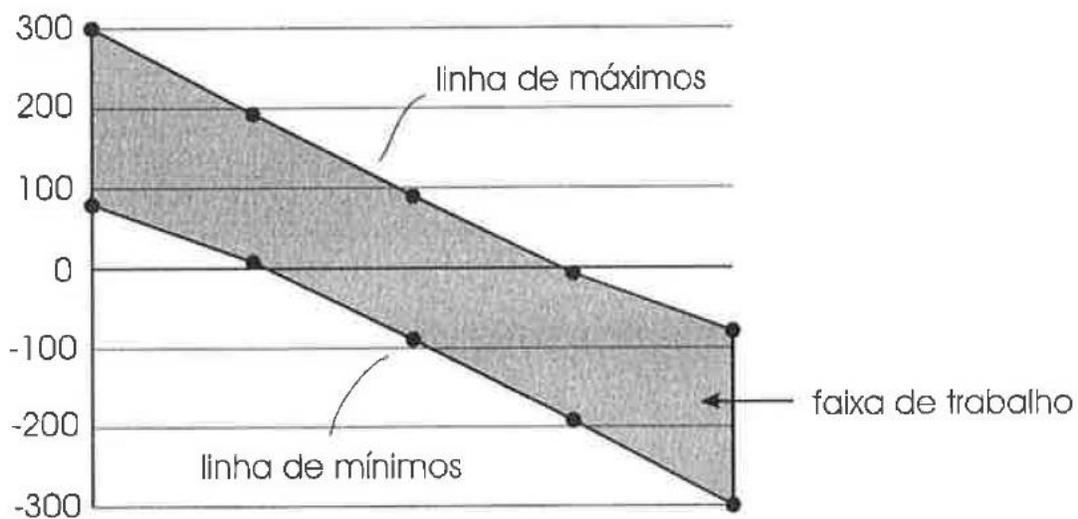
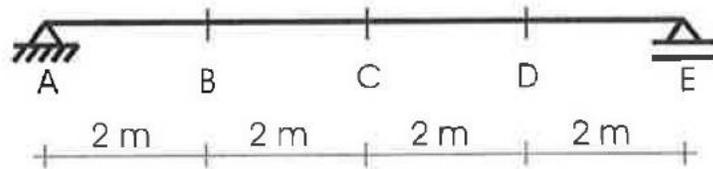
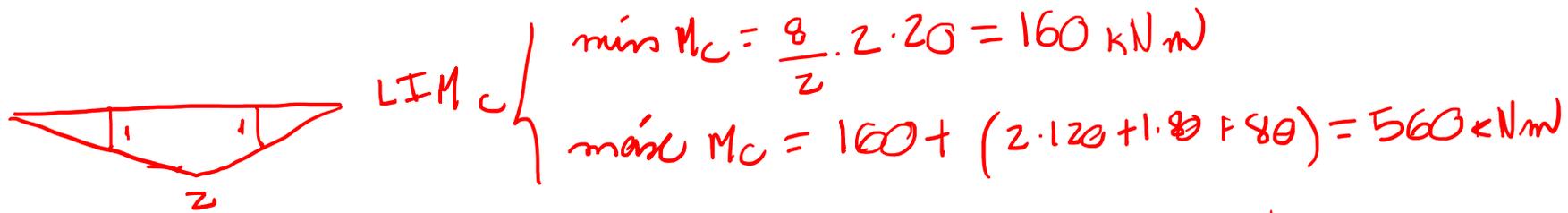


LIM<sub>B</sub>

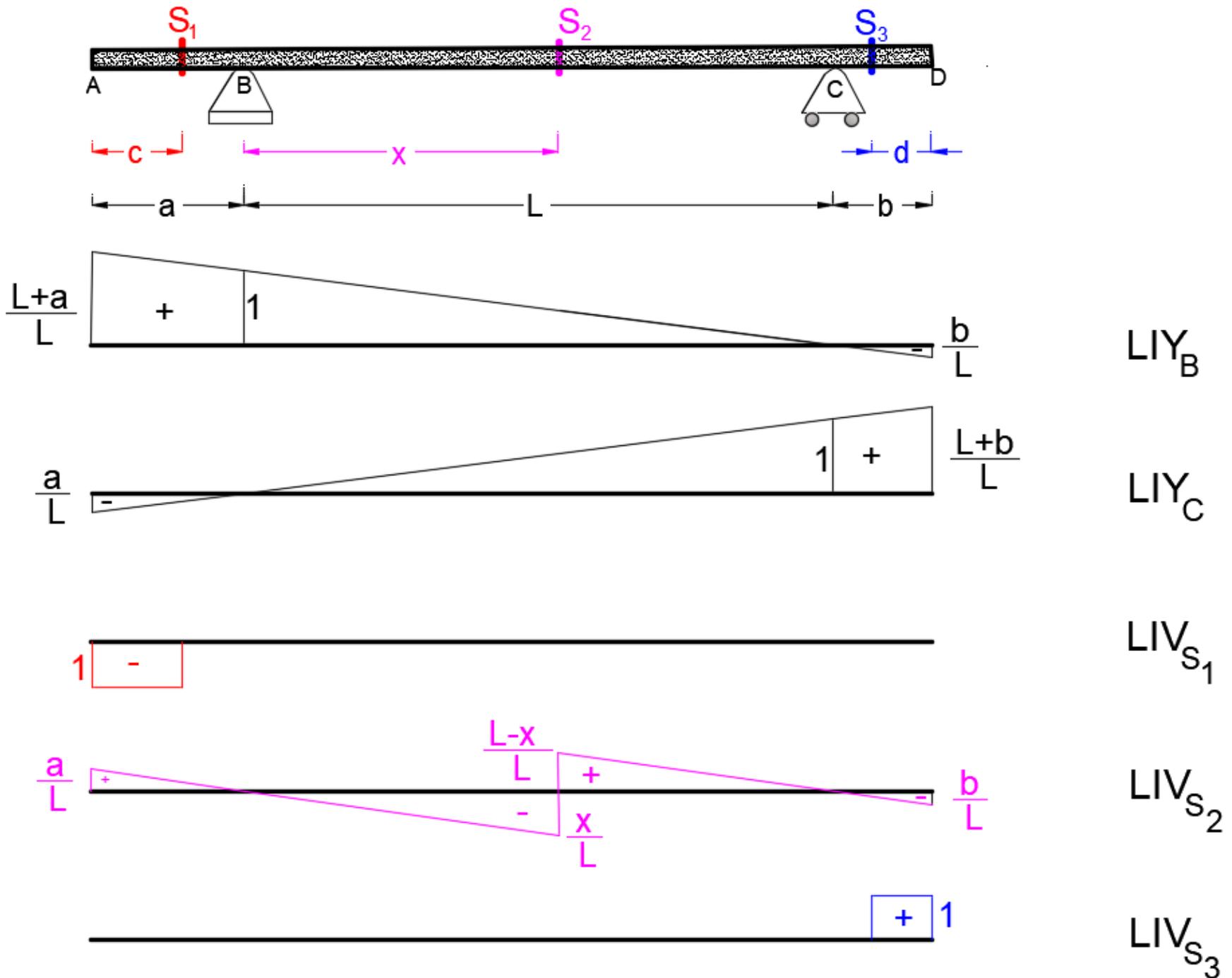
$$\min M_B = \frac{8}{2} \cdot 1,5 \cdot 20 = 120 \text{ kNm}$$

$$\max M_B = 120 + \left( \frac{8}{2} \cdot 1,5 \cdot 10 + 1,5 \cdot 120 + 1 \cdot 80 \right) = 440 \text{ kNm}$$

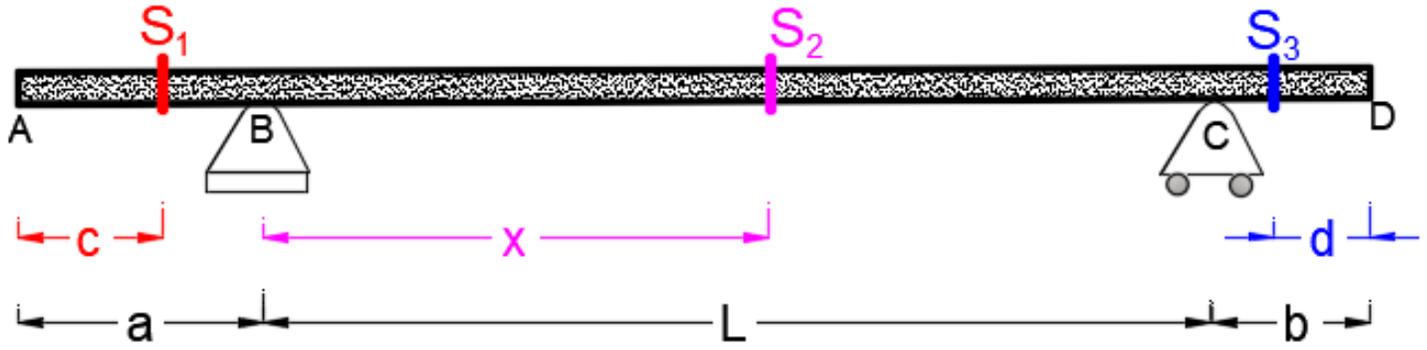
\*min: menor valor algébrico



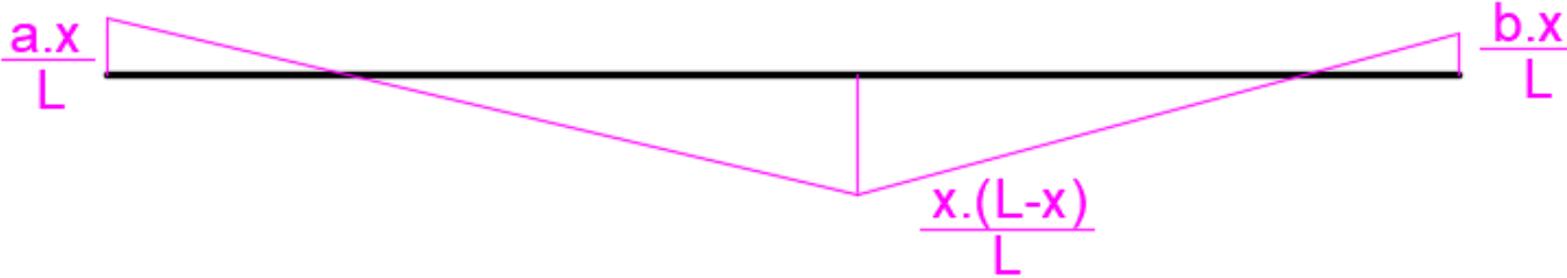
***LI – viga  
biapoiada  
com balanços***



