



# PEF3200 – Introdução à Mecânica das Estruturas

Aula 8 - 24/05/2023

Linhas de Influência

Prof. Martin Paul Schwark

Prof. Osvaldo Shigueru Nakao

Prof. Valério S. Almeida

# O que vimos nas aulas 1 a 7:

- Como é a disciplina, materiais de apoio, programação
- Mecânica dos sólidos deformáveis, o que são estruturas, estão em tudo
- Modelos físicos e matemáticos, classificações das estruturas, ações que atuam sobre elas e alguns tópicos da mecânica
- Deformadas, movimentos em sistemas materiais, vínculos, estaticidade, estruturas hipostáticas, isostáticas e hiperestáticas, grau de hiperestaticidade, as simplificações adotadas nesta disciplina
- Cálculo de reações de apoio
- Tensões, esforços solicitantes, o Teorema Fundamental da Resistência dos Materiais
- Diagramas de esforços solicitantes em estruturas planas e espaciais

# O que vamos ver nesta aula:

- Linha de influência



# Linhas de influência

An aerial photograph showing a train crossing a concrete bridge over a wide river. The train consists of a blue locomotive with the word 'FUMO' on its side, followed by several blue freight cars, also marked with 'FUMO'. The bridge is supported by several concrete piers. The surrounding landscape is lush green with dense trees and vegetation. The river is a light blue-green color.

Pontes não são calculadas com cargas distribuídas uniformes: recebem cargas móveis, compostas por um trem-tipo e carga distribuída

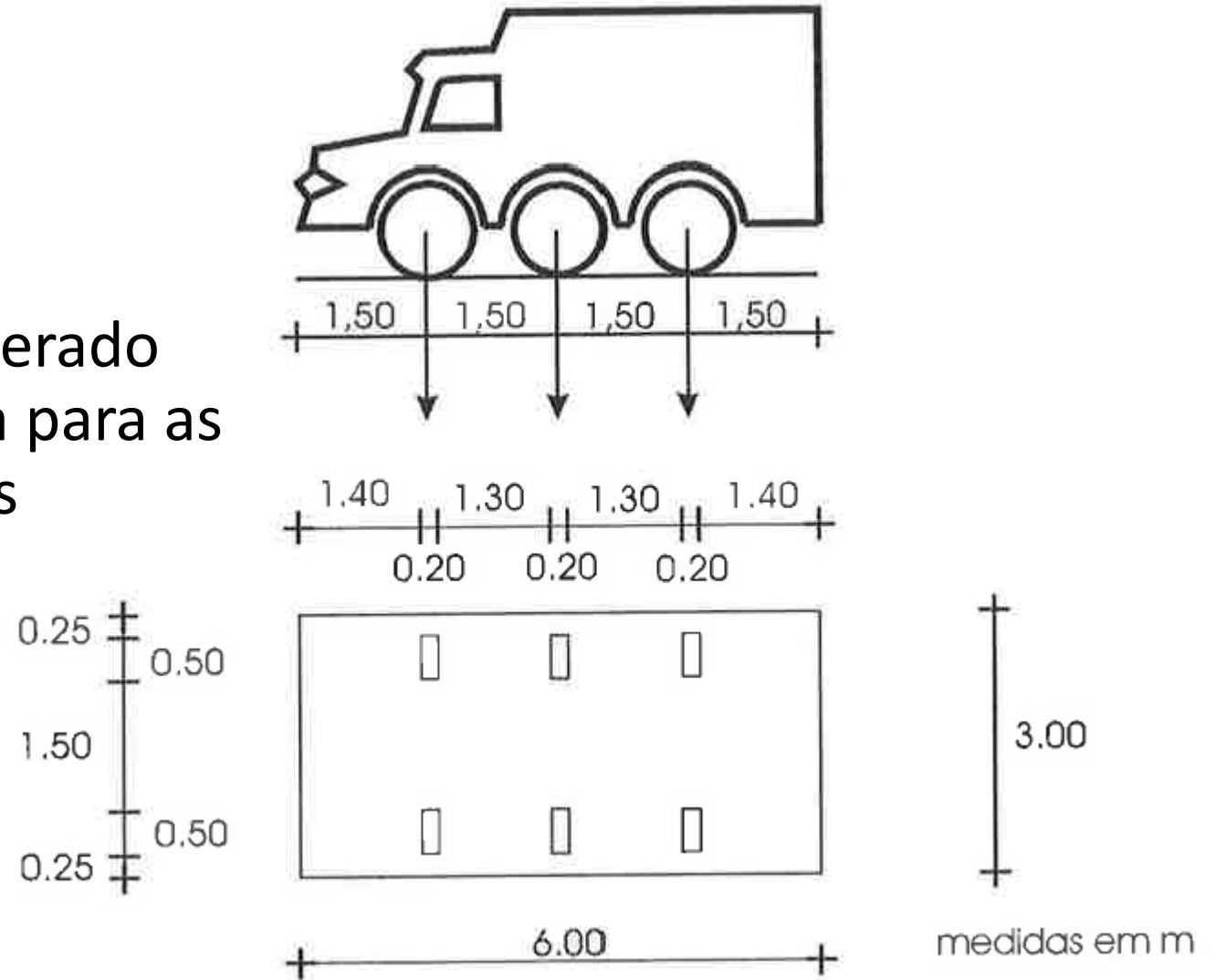
# Cargas sobre pontes rodoviárias

- Segundo a norma ABNT NBR 7188, são definidas três classes de pontes rodoviárias: classes 45, 30 e 12, para trem-tipo (ou caminhão) com peso total de 450, 300 e 120 kN respectivamente
- Além do trem tipo, as pontes devem suportar multidão (ou veículos leves) com carga de  $5 \text{ kN/m}^2$

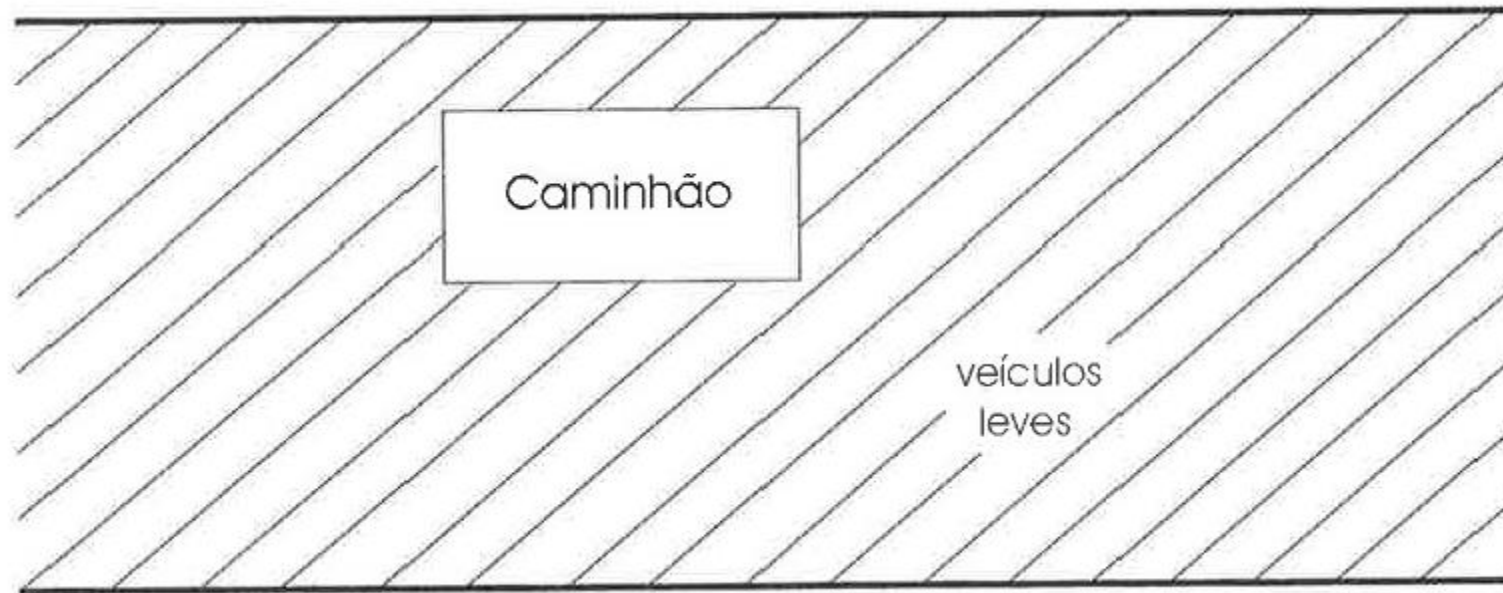


# Trem-tipo rodoviário classe 45

- Peso total 450 kN
- Dimensões conforme figura
- Peso das rodas deve ser considerado concentrado de 75 kN por roda para as vigas, e distribuído para as lajes



# Posicionamento do trem-tipo sobre a ponte



# Cargas sobre pontes ferroviárias

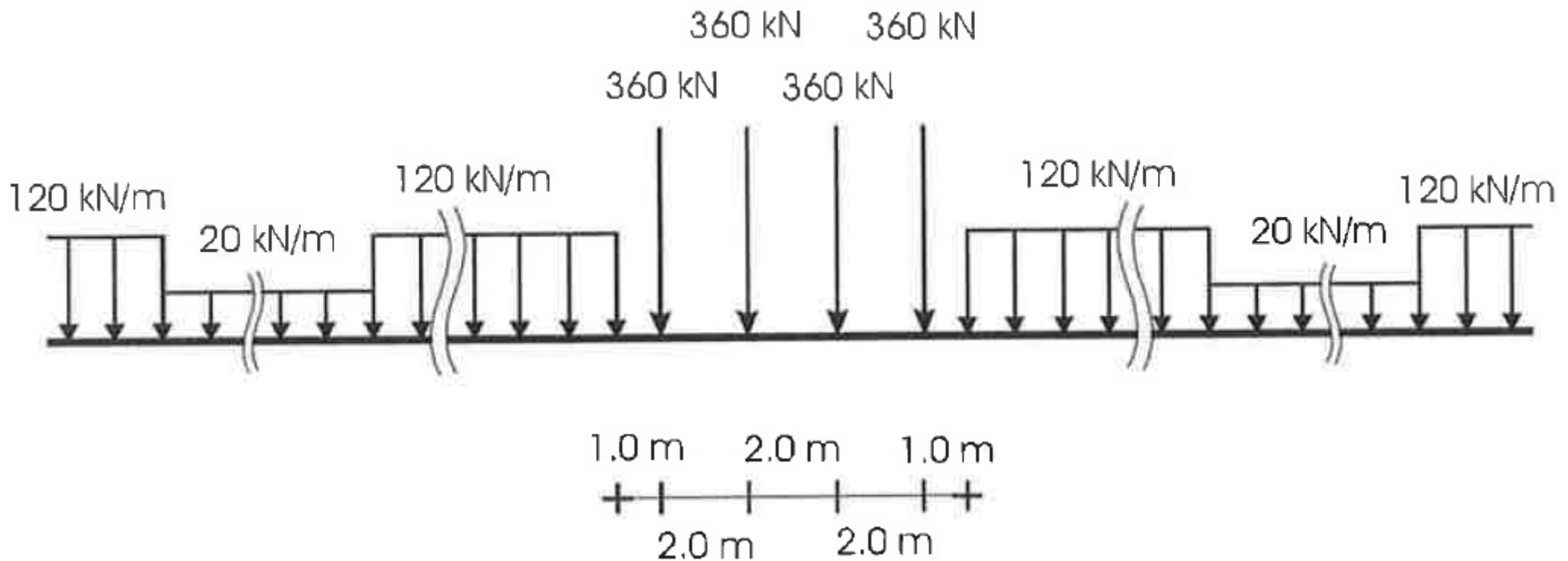
- Segundo a norma ABNT NBR 7189, há quatro tipos de trem-tipo ferroviário, dependendo do peso do trem que trafega na linha: classes TB-360, TB-270, TB-240 e TB-170, para locomotivas com 360, 270, 240 e 170 kN/eixo, respectivamente
- Além da locomotiva, a linha será carregada com cargas distribuídas linearmente que correspondem aos vagões, que podem estar carregados ou descarregados
- Carga distribuída dos vagões
  - Carregados – 120 kN/m
  - Descarregados – 20 kN/m





# Posicionamento do trem-tipo sobre a ponte

- Exemplo do trem-tipo TB-360



# ALUNOS DA USP PODEM ACESSAR AS NORMAS DA ABNT, COM O EMAIL USP E A SENHA ÚNICA

**LINK: GEDWEB.COM.BR/USP/**

gedweb.com.br/aplicacao/usuario/asp/main.asp

Gmail Google Drive limit of x to 0 1/x c... Daes: Acesso ao site MecMovies - Mech... Globosat Play - Fil... USP Jupiterweb Target GEDWeb Int

Target 25 ANOS DESDE 1994 FACILITANDO O ACESSO À INFORMAÇÃO TECNOLÓGICA

USP Universidade de São Paulo BRASIL

gedWeb

LOGIN DE ACESSO

E-mail xxxxxx@usp.br ✓

Senha

[Esqueci minha senha](#)