***LI – viga  
biapoiada  
com balanços***



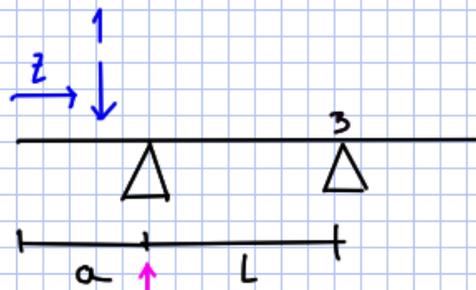
LIM<sub>S<sub>1</sub></sub>



LIM<sub>S<sub>2</sub></sub>

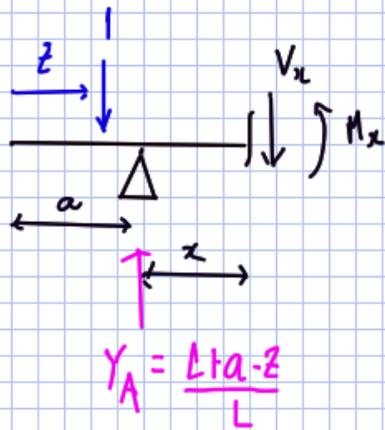
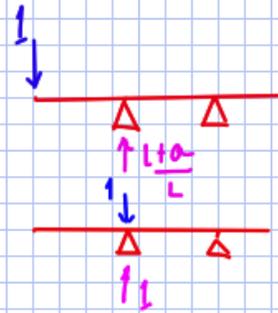


LIM<sub>S<sub>3</sub></sub>

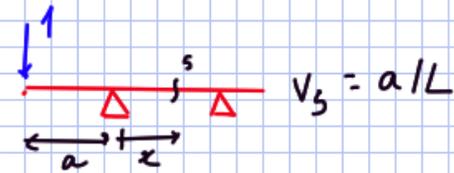


$$\sum M_B = 0: Y_A \cdot L = 1 \cdot (L + a - z)$$

$$Y_A = \frac{L + a - z}{L} \left\{ \begin{array}{l} Y_A(z=0) = \frac{L+a}{L} \\ Y_A(z=a) = 1 \end{array} \right.$$

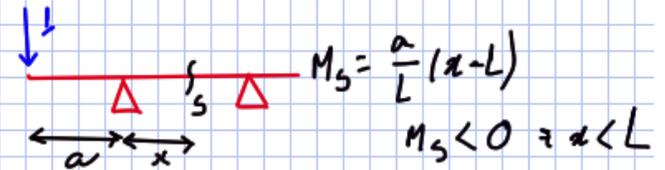


$$\sum F_y = 0: V_x = \frac{L + a - z}{L} - 1 = \frac{a - z}{L} \left\{ \begin{array}{l} V_x(z=0) = a/L \\ V_x(z=a) = 0 \end{array} \right.$$



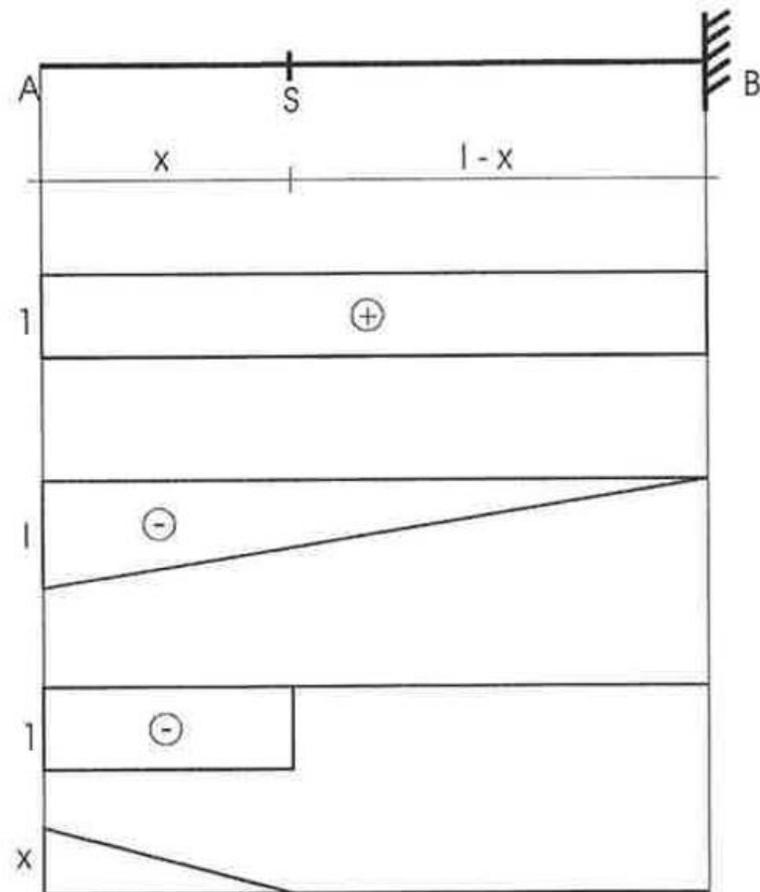
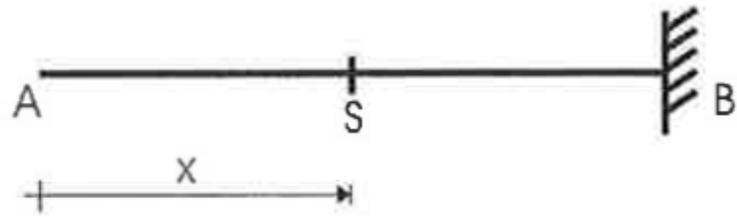
$$\sum M_S = 0: M_x + 1 \cdot (x + a - z) = \left( \frac{L + a - z}{L} \right) \cdot x$$

$$M_x = \left( \frac{L + a - z}{L} \right) x - x - a + z \left\{ \begin{array}{l} M_x(z=0) = \frac{a}{L} (x - L) \\ x - L < 0 \rightarrow M_x(z=0) < 0 \end{array} \right.$$



$$M_x(z=a) = x - x - a + a = 0$$

# LI – viga em balanços



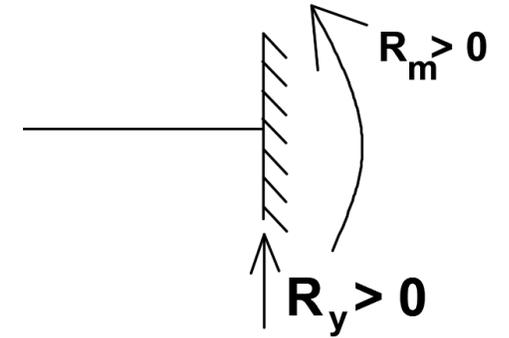
LIV<sub>b</sub>

LIM\*

LIV<sub>s</sub>

LIM<sub>s</sub>

Convenção da reação



Reação  $R_y$

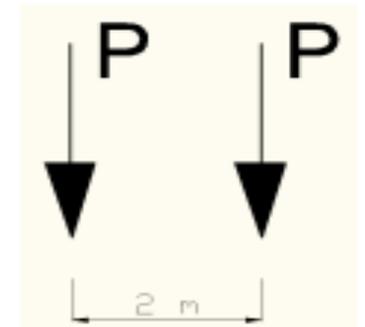
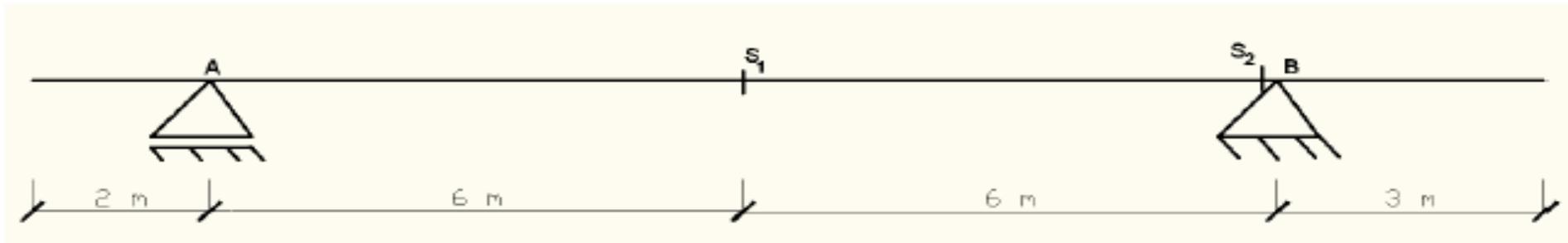
Reação  $R_m$

## Exercício 2

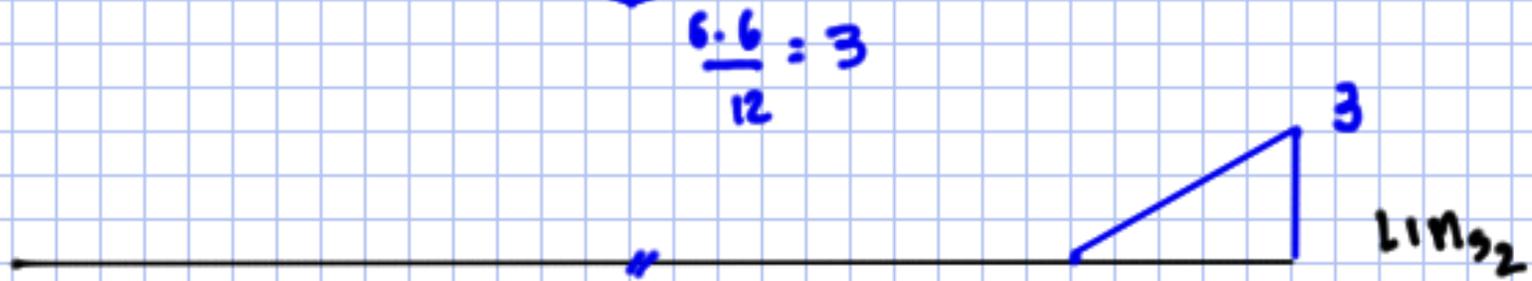
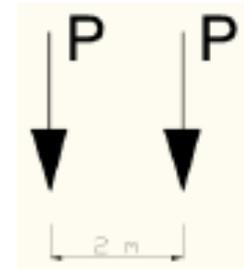
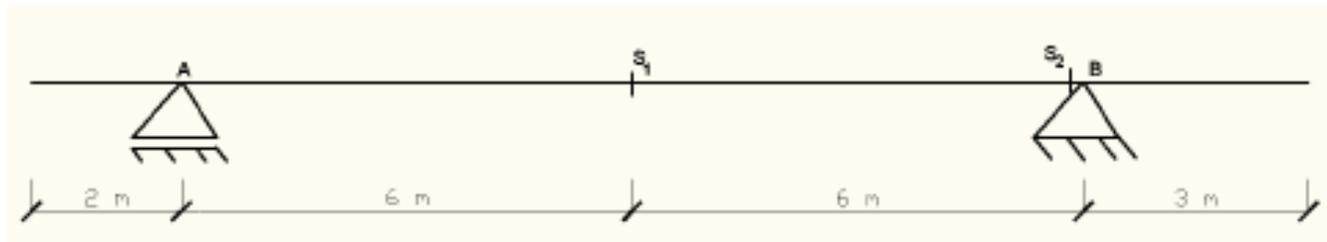
A viga de uma ponte possui peso próprio de  $g = 25 \text{ kN/m}$ , carga móvel de  $p = 15 \text{ kN/m}$  e um veículo-tipo indicado a seguir. Ela deve ser dimensionada para a passagem do veículo-tipo com segurança. Sabe-se que a ponte deve resistir a um cortante máximo em módulo de  $350 \text{ kN}$ , e que o momento máximo e o momento mínimo não devem exceder a  $1000 \text{ kN.m}$  e a  $450 \text{ kN.m}$ , respectivamente, ambos indicados em módulo. Obtenha o máximo valor da carga por eixo –  $P_{\max}$  – para que ela trabalhe com segurança.

Avalie apenas o cortante máximo em módulo e o momento mínimo na seção  $S_2$  e o momento máximo em  $S_1$ .

Indicar explicitamente todas as passagens de cálculo e o valor de  $P_{\max}$  no espaço indicado na resposta.



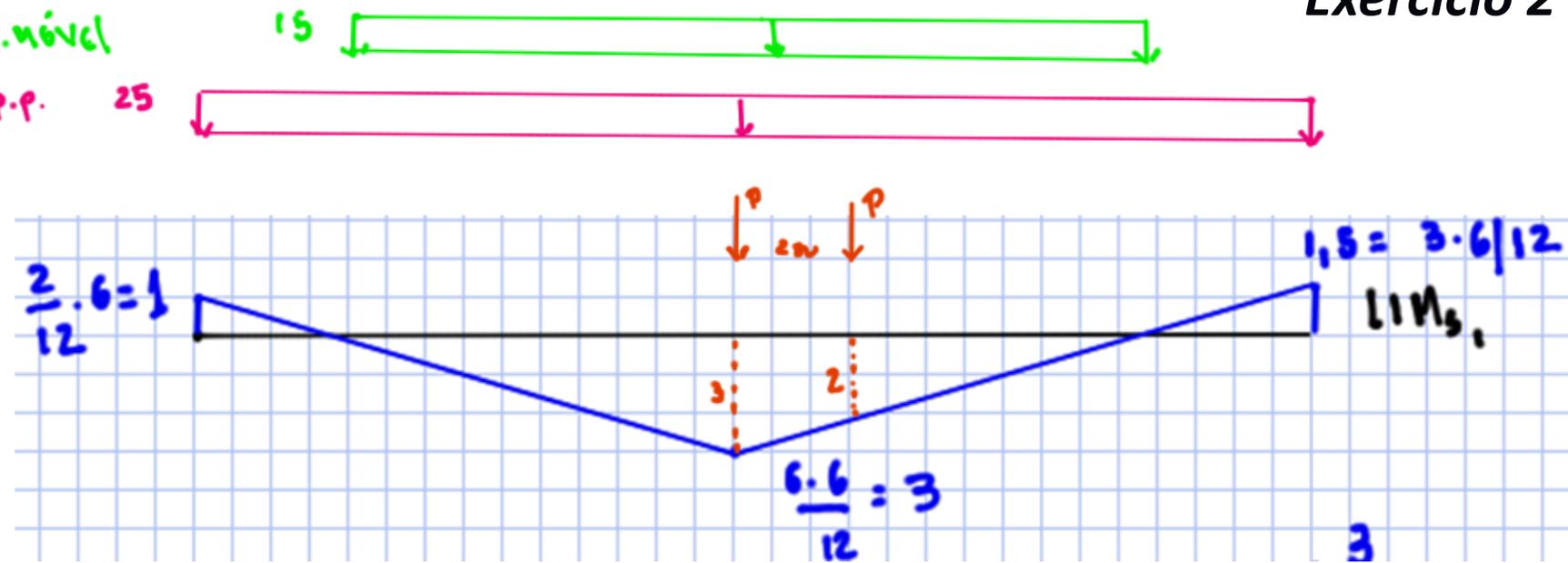
# Exercício 2



## Exercício 2

c. móvel

P.P. 25

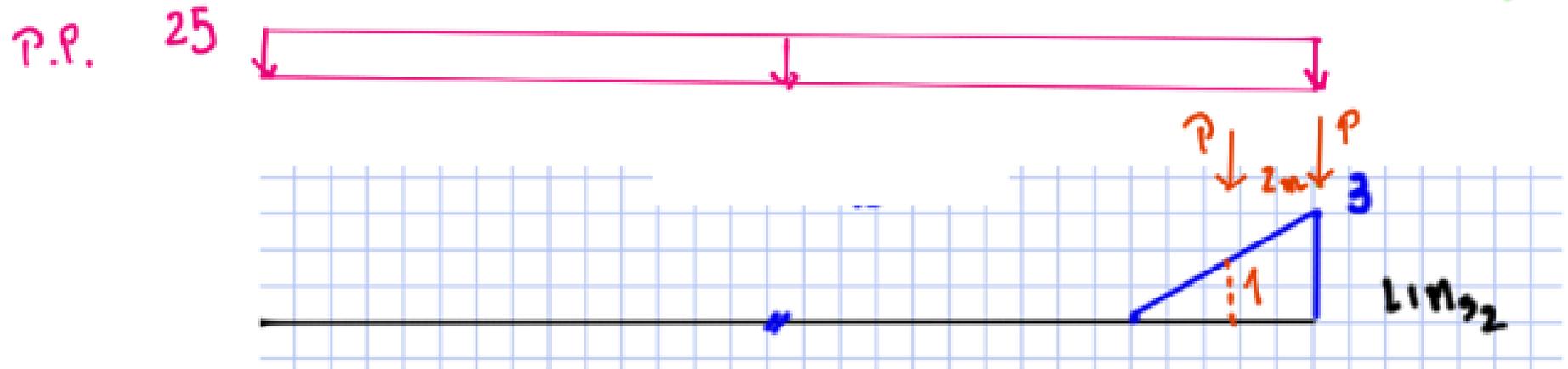


$$M_{MAX} = 25 \left[ -\frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1,5 \cdot 3}{2} + \frac{3}{2} \cdot 12 \right]_{PP}$$