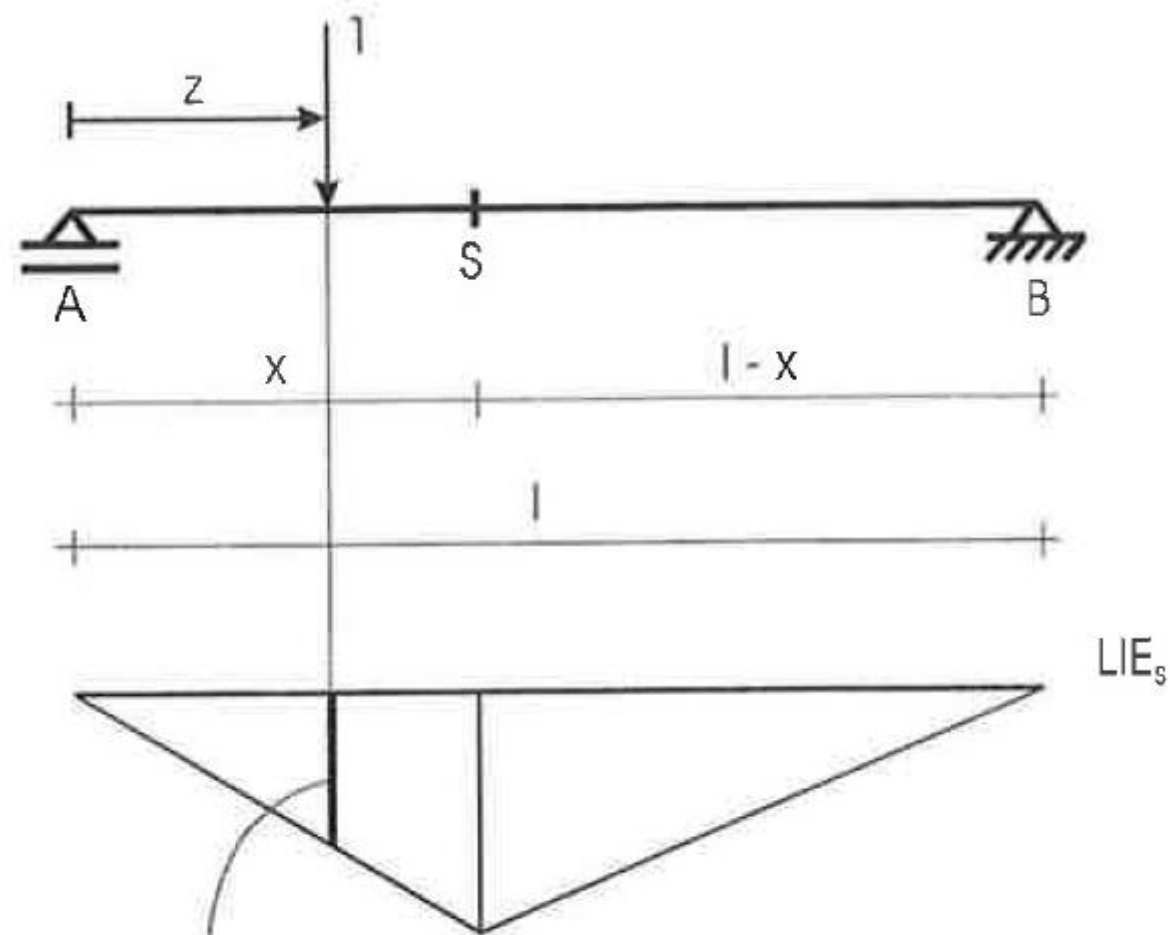
ENVIAR

Não tem cadastro no sistema? [Clique Aqui](#)

# Cargas móveis e linhas de influência

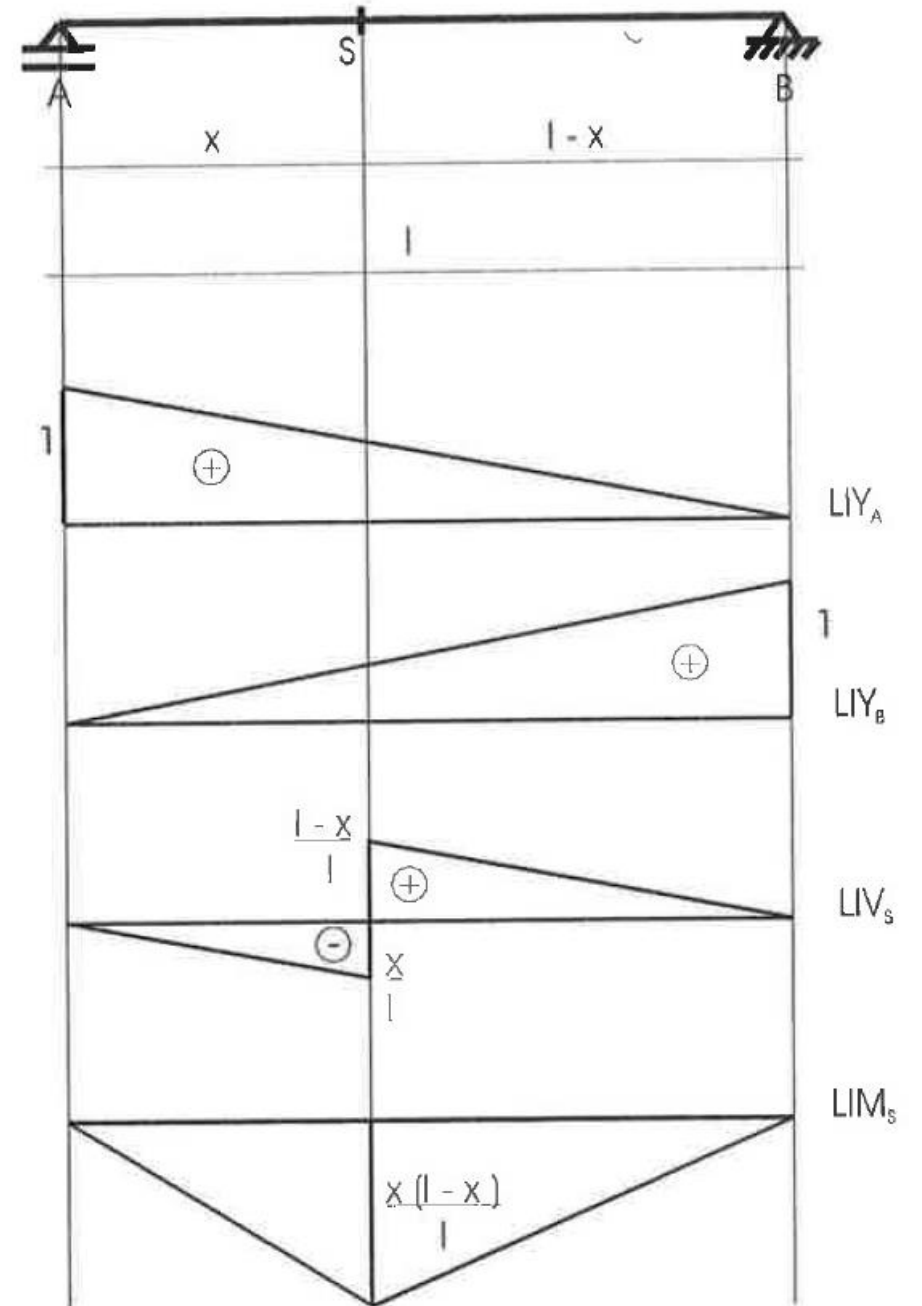
- A contrário de cargas fixas, as cargas móveis podem estar em qualquer posição sobre a ponte.
- À medida que as cargas se deslocam, os esforços solicitantes variam em todas as seções da estrutura.
  - **Pergunta:** Que esforços solicitantes devem ser utilizados para dimensionar as pontes?
  - **Resposta:** Os esforços máximos e mínimos aos quais cada seção estiver submetida.
- **Linhas de Influência** são gráficos que ajudam a definir as posições críticas do trem-tipo e das cargas distribuídas para cada seção transversal, para calcular os esforços solicitantes máximos e mínimos.

# Conceito de linha de influência



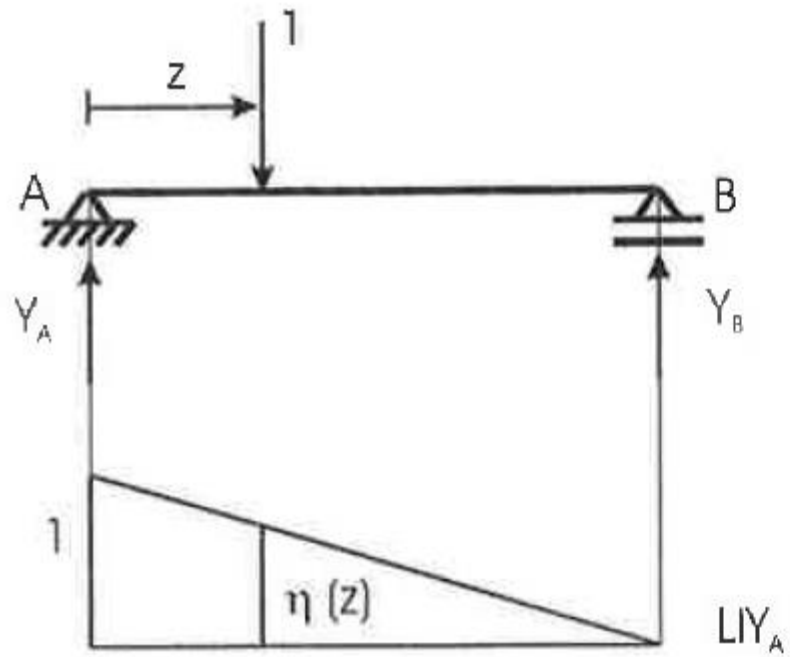
Esforço  $E_s$  em  $S$  produzido por uma carga unitária aplicada na seção de abscissa  $z$

# Linhas de influência de uma viga biapoiada

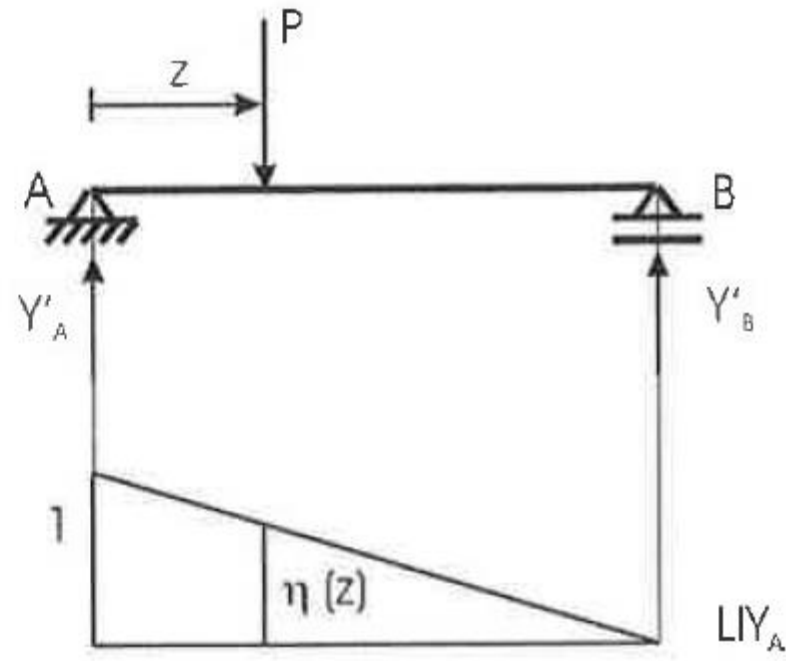


Obs: As linhas de influência são adimensionais

# Obtenção de esforços decorrentes de P



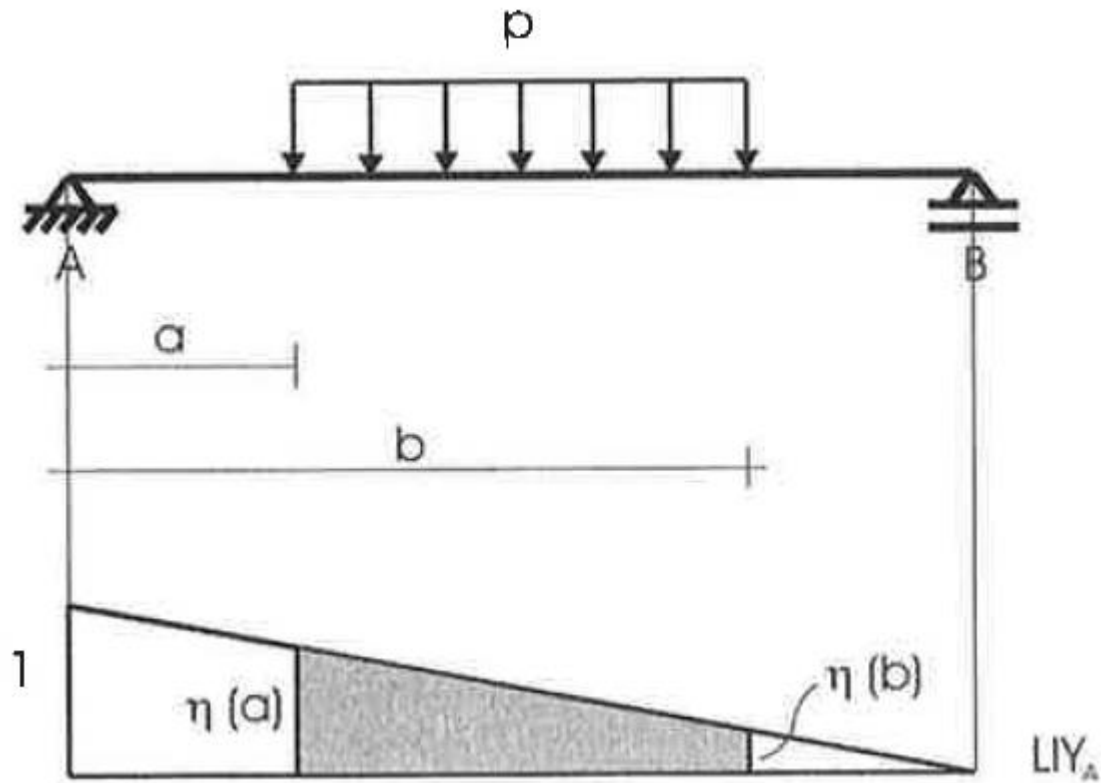
(a)



(b)

$$Y'_A = P \cdot \eta(z).$$

# Obtenção de esforços decorrentes de $p$

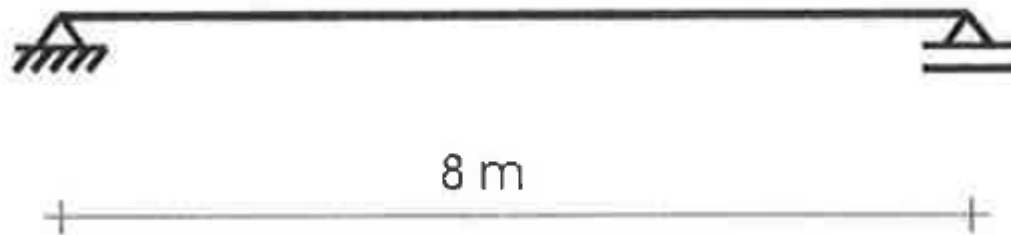


$$Y_A = \int_a^b p(z) \eta(z) dz = p \int_a^b \eta(z) dz = p A$$

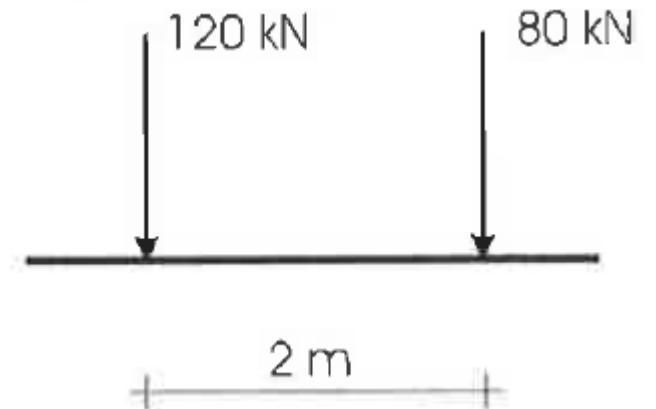
# Exemplo 1

Para a estrutura e carregamentos ilustrados, obtenha:

- As reações de apoio extremas
- Os esforços solicitantes extremos nas seções transversais a 0, 2, 4, 6 e 8 m do apoio da esquerda



- peso próprio:  $g = 20 \text{ kN/m}$
- carga de multidão:  $p = 10 \text{ kN/m}$
- veículo-tipo:

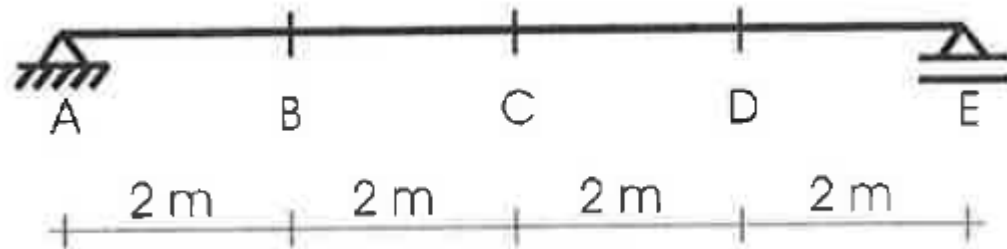


Obs: Por simplicidade, considerar multidão constante em toda a viga

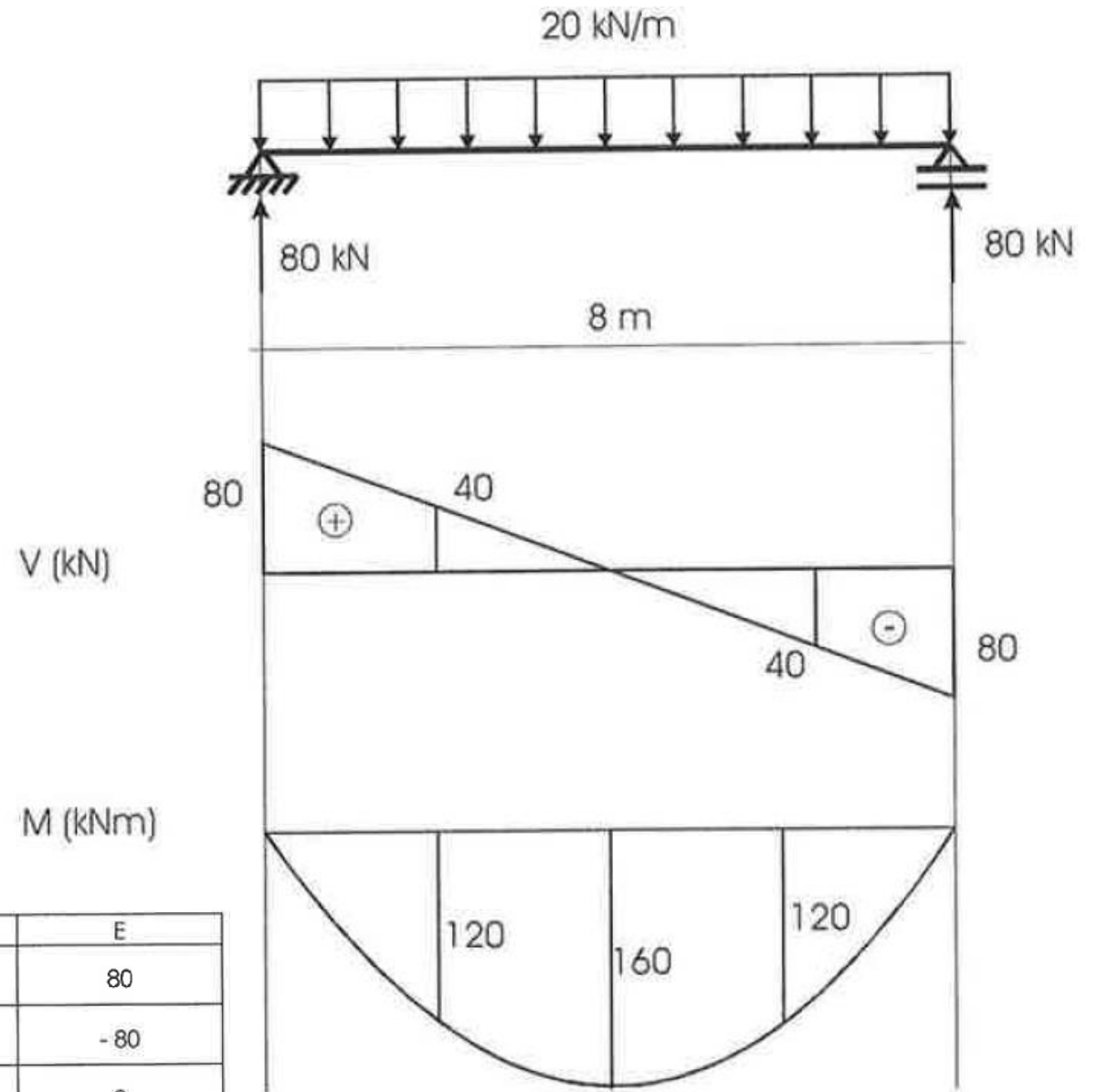


# Exemplo 1

- Esforços decorrentes do peso próprio:

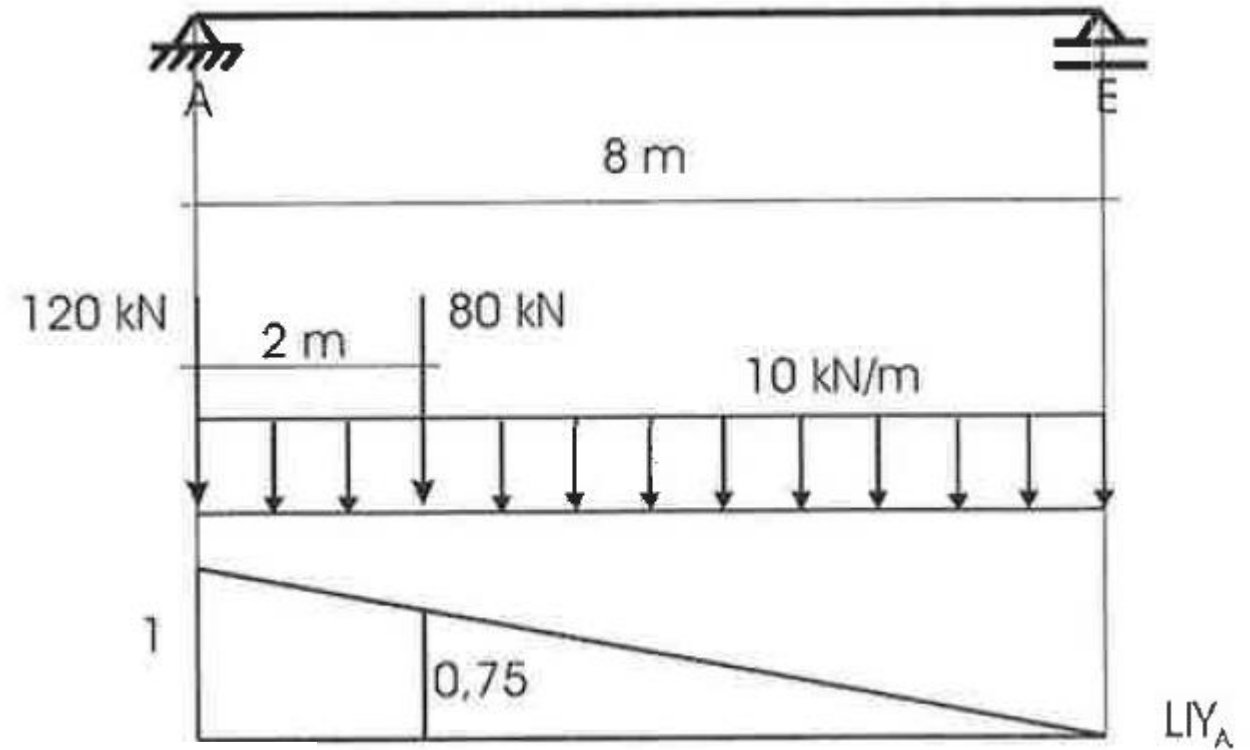


	A	B	C	D	E
Reação vertical (kN)	80	-	-	-	80
Força cortante (kN)	80	40	0	-40	-80
Momento fletor (kNm)	0	120	160	120	0



# Exemplo 1

- Reação em A



$$\text{mín } Y_{A, \text{cargas móveis}} = 0$$

$$\text{máx } Y_{A, \text{cargas móveis}} = 120 \cdot 1 + 80 \cdot 0,75 + 10 \cdot \frac{8 \cdot 1}{2} = 220 \text{ kN}$$

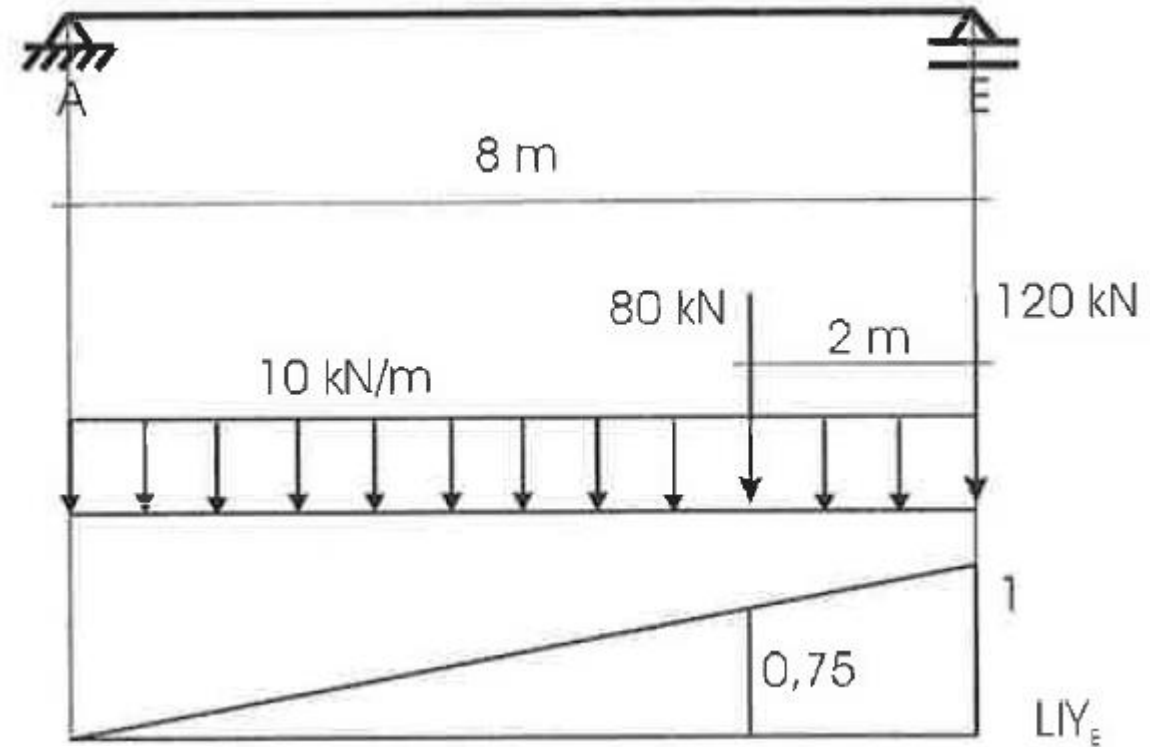
	Peso próprio	Cargas móveis		Extremos	
		máx	mín	máx	mín
$Y_A$	80	220	0	300	80