$$+ 15 \left[ \frac{3}{2} \cdot 12 \right]_{móvel} + 3P + 2P =$$

$$= 638,75 + 5P \leq 1000 \rightarrow P \leq 72,25 \text{ kN}$$

## Exercício 2

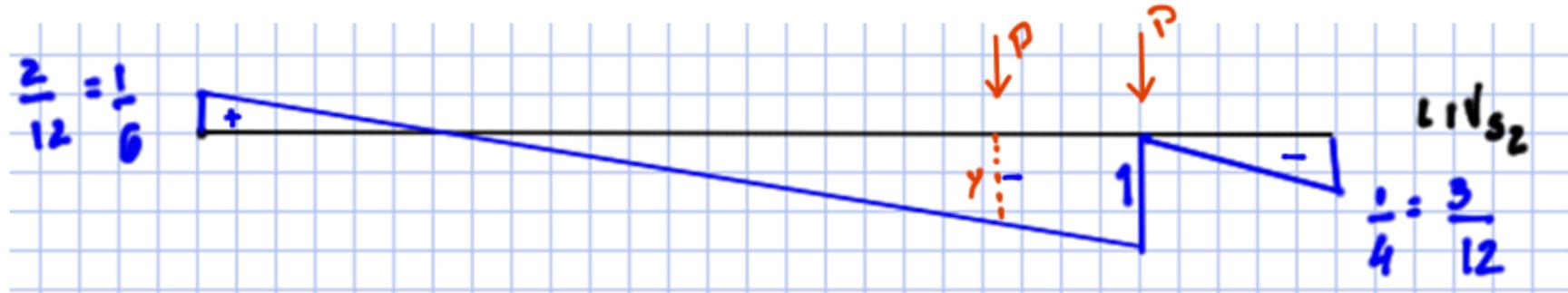


$$\begin{aligned} M_{\text{mín}} &= 25 \left[ \frac{-3}{2} \cdot 3 \right]_{pp} + 15 \left[ \frac{-3}{2} \cdot 3 \right] + \\ &\quad + (-P)(3) + (-P)(1) \\ &= |-180 - 4P| \leq 450 \rightarrow P \leq 67,5 \text{ cN} \end{aligned}$$

## Exercício 2

P.P. 25

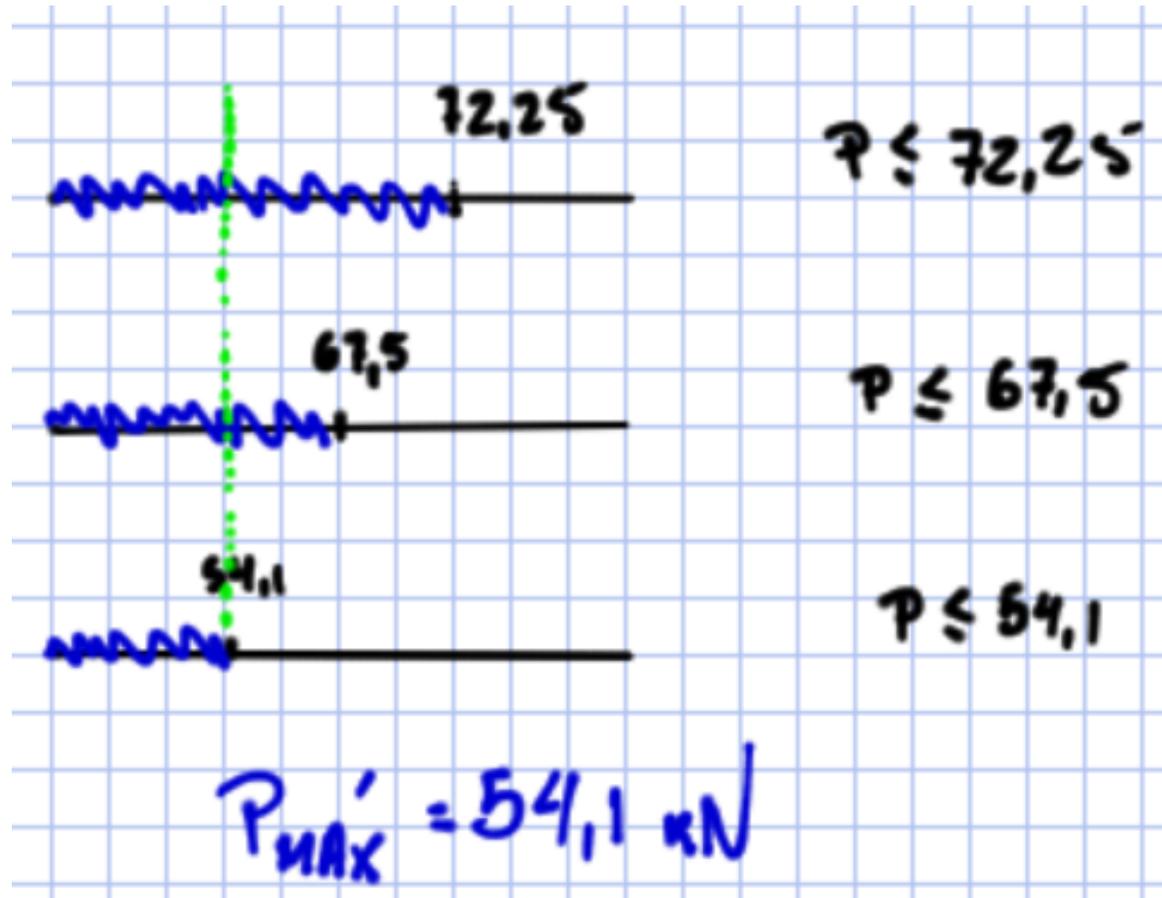
c. Móvel 15



$$\frac{1}{12} = \frac{y}{12 \cdot 2}$$
$$y = 10/12$$

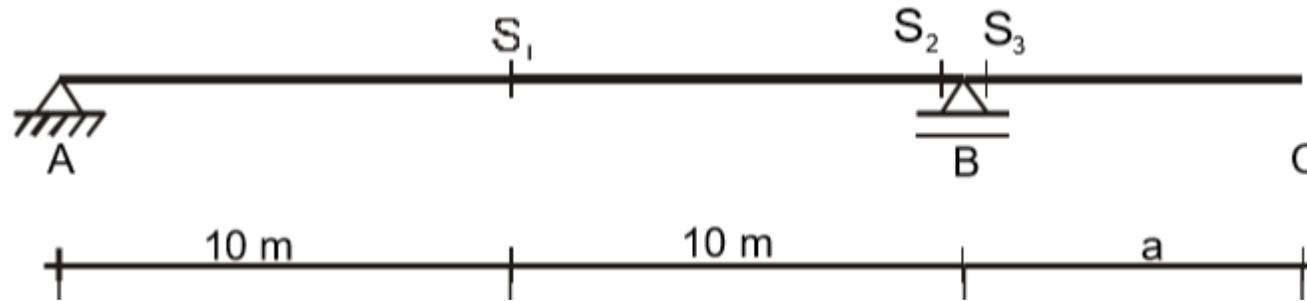
$$V_{\text{MÍN}} = 25 \left[ \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{2} - \frac{1}{2} \cdot 12 - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} \right] P +$$
$$+ 15 \left[ -\frac{12}{2} - \frac{3}{8} \right]_{\text{Móvel}} - P \cdot \frac{10}{12} =$$
$$= \left| -250,8333 - \frac{22}{12} P \right| \leq 350$$
$$P \leq 54,1 \text{ kN}$$

## Exercício 2

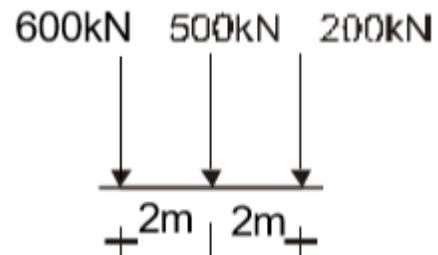


### Exercício 3

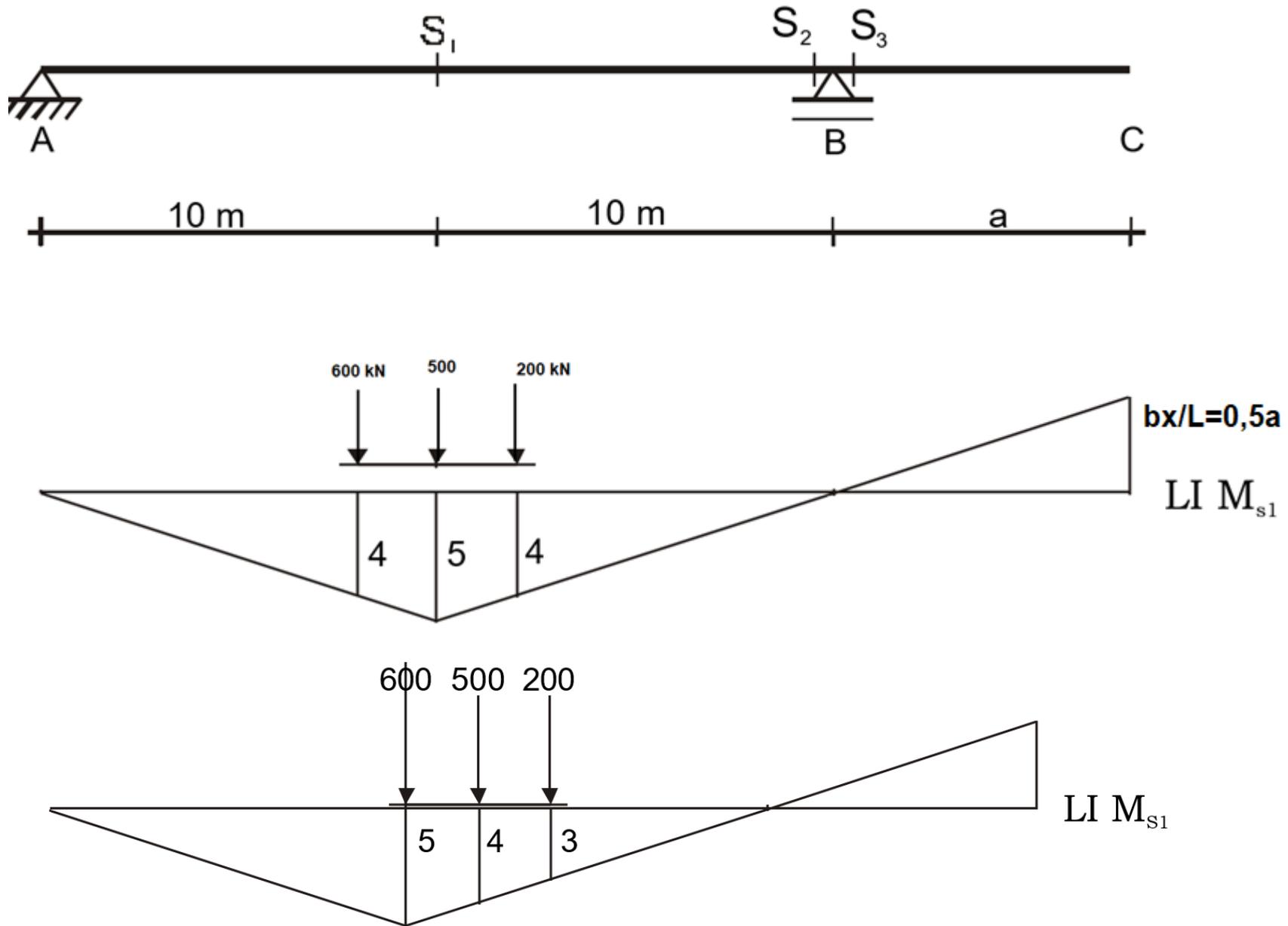
a) Determinar o valor de  $a$  que torna iguais em módulo o máximo momento fletor positivo em  $S_1$  devido ao trem-tipo e o máximo momento fletor negativo em  $S_3$  devido ao trem-tipo.