# Exemplo 1

- Reação em B

$$\min Y_{E, \text{cargas móveis}} = 0$$

$$\max Y_{E, \text{cargas móveis}} = 120 \cdot 1 + 80 \cdot 0,75 + 10 \cdot \frac{8 \cdot 1}{2} = 220 \text{ kN}$$



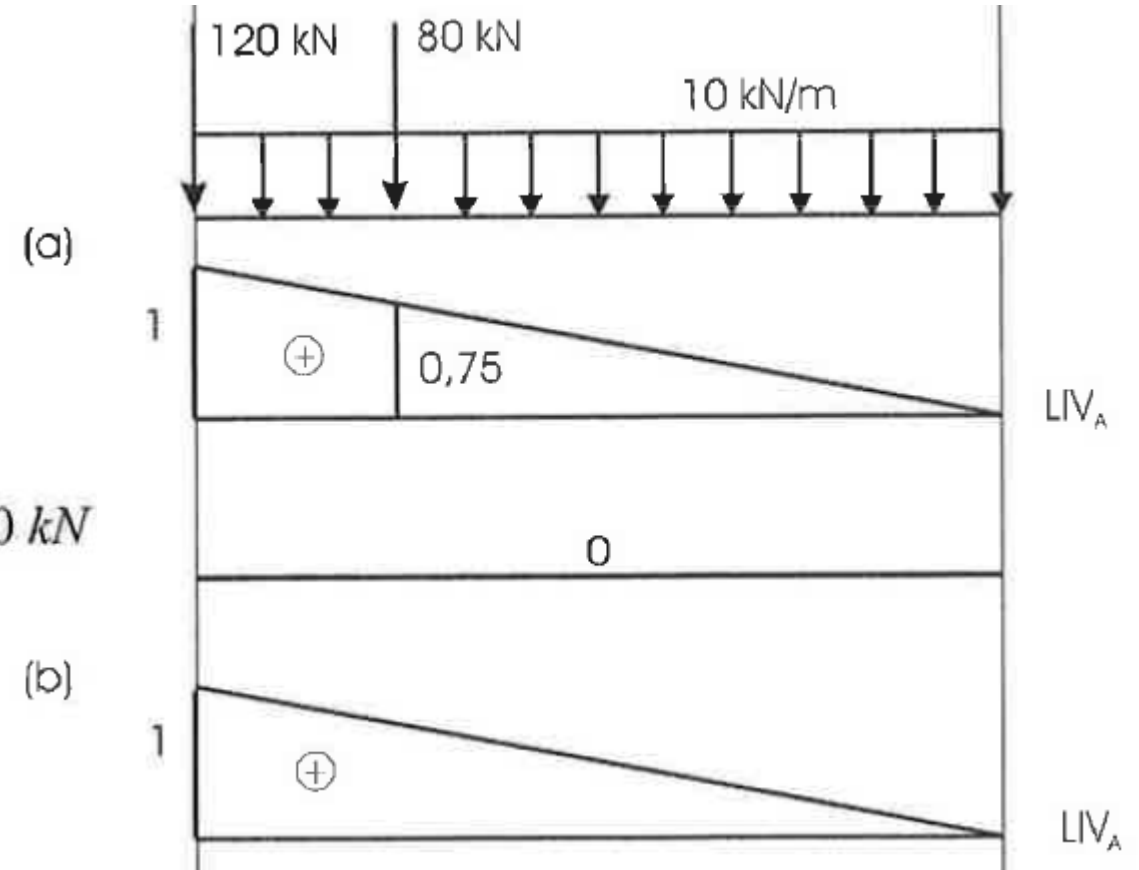
	Peso próprio	Cargas móveis		Extremos	
		máx	mín	máx	mín
Y <sub>E</sub>	80	220	0	300	80

# Exemplo 1

- Força cortante em A

$$\text{máx } V_{A, \text{cargas móveis}} = 120 \cdot 1 + 80 \cdot 0,75 + 10 \cdot \frac{8 \cdot 1}{2} = 220 \text{ kN}$$

$$\text{mín } V_{A, \text{cargas móveis}} = 0$$

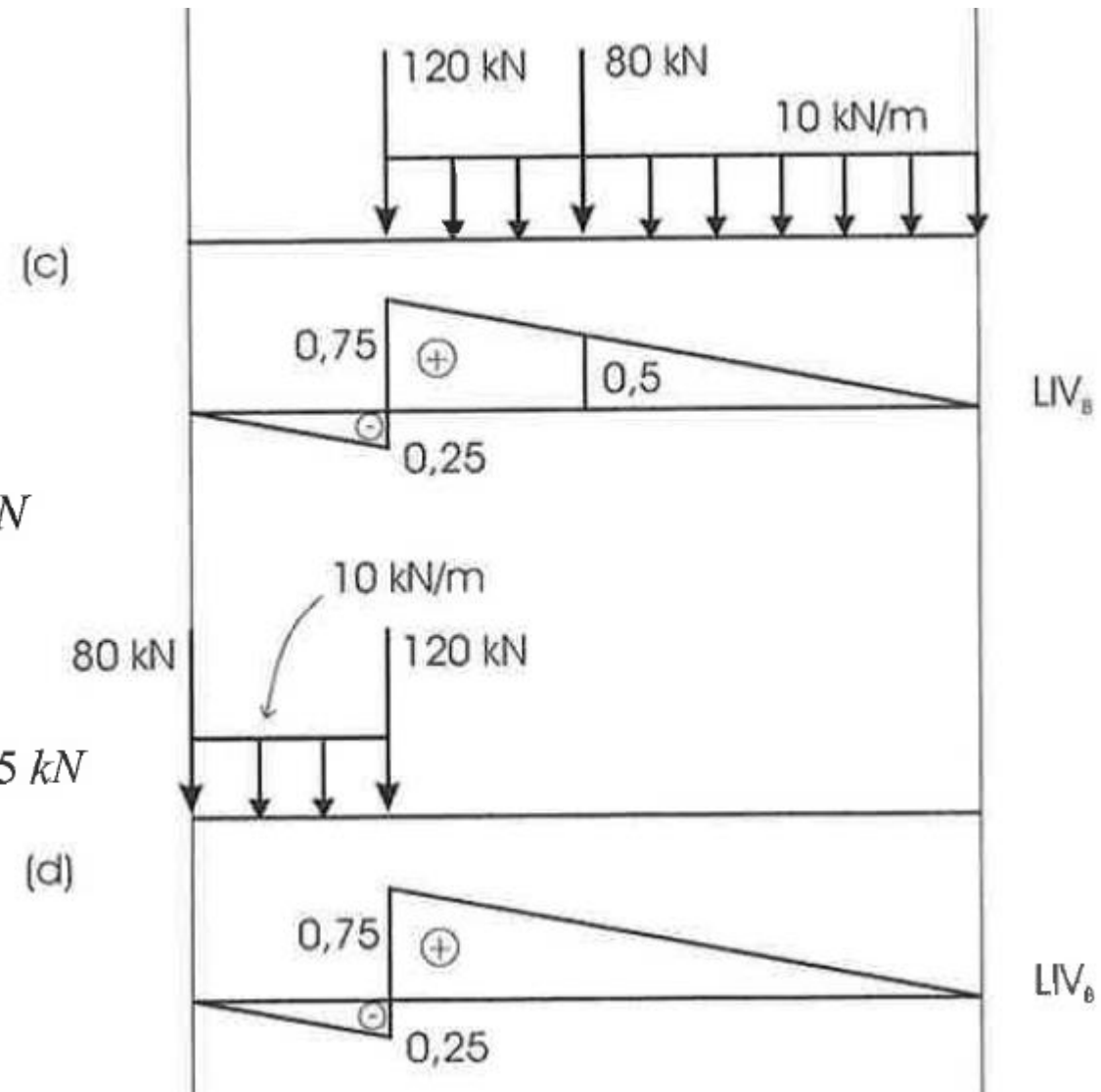


# Exemplo 1

- Força cortante em B

$$\text{máx } V_{B, \text{cargas móveis}} = 120 \cdot 0,75 + 80 \cdot 0,5 + 10 \cdot \frac{6 \cdot 0,75}{2} = 152,5 \text{ kN}$$

$$\text{mín } V_{B, \text{cargas móveis}} = 120 \cdot (-0,25) + 80 \cdot 0 + 10 \cdot \frac{2 \cdot (-0,25)}{2} = -32,5 \text{ kN}$$

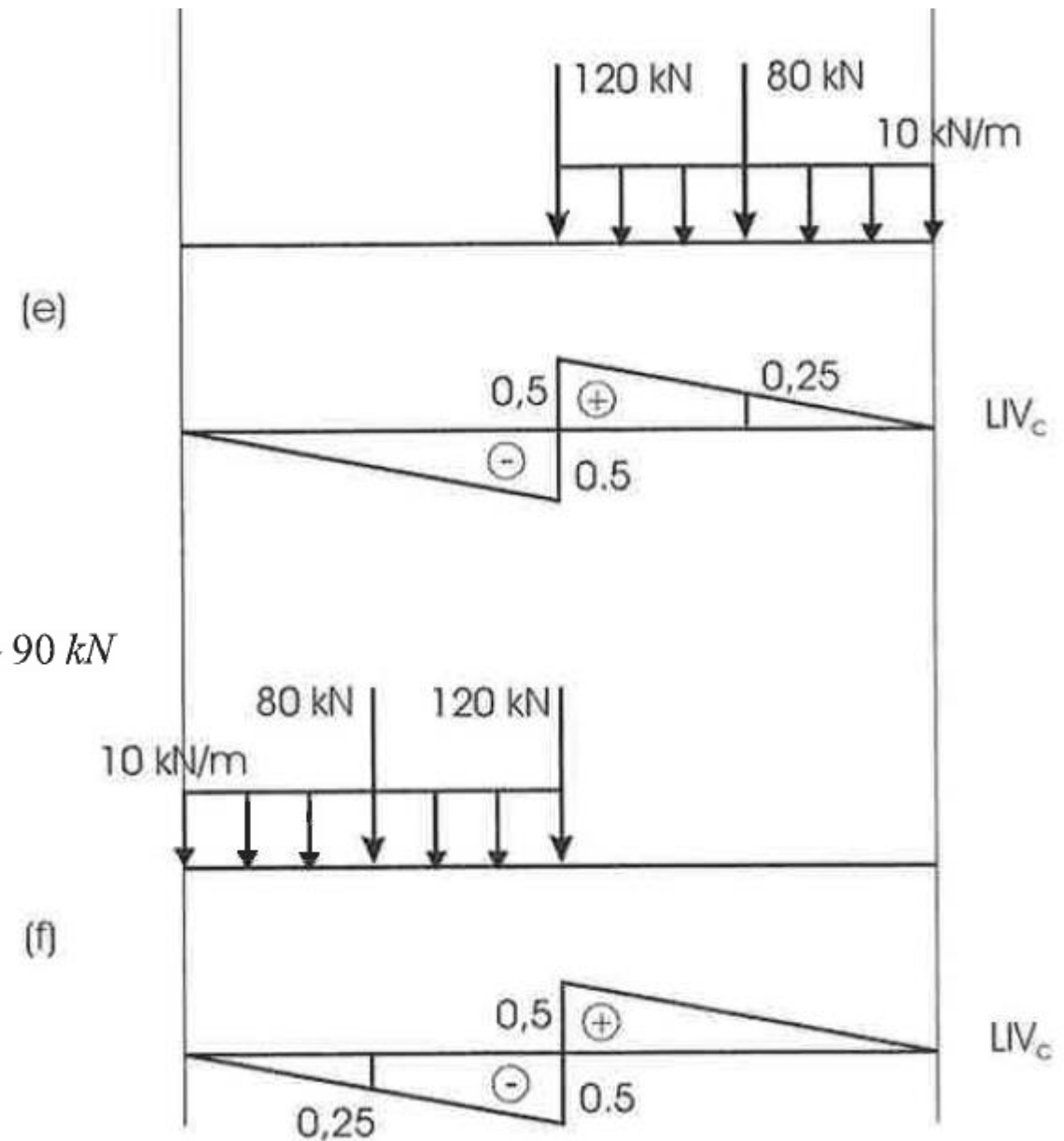


# Exemplo 1

- Força cortante em C

$$\text{máx } V_{C, \text{cargas móveis}} = 120 \cdot 0,5 + 80 \cdot 0,25 + 10 \cdot \frac{4 \cdot 0,5}{2} = 90 \text{ kN}$$

$$\text{mín } V_{C, \text{cargas móveis}} = 120 \cdot (-0,5) + 80 \cdot (-0,25) + 10 \cdot \frac{4 \cdot (-0,5)}{2} = -90 \text{ kN}$$



# Exemplo 1

$$\text{máx } V_{D, \text{cargas móveis}} = 32,5 \text{ kN}$$

- Força cortante em D e E, analogamente:

$$\text{mín } V_{D, \text{cargas móveis}} = -152,5 \text{ kN};$$

$$\text{máx } V_{E, \text{cargas móveis}} = 0 \text{ kN}$$

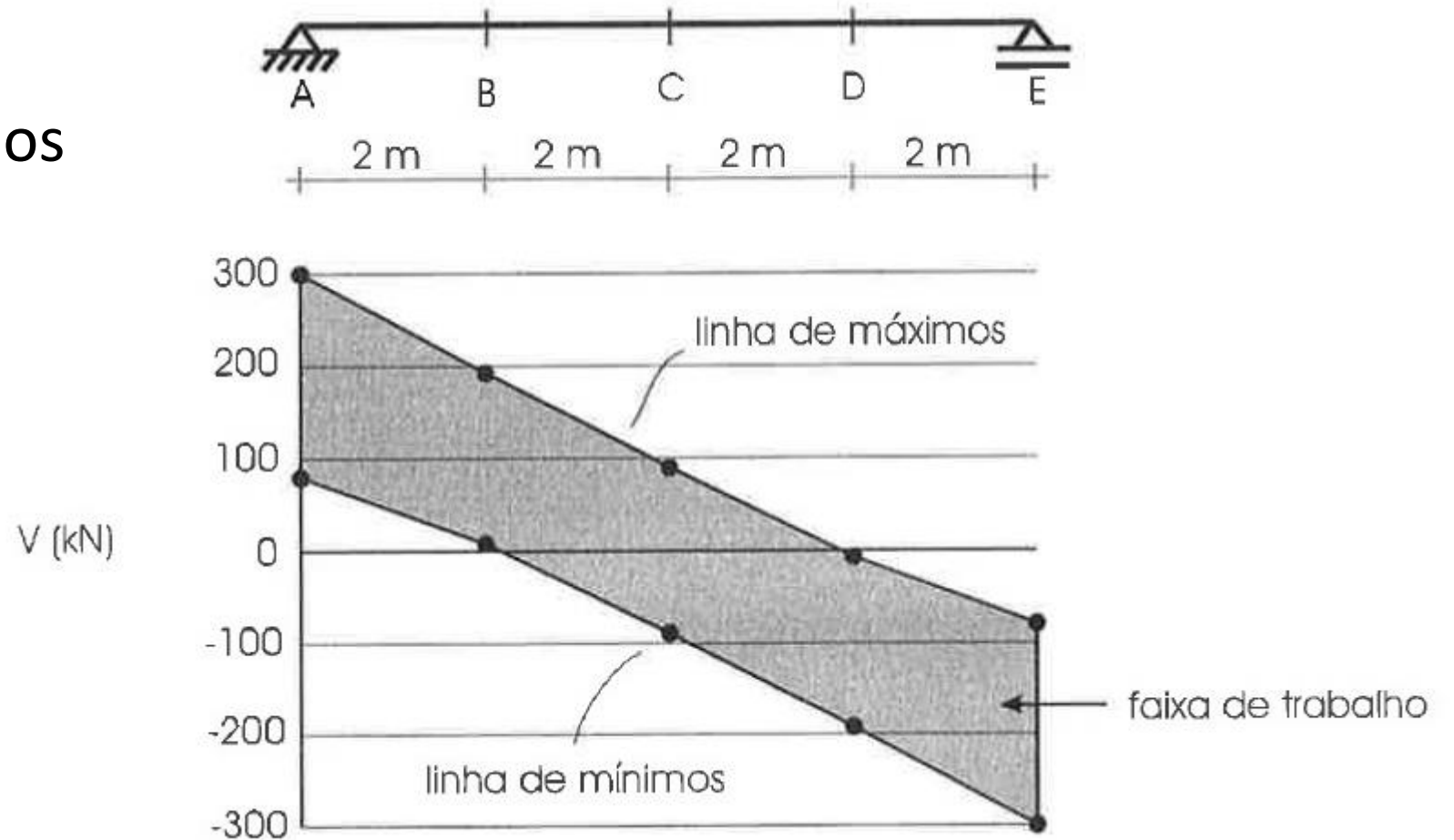
- Resulta:

$$\text{mín } V_{E, \text{cargas móveis}} = -220 \text{ kN}$$

Seção	Peso próprio	Cargas móveis		Extremos	
		máx	mín	máx	mín
A	80	220	0	300	80
B	40	152,5	- 32,5	192,5	7,5
C	0	90	- 90	90	-90
D	- 40	32,5	- 152,5	- 7,5	- 192,5
E	- 80	0	- 220	- 80	- 300

# Exemplo 1

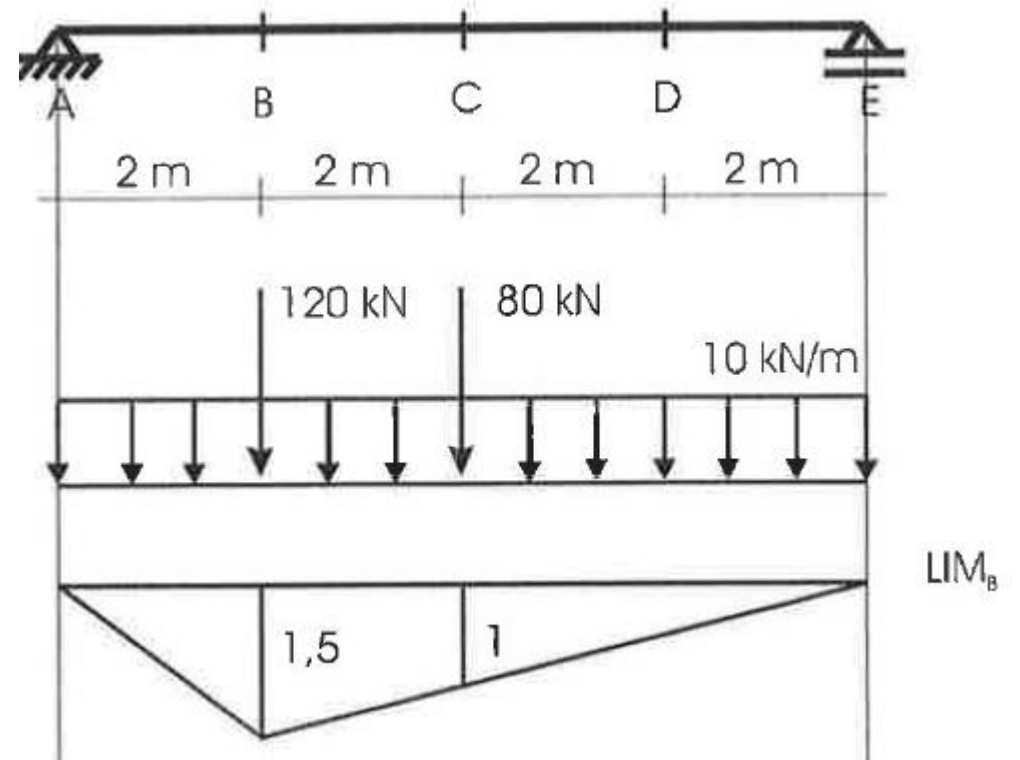
- Diagrama de máximos e mínimos





# Exemplo 1

- Momento fletor em B



$$\text{máx } M_{B, \text{cargas móveis}} = 120 \cdot 1,5 + 80 \cdot 1 + 10 \cdot \frac{8 \cdot 1,5}{2} = 320 \text{ kNm}$$

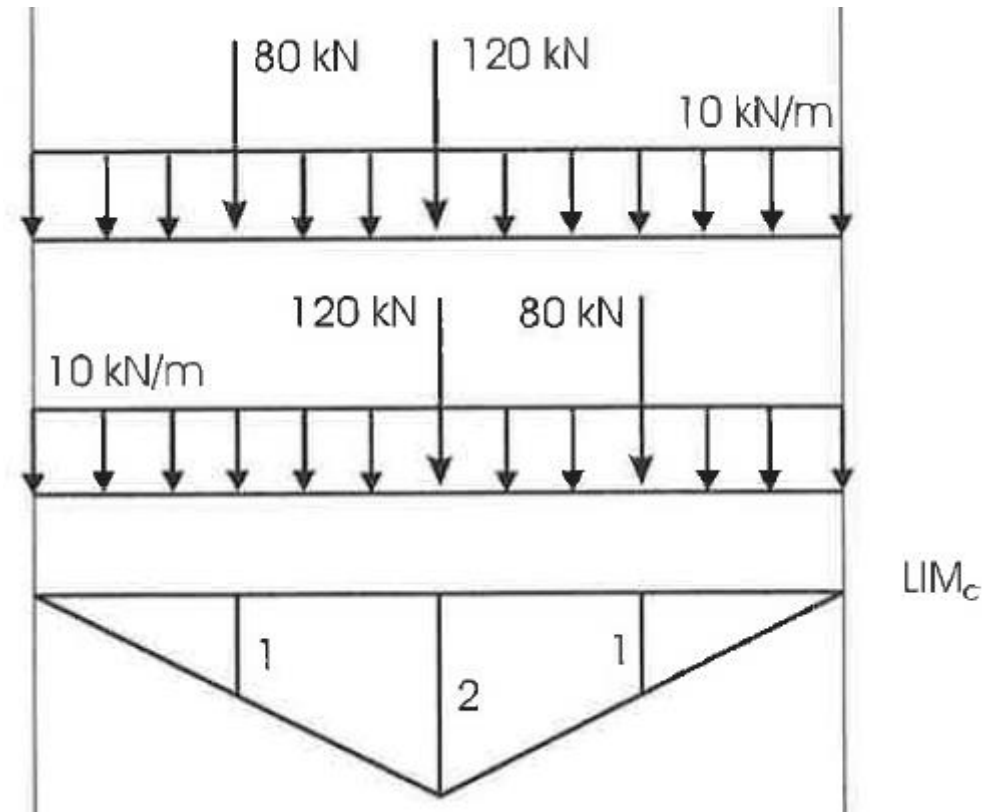
$$\text{mín } M_{B, \text{cargas móveis}} = 0$$

# Exemplo 1

- Momento fletor em C

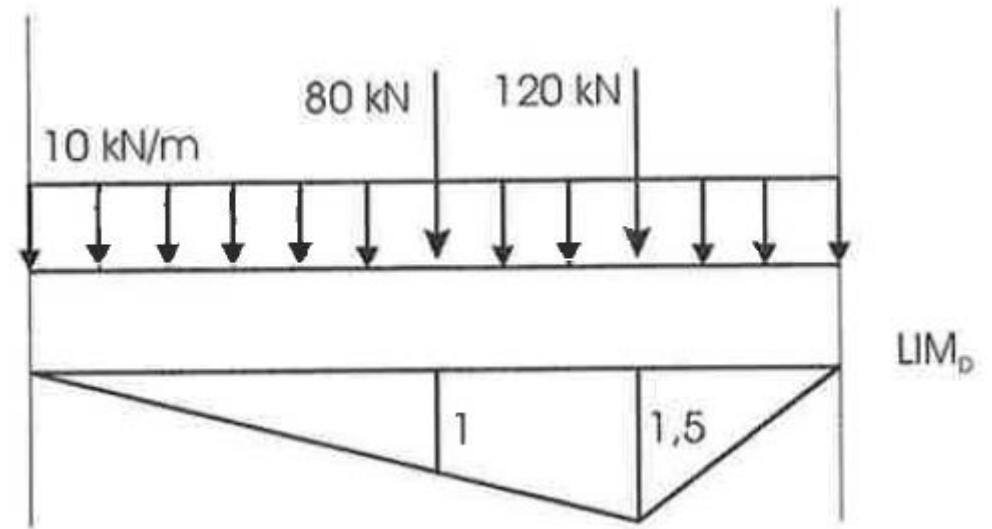
$$\text{máx } M_{C, \text{cargas móveis}} = 120 \cdot 2 + 80 \cdot 1 + 10 \cdot \frac{8 \cdot 2}{2} = 400 \text{ kNm}$$

$$\text{mín } M_{C, \text{cargas móveis}} = 0$$



# Exemplo 1

- Momento fletor em D: iguais aos momentos em B, por simetria da viga

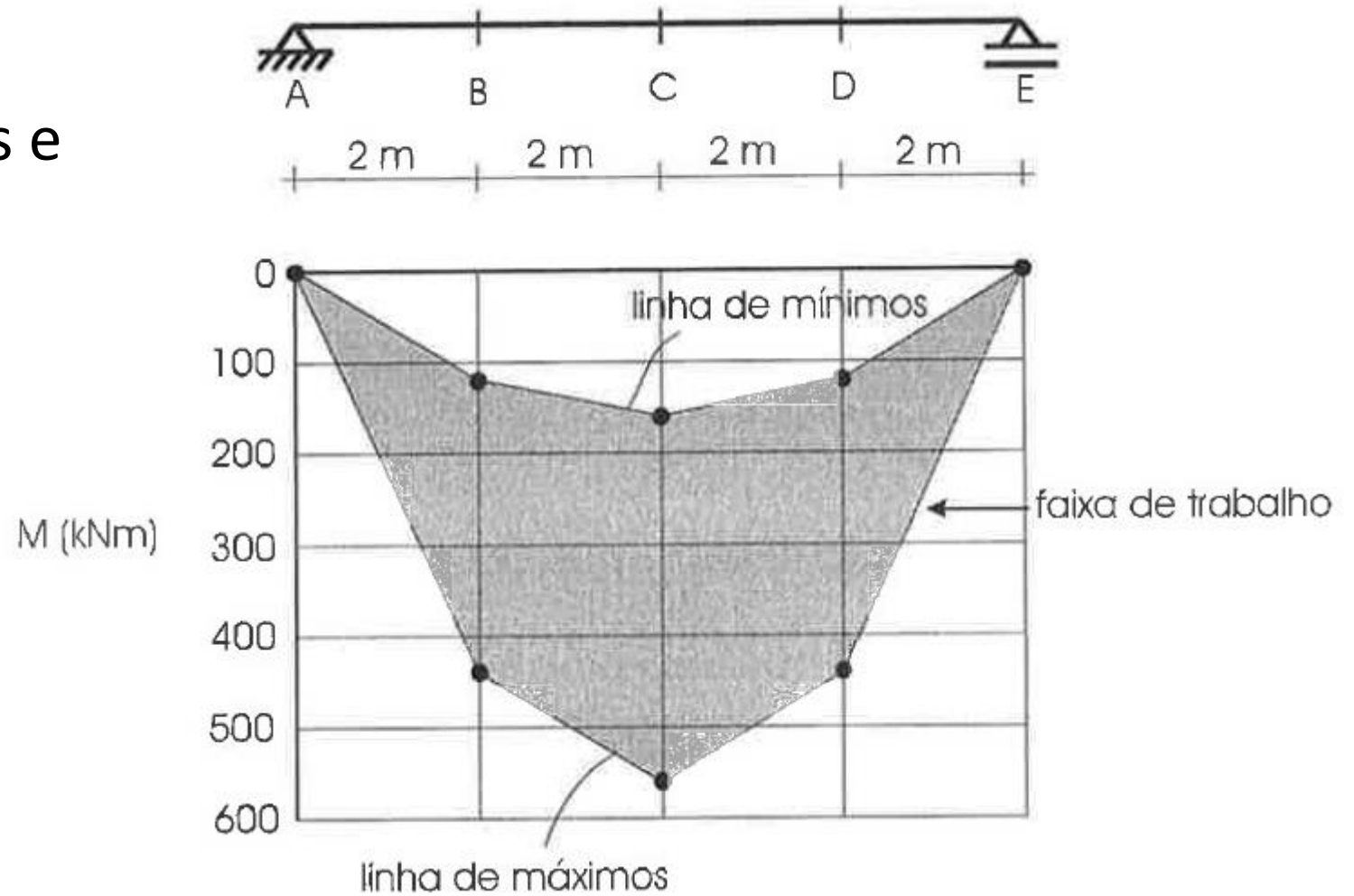


- Resulta:

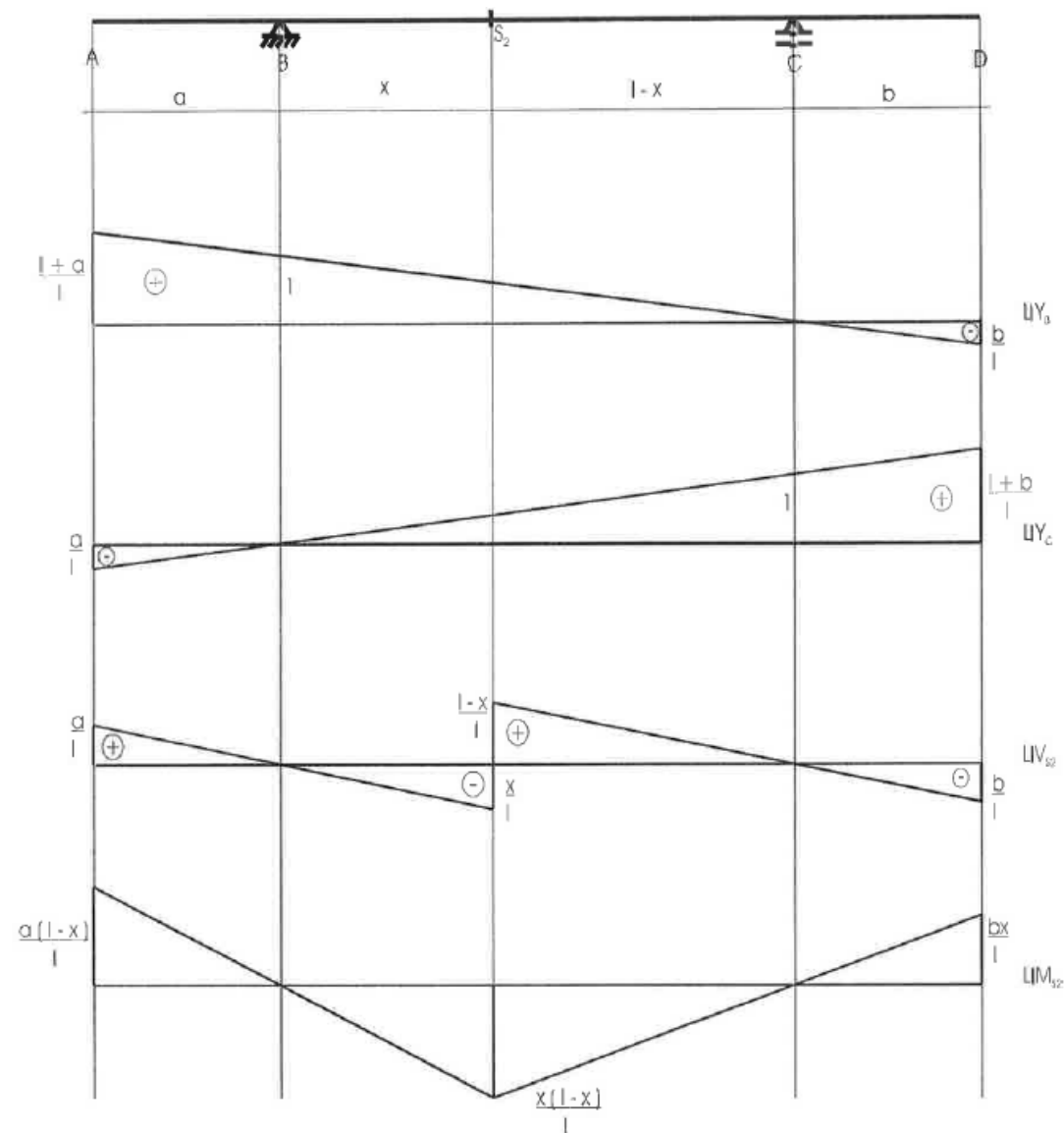
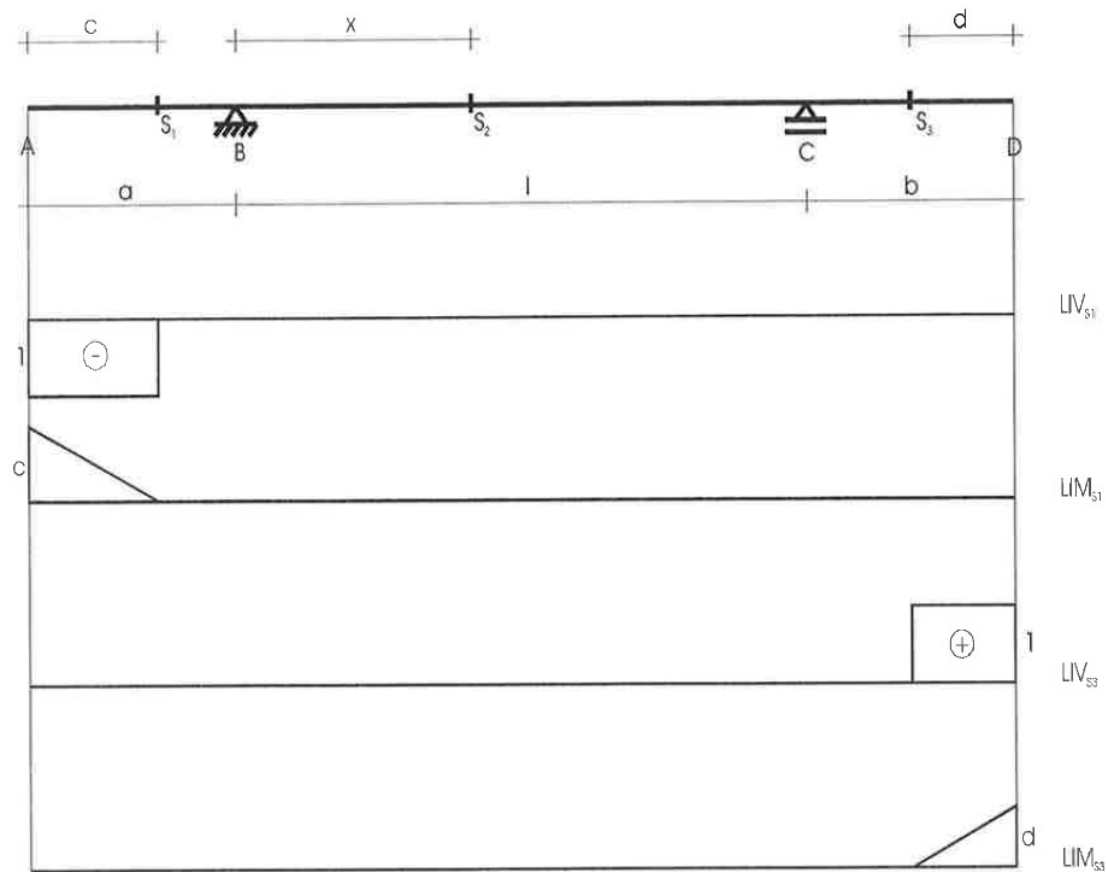
Seção	Peso próprio	Cargas móveis		Extremos	
		máx	mín	máx	mín
A	0	0	0	0	0
B	120	320	0	440	120
C	160	400	0	560	160
D	120	320	0	440	120
E	0	0	0	0	0

# Exemplo 1

- Diagrama de máximos e mínimos:



# Linhas de influência de viga com balanços



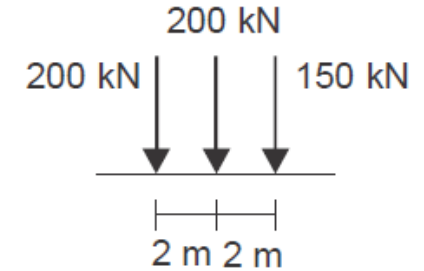
# Exemplo 2

Carregamento:

Peso próprio:  $g = 30 \text{ kN/m}$

Carga de multidão:  $p = 20 \text{ kN/m}$

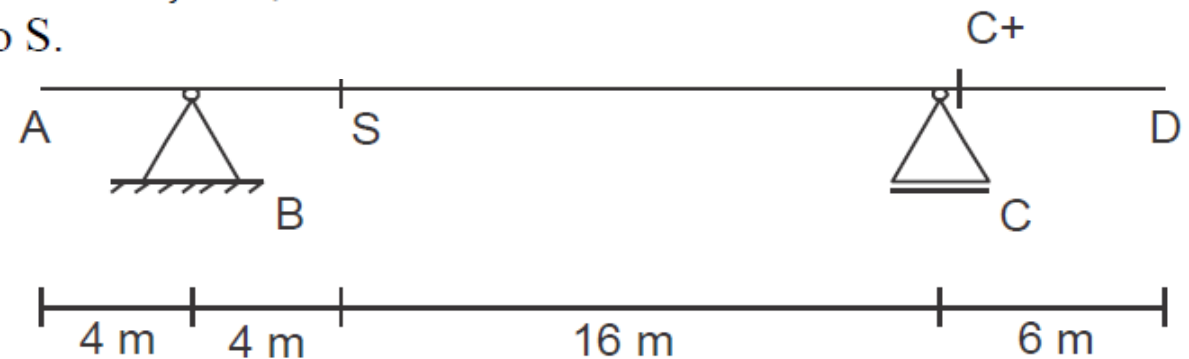
Veículo tipo:



## • Q1 P2 2011

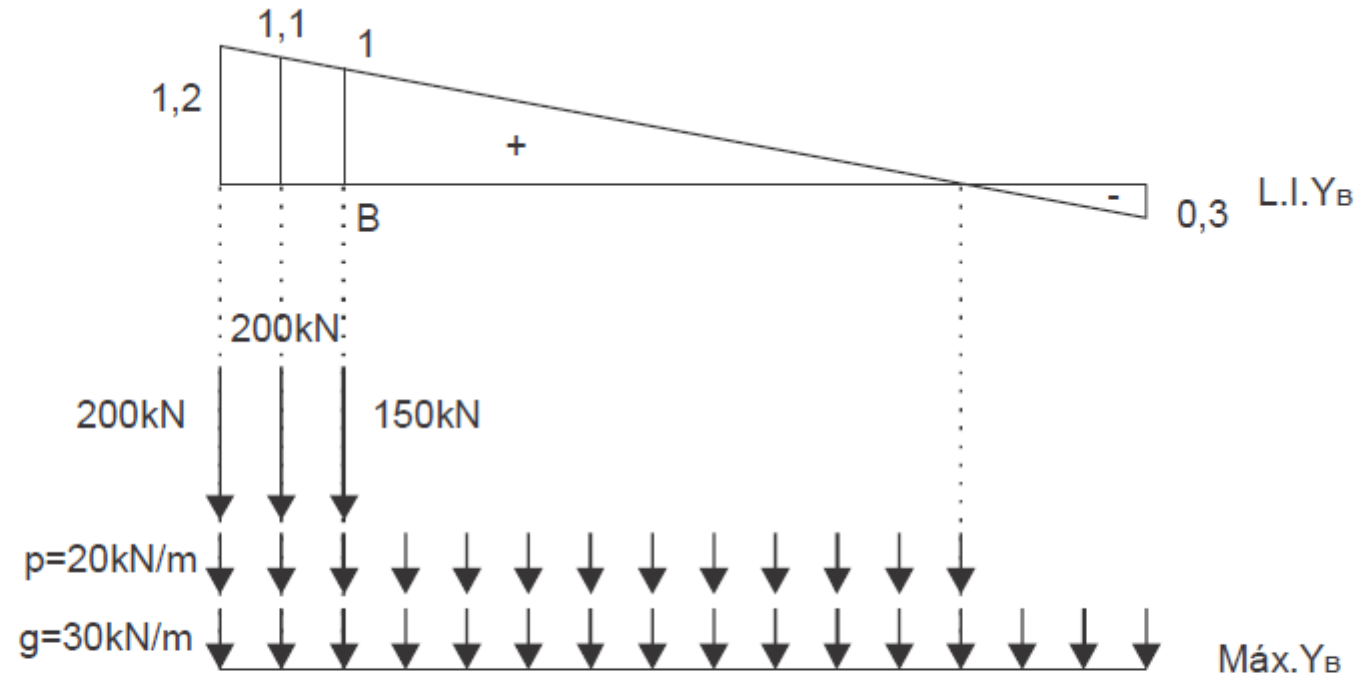
Para a viga simplesmente apoiada com dois balanços da figura, submetida ao carregamento indicado abaixo, pede-se:

- Traçar a linha de influência da reação vertical do apoio B;
- O valor da máxima reação vertical do apoio B;
- Traçar a linha de influência da força cortante na seção  $C^+$ , situada imediatamente à direita de C;
- O valor da máxima força cortante em  $C^+$ ;
- O valor da mínima força cortante em  $C^+$ ;
- Traçar a linha de influência do momento fletor na seção S;
- O valor do máximo momento fletor na seção S.



# Exemplo 2

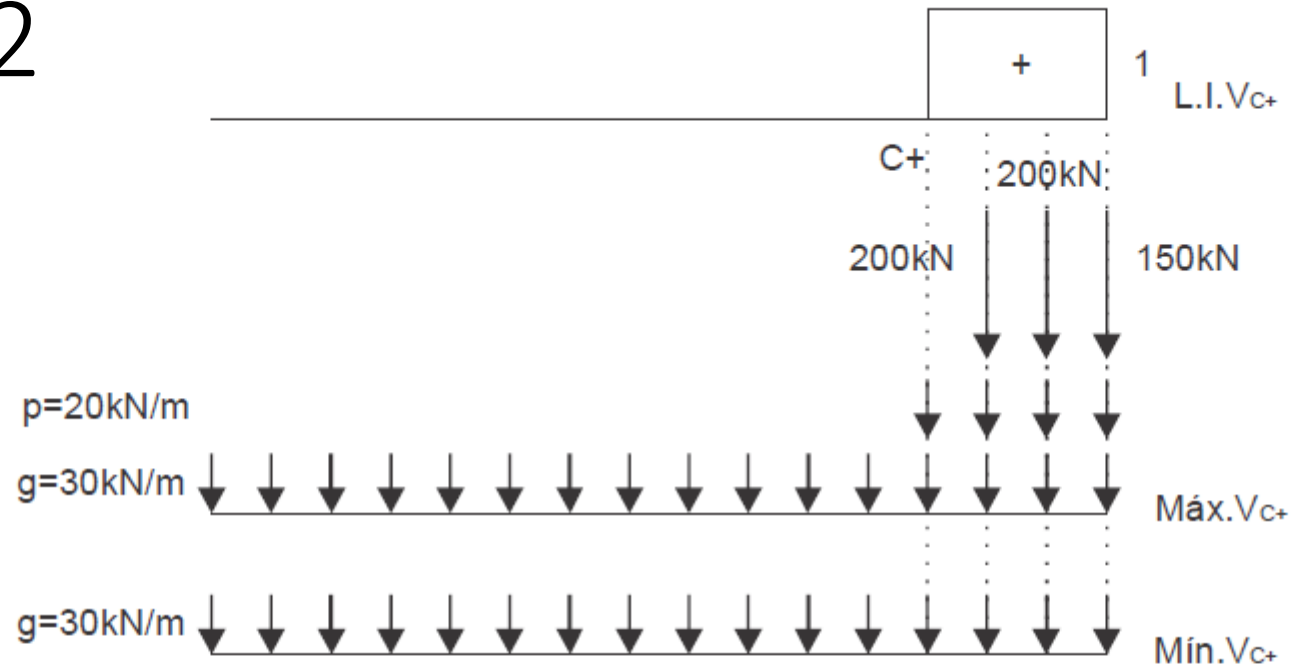
a), b)



$$\text{Máx. } Y_B = 200 \cdot 1,2 + 200 \cdot 1,1 + 150 \cdot 1 + \frac{20 \cdot 1,2 \cdot 2,4}{2} + \frac{30 \cdot 1,2 \cdot 2,4}{2} - \frac{30 \cdot 0,3 \cdot 6}{2} = 1303 \text{ kN}$$

# Exemplo 2

c), d), e)



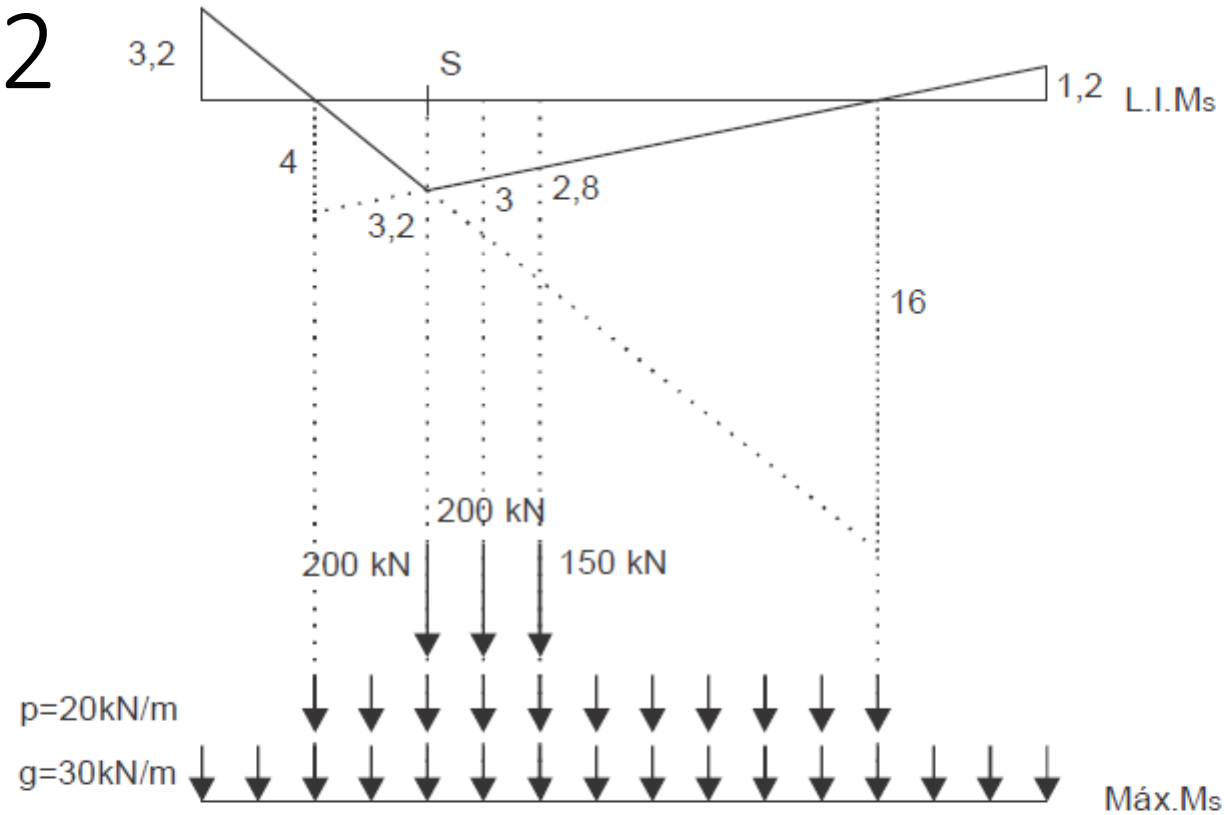
$$Máx. V_{C+} = 30 \cdot 6.1 + 20 \cdot 6.1 + 200 \cdot 1 + 200 \cdot 1 + 150 \cdot 1 = 850 \text{ kN}$$

$$Mín. V_{C+} = 30 \cdot 6.1 = 180 \text{ kN}$$



# Exemplo 2

f), g)



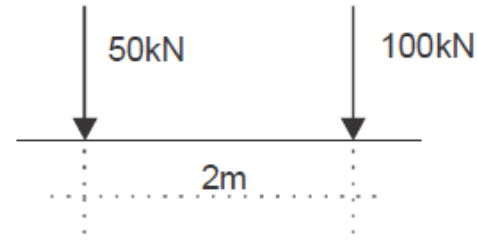
$$\text{Máx. } M_S = \frac{30 \cdot 20 \cdot 3,2}{2} - \frac{30 \cdot 3,2 \cdot 2,4}{2} - \frac{30 \cdot 1,2 \cdot 2,6}{2} + \frac{20 \cdot 20 \cdot 3,2}{2} + 200 \cdot 3,2 + 200 \cdot 3 + 150 \cdot 2,8 = 2960 \text{ kN}$$

# Exemplo 3

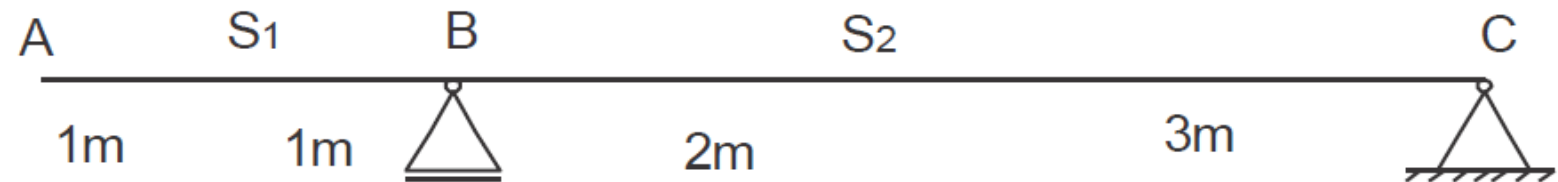
- Q2 P2 2010

A viga ABC simplesmente apoiada com balanço (figura) é solicitada pelo seguinte carregamento:

- Carga permanente:  $g = 20\text{kN/m}$
- Cargas móveis:  
Multidão:  $p = 10\text{kN/m}$   
Veículo tipo:

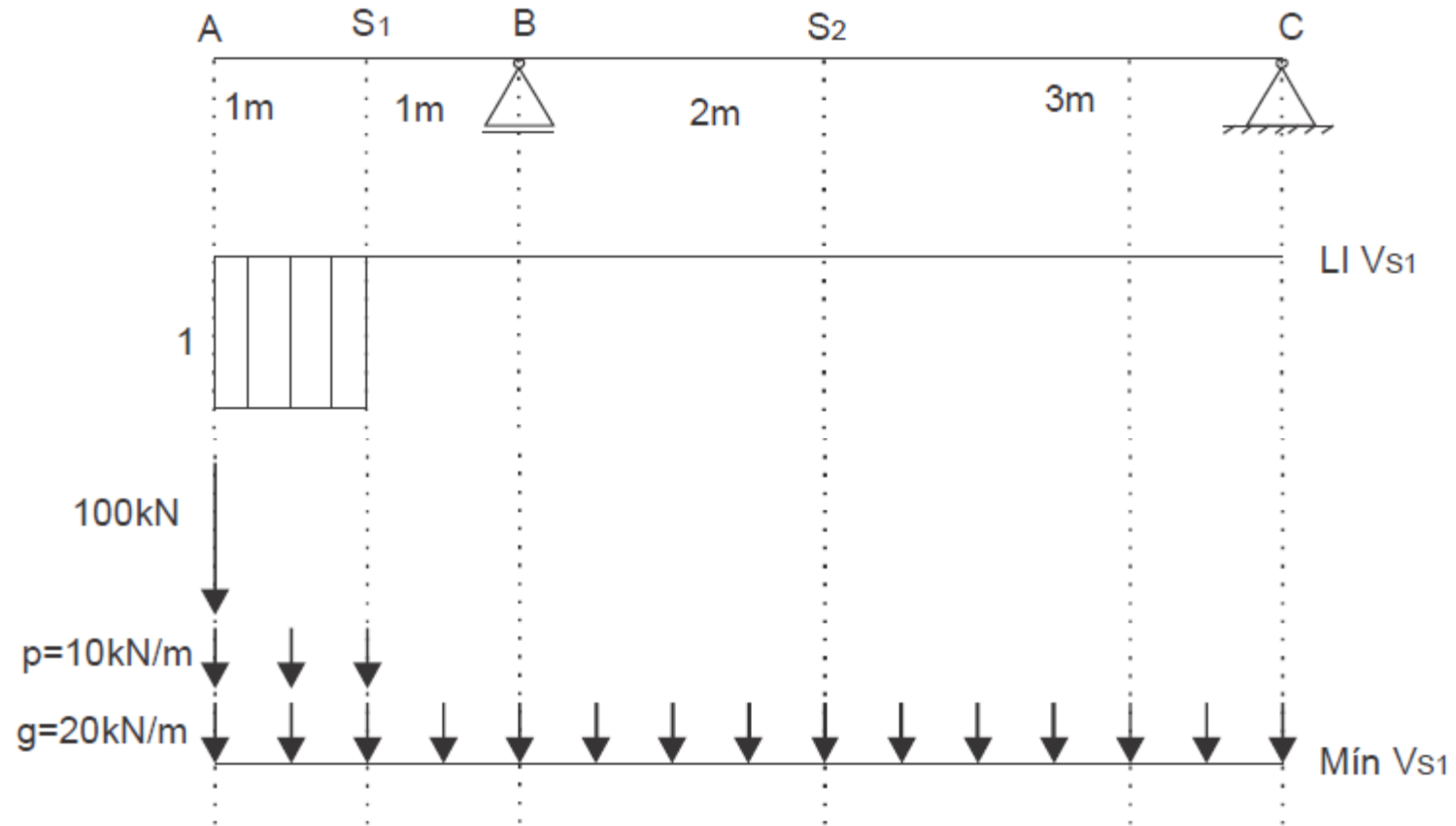


- Desenhar a linha de influência da força cortante na seção  $S_1$  (a 1 m do apoio B) e determinar o mínimo valor dessa força cortante.
- Desenhar a linha de influência do momento fletor na seção  $S_2$  (a 2m do apoio B) e determinar o máximo valor em módulo desse momento fletor.



# Exemplo 3

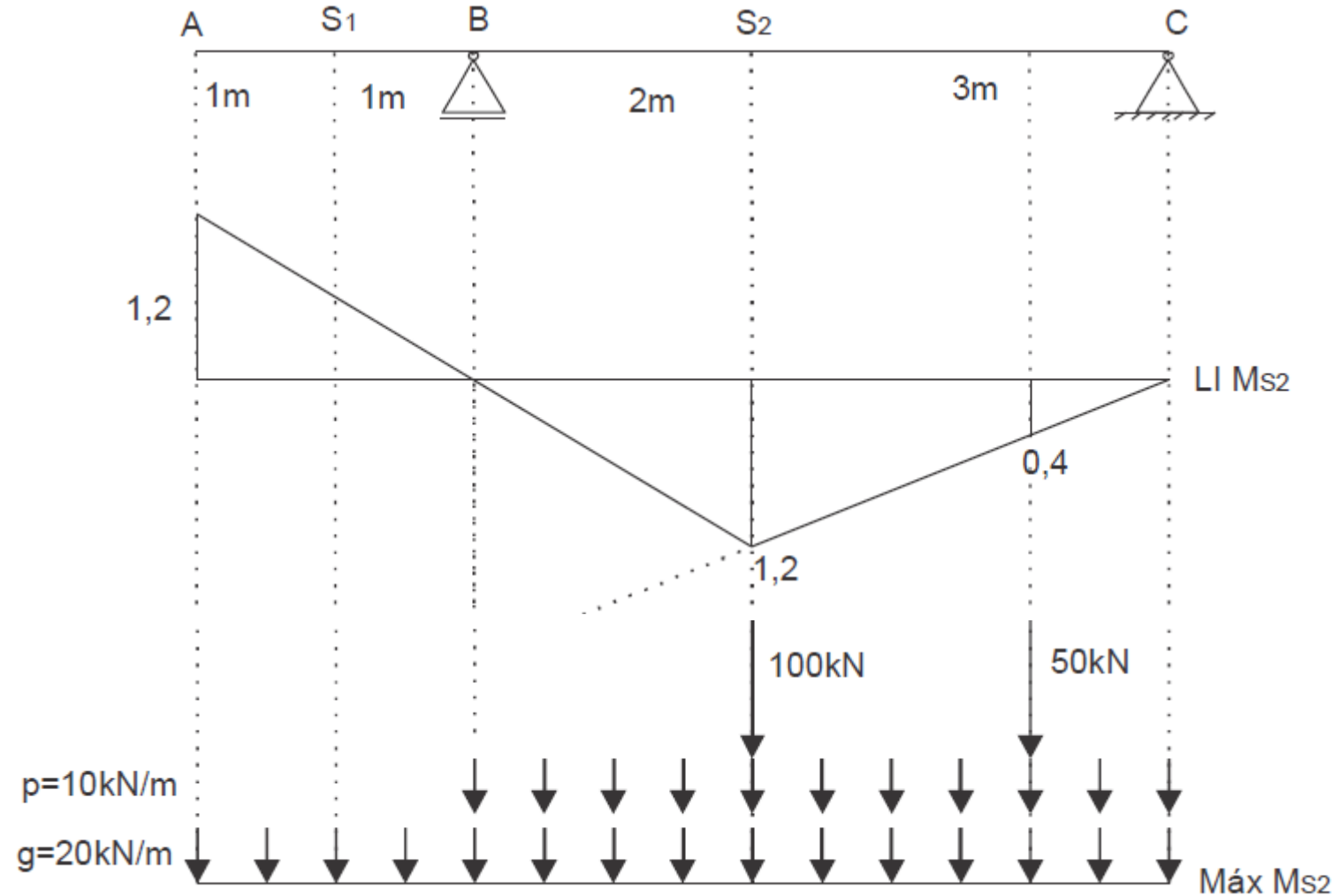
a)



$$\text{Mín } V_{S_1} = -20 \cdot 1.1 - 10 \cdot 1.1 - 100 \cdot 1 = -130 \text{ kN}$$

# Exemplo 3

b)



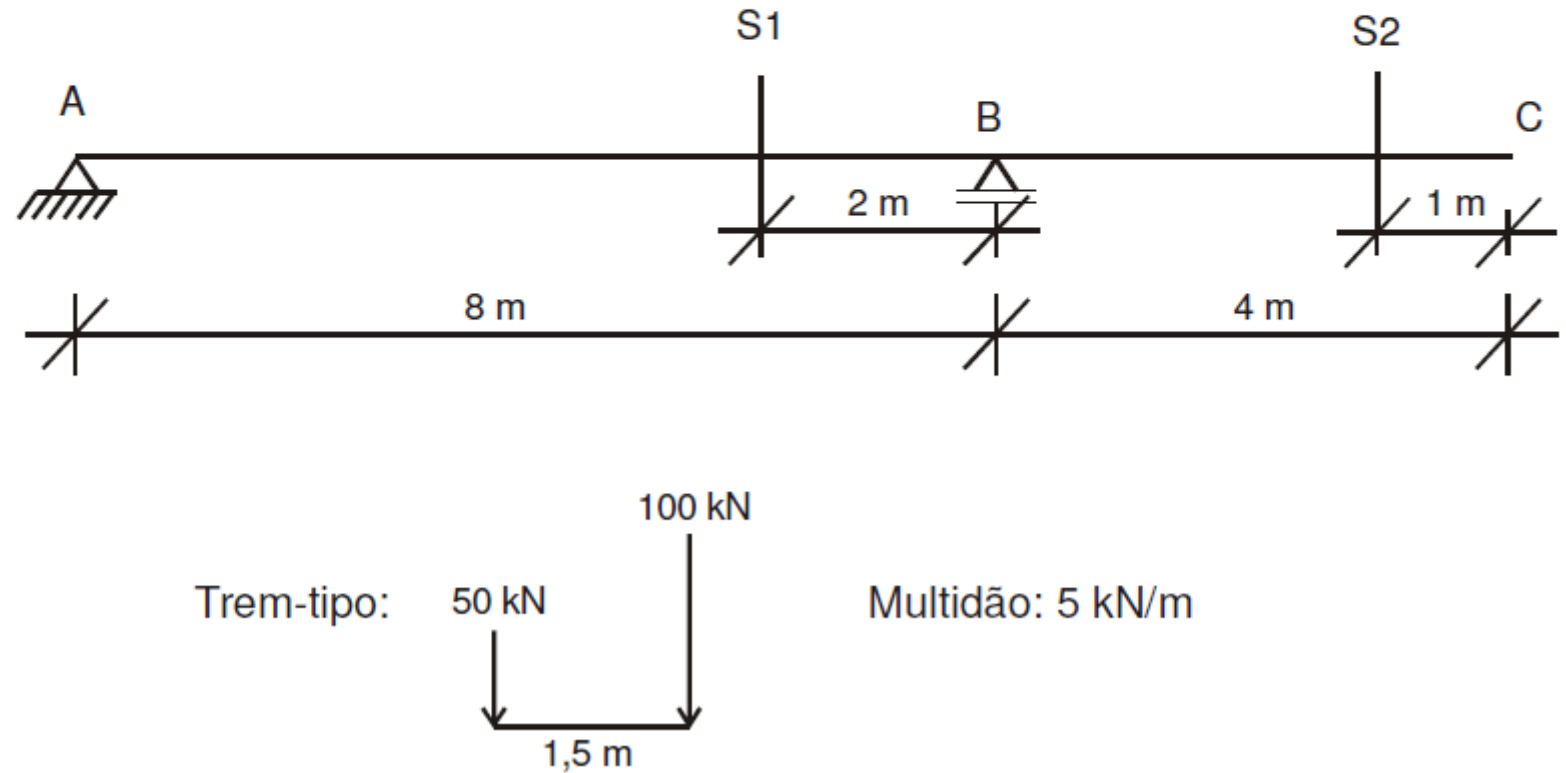
$$\text{Máx } M_{S_2} = 20 \cdot \left( -\frac{2 \cdot 1,2}{2} + \frac{5 \cdot 1,2}{2} \right) + 10 \cdot \left( \frac{5 \cdot 1,2}{2} \right) + 100 \cdot 1,2 + 50 \cdot 0,4 = 206 \text{ kN.m}$$

# Exemplo 4

• Q2 PREC 2009

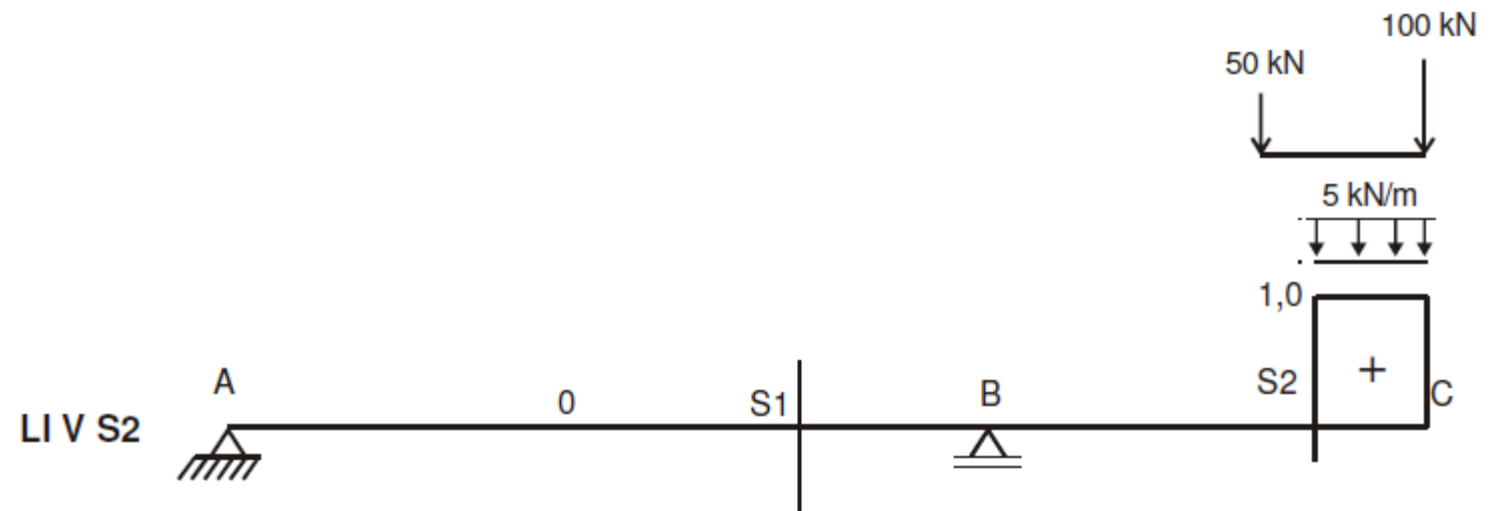