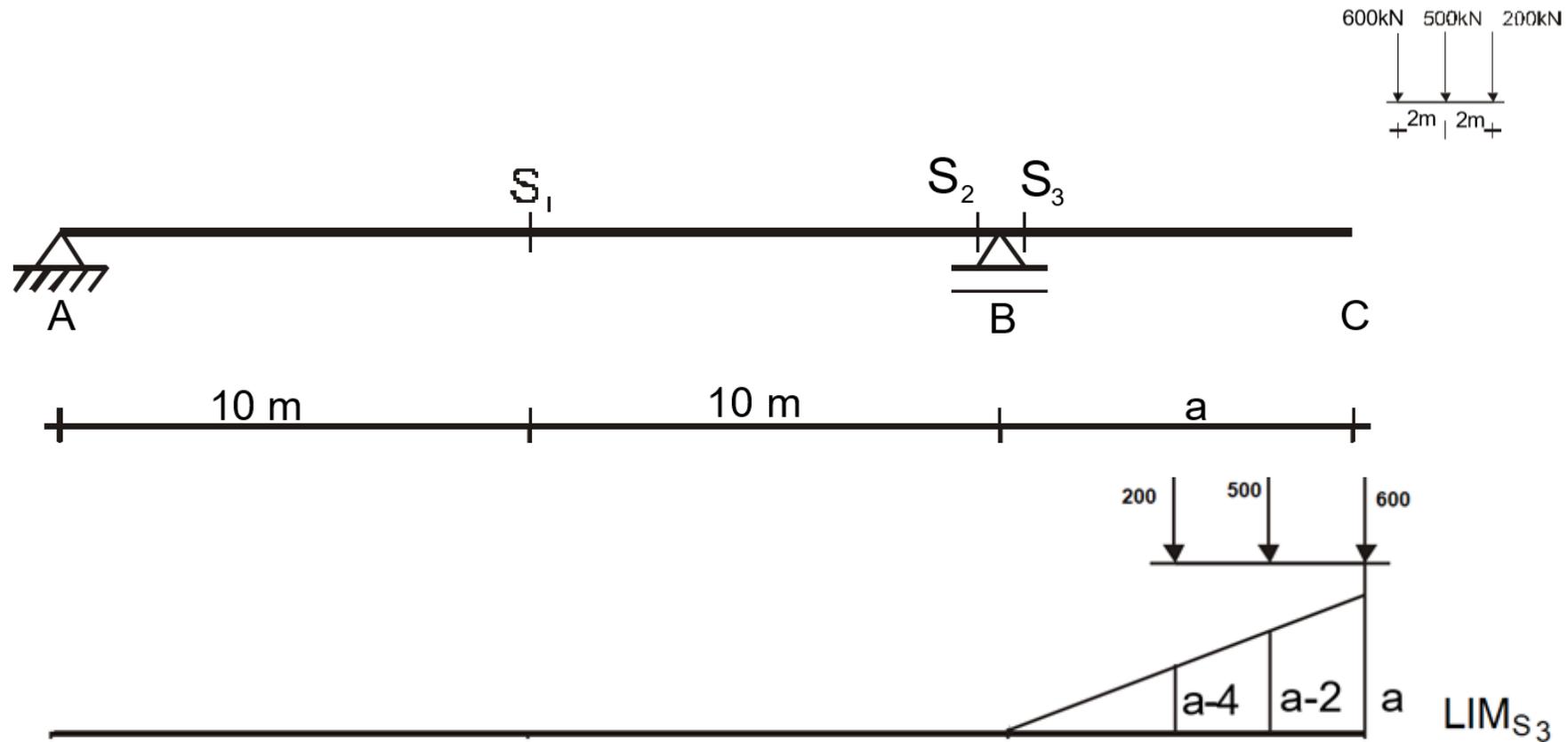
**trem-tipo**



# Exercício 3



## Exercício 3



$$a) M_{S1} = 600 \cdot 4 + 500 \cdot 5 + 200 \cdot 4 = 5700 \text{ kN.m}$$

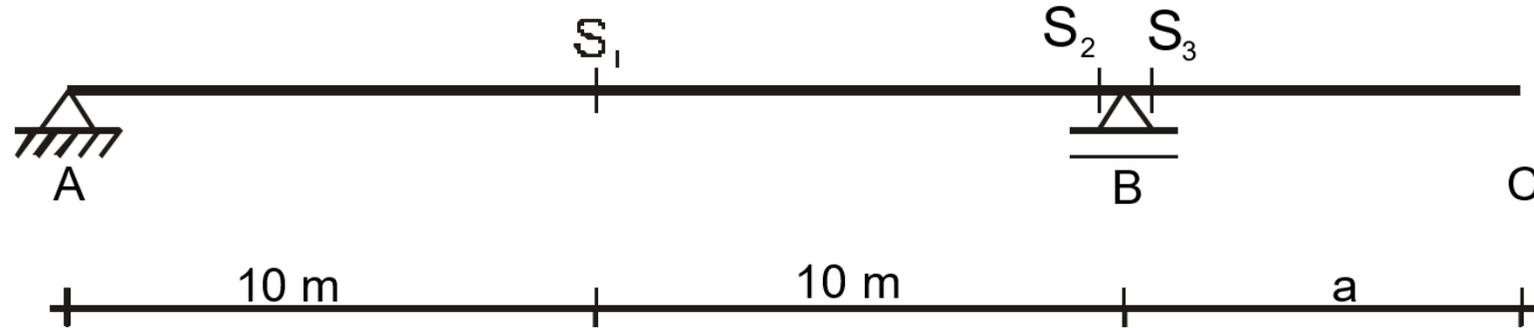
$$M_{S1} = 600 \cdot 5 + 500 \cdot 4 + 200 \cdot 3 = 5600 \text{ kN.m}$$

$$\text{máx } M_{S1} = 5700 \text{ kN.m}$$

$$\text{máx } M_{S3} = 600 \cdot a + 500 \cdot (a - 2) + 200(a - 4) = 1300a - 1800$$

$$\text{máx } M_{S1} = \text{máx } M_{S3} \quad 5700 = 1300a - 1800 \quad a = 7500/1300 = 5,77 \text{ m}$$

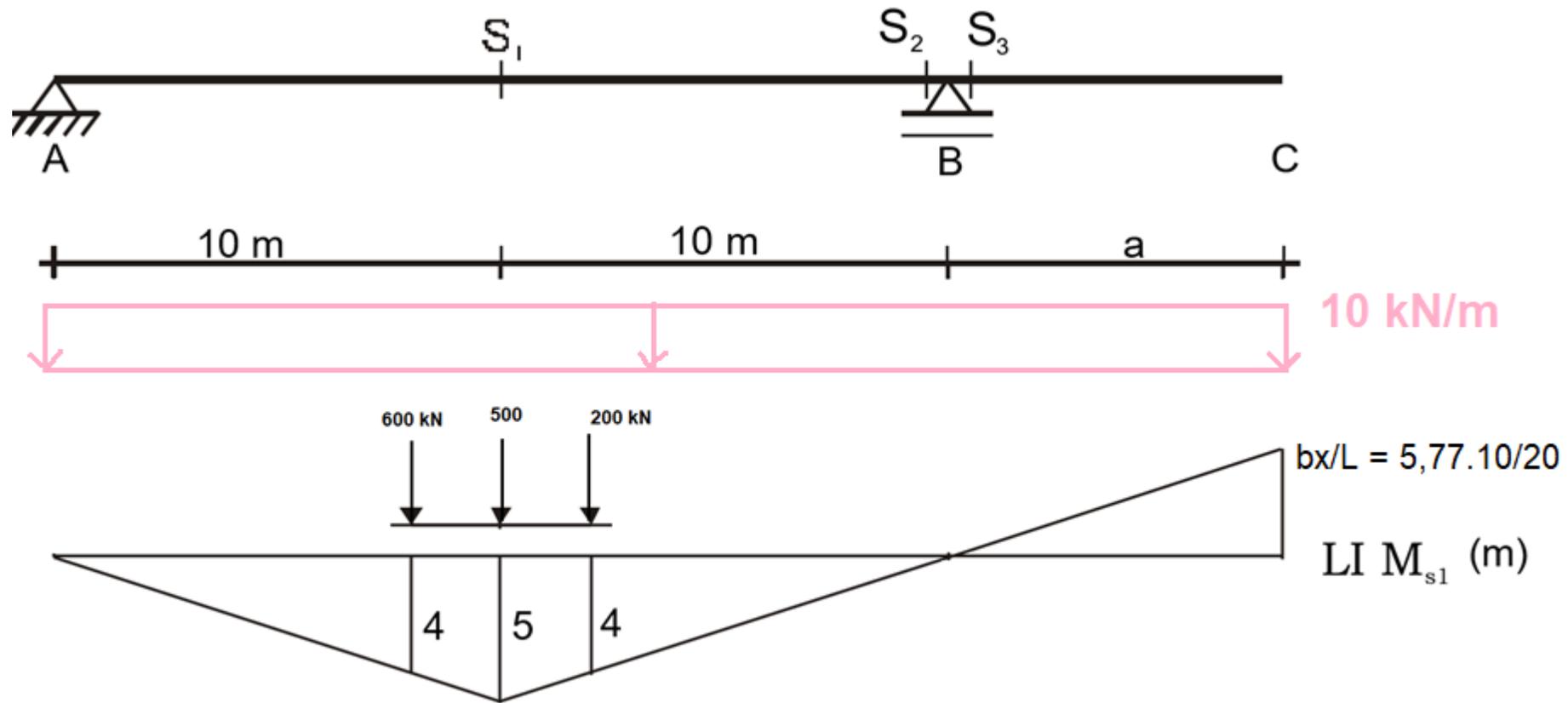
### Exercício 3



b) Utilizando o valor de  $a$  calculado no item anterior e sabendo que o peso próprio da viga é de 10 kN/m:

- determinar o máximo momento fletor positivo em  $S_1$  e o máximo momento fletor negativo em  $S_3$  decorrentes da atuação simultânea do peso próprio e do trem-tipo.

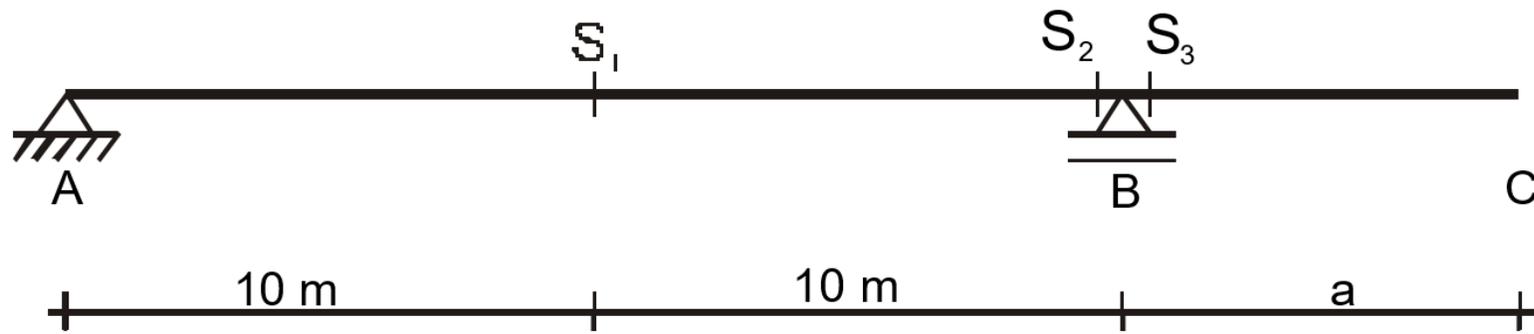
### Exercício 3



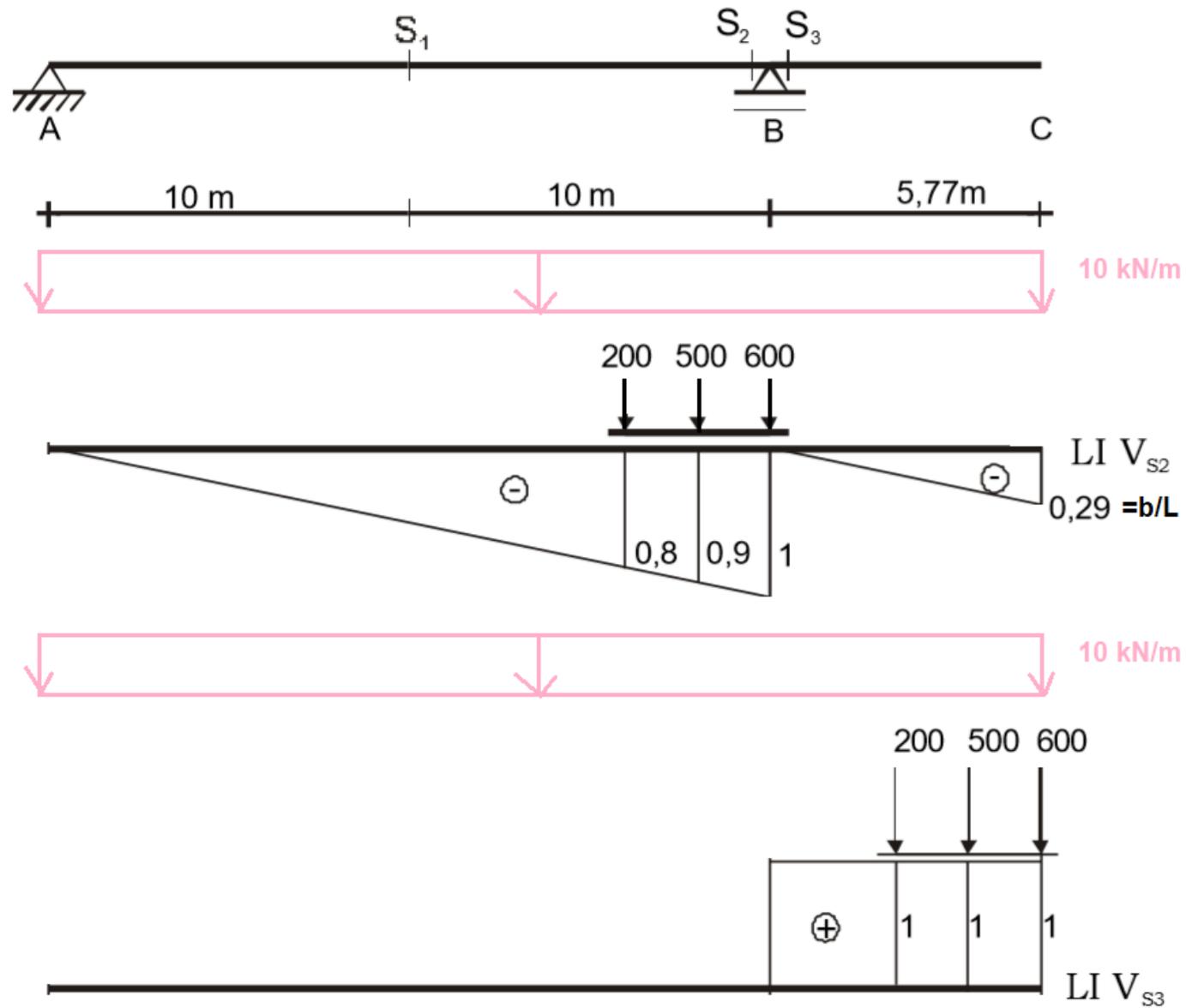
$$M_{\max S_1} = 10 \left[ \frac{5}{2} \cdot 20 - \frac{5,77}{2} \cdot \frac{5,77}{2} \right]_{R.P.} +$$
$$600 \cdot 4 + 500 \cdot 5 + 200 \cdot 4$$
$$= 6116,8 \text{ kNm}$$

### Exercício 3

- determinar a máxima força cortante em módulo em  $S_2$  e a máxima força cortante em módulo em  $S_3$  decorrentes da atuação simultânea do peso próprio e do trem tipo.



# Exercício 3



### Exercício 3

$$\begin{aligned} \sqrt{S_{MAX} s_2} &= -10 \left[ \frac{20 \cdot 1}{2} + \frac{0,29 \cdot 5,77}{2} \right]_{P.P} + 600(-1) \\ &\quad + 500(-0,9) + 200(-0,8) \\ &= -1318,4 \text{ kN} \end{aligned}$$

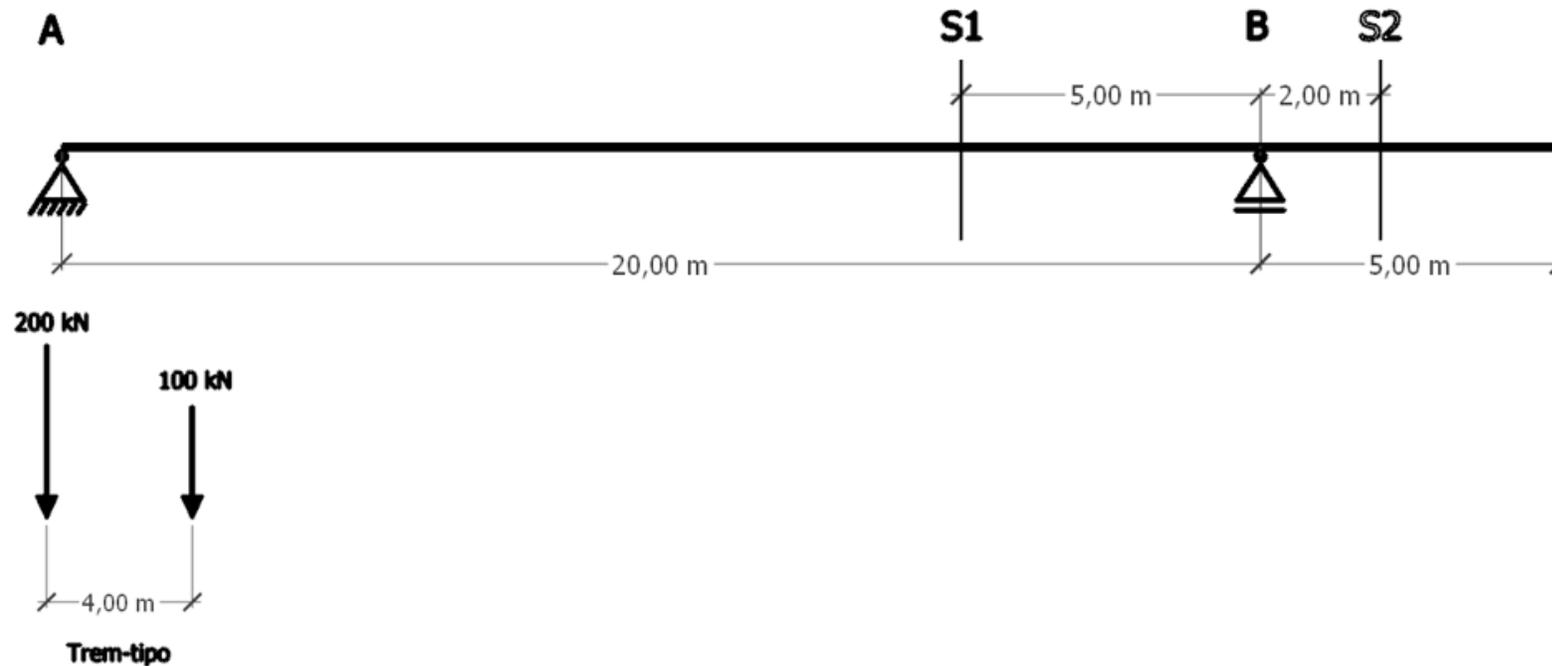
$$\begin{aligned} \sqrt{S_{MAX} s_3} &= 10 [5,77 \cdot 1]_{P.P} + 600 \cdot 1 + 500 \cdot 1 + \\ &\quad 200 \cdot 1 = 1357,7 \text{ kN} \end{aligned}$$

Nº USP: \_\_\_\_\_ Nome: \_\_\_\_\_

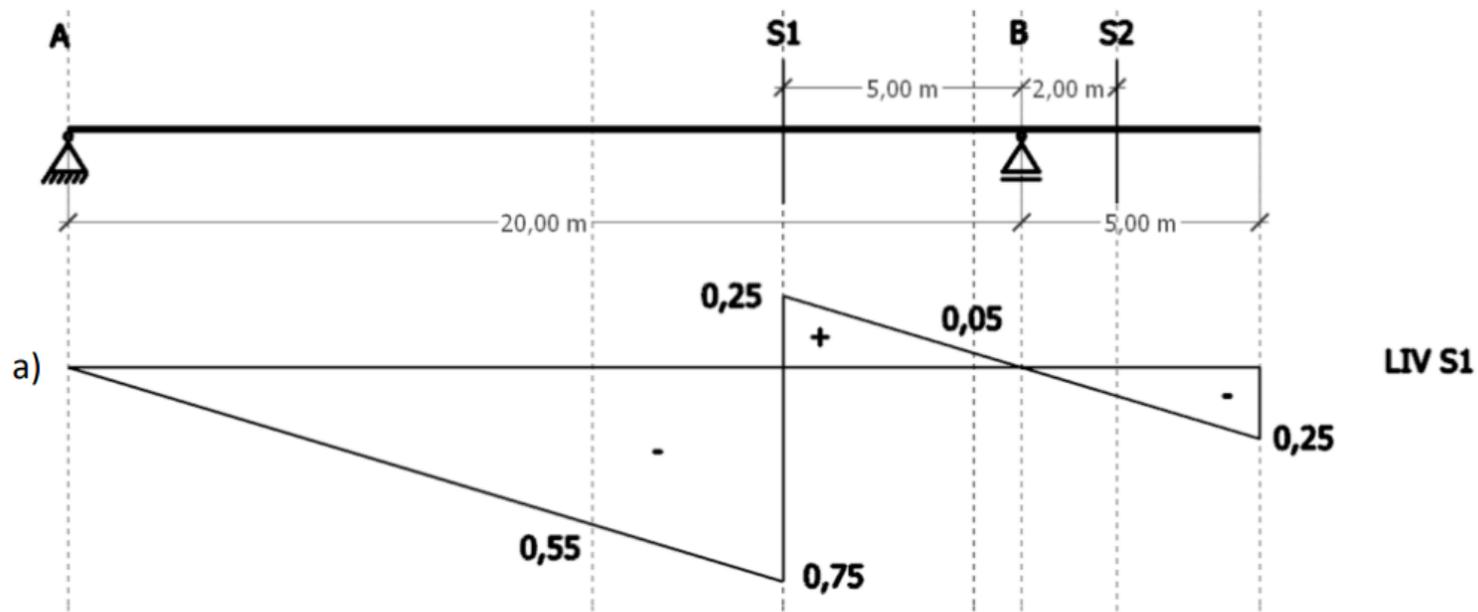
**1ª Questão (3,5 pts):** Considere a viga e o trem-tipo ilustrados abaixo. O peso próprio da viga é de 30 kN/m e a multidão é de 10 kN/m. Pedese:

- A linha de influência da força cortante na seção transversal S1 indicada,  $LIV_{S1}$
- Os valores máximo e mínimo da força cortante  $V$  na seção transversal S1
- A linha de influência do momento fletor na seção transversal S2 indicada,  $LIM_{S2}$
- Os valores máximo e mínimo do momento fletor  $M$  em S2

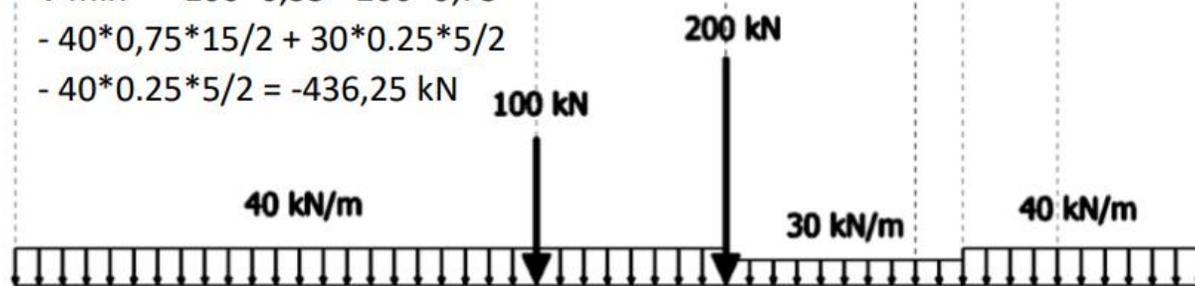
Por simplicidade, considere que a multidão possa estar distribuída em todo o trecho que convier, com ou sem a presença do trem-tipo.



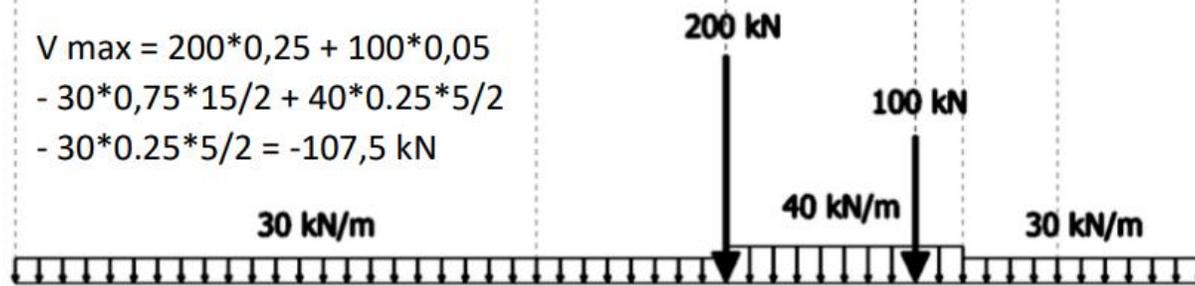
Resolução:

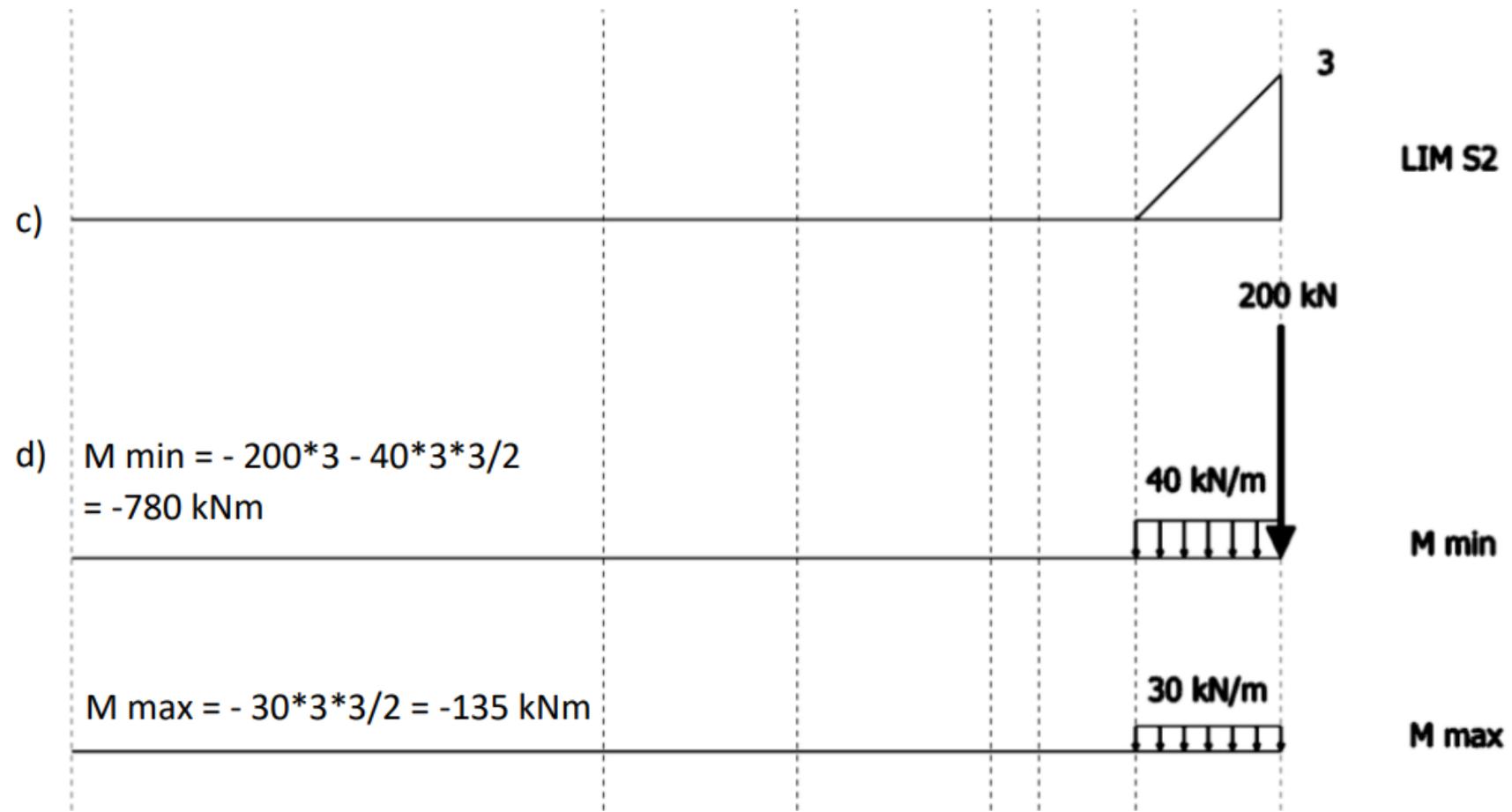


b)  $V_{\min} = -100 \cdot 0,55 - 200 \cdot 0,75$   
 $- 40 \cdot 0,75 \cdot 15/2 + 30 \cdot 0,25 \cdot 5/2$   
 $- 40 \cdot 0,25 \cdot 5/2 = -436,25 \text{ kN}$



$V_{\max} = 200 \cdot 0,25 + 100 \cdot 0,05$   
 $- 30 \cdot 0,75 \cdot 15/2 + 40 \cdot 0,25 \cdot 5/2$   
 $- 30 \cdot 0,25 \cdot 5/2 = -107,5 \text{ kN}$





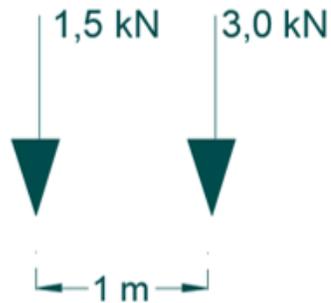
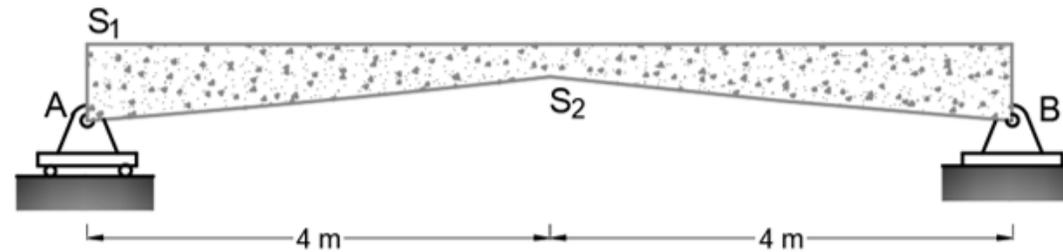
Nº USP: \_\_\_\_\_ Nome: \_\_\_\_\_

**3ª Questão (3,0 pts)** A viga a seguir possui sua seção transversal variável, denominada de viga em mísula. Na seção ( $S_1$ ) imediatamente à direita do apoio A, ela foi reforçada, de modo que nessa seção ela suporta uma força cortante de valor máximo de 16 kN. Na seção central ( $S_2$ ), sem reforço, ela suporta esforços cortante e de momento fletor de, no máximo, 3 kN e 33 kN.m, respectivamente. Considere as ações de carga distribuída permanente ( $g$ ) de 2 kN/m, de carga distribuída de multidão ( $p$ ) e o trem-tipo indicado.

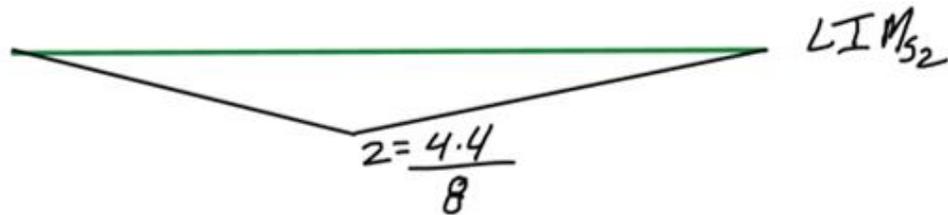
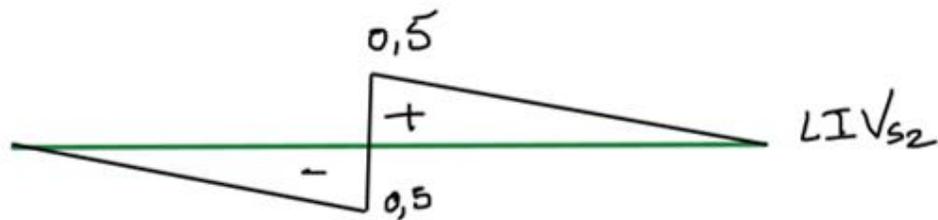
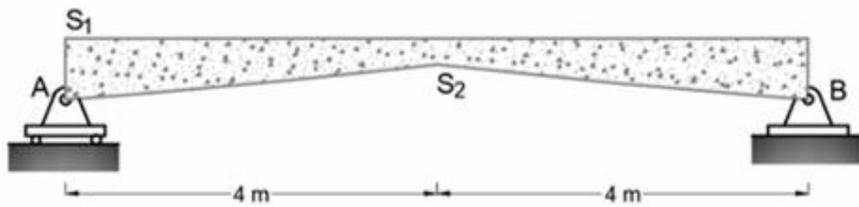
Obtenha o maior valor possível da carga distribuída de multidão ( $p_{max}$ ) de modo que o maior cortante em ( $S_1$ ) e em ( $S_2$ ) e o maior momento fletor em ( $S_2$ ) não tenha valores maiores que seus respectivos máximos suportados.

Apresente as linhas de influência nessas seções e calcule esse máximo valor possível de  $p$ ,  $p_{max}$ . Explícite todas as passagens dos cálculos empregados na resolução, para melhor avaliação.

Considere em módulo os valores de cálculo dos valores extremos do cortante.



(trem-tipo)



$$a) V_{\text{MÁX } S_1} = 2 \left[ \frac{1 \cdot 8}{2} \right] + p \left[ \frac{1 \cdot 8}{2} \right] + 3 \cdot 1 + 1,5 \cdot \frac{7}{8} = 4p + 12,3125$$

$$b) V_{\text{MÁX } S_2} = q \left[ -\frac{0,5 \cdot 4}{2} + \frac{0,5 \cdot 4}{2} \right] + p \left[ \frac{0,5 \cdot 4}{2} \right] + 3 \cdot 0,5 + 1,5 \cdot \frac{3}{8}$$

$$V_{\text{MÁX } S_2} = p + 2,0625$$

$$c) M_{\text{MÁX } S_2} = 2 \cdot \left[ \frac{2 \cdot 8}{2} \right] + p \left[ \frac{2 \cdot 8}{2} \right] + 3 \cdot 2 + 1,5 \cdot \frac{6}{4} = 24,25 + 8p$$

VERIFICAÇÃO:

$$V_{\text{MÁX } S_1} \leq 16 \Rightarrow 4p + 12,3125 \leq 16 \Rightarrow p \leq 0,921875 \text{ kN/m}$$

$$V_{\text{MÁX } S_2} \leq 3 \Rightarrow p + 2,0625 \leq 3 \Rightarrow p \leq 0,9375 \text{ kN/m}$$

$$M_{\text{MÁX } S_2} \leq 33 \Rightarrow 24,25 + 8p \leq 33 \Rightarrow p \leq 1,09375 \text{ kN/m}$$

$$p_{\text{MÁX}} = 0,9219 \text{ kN/m}$$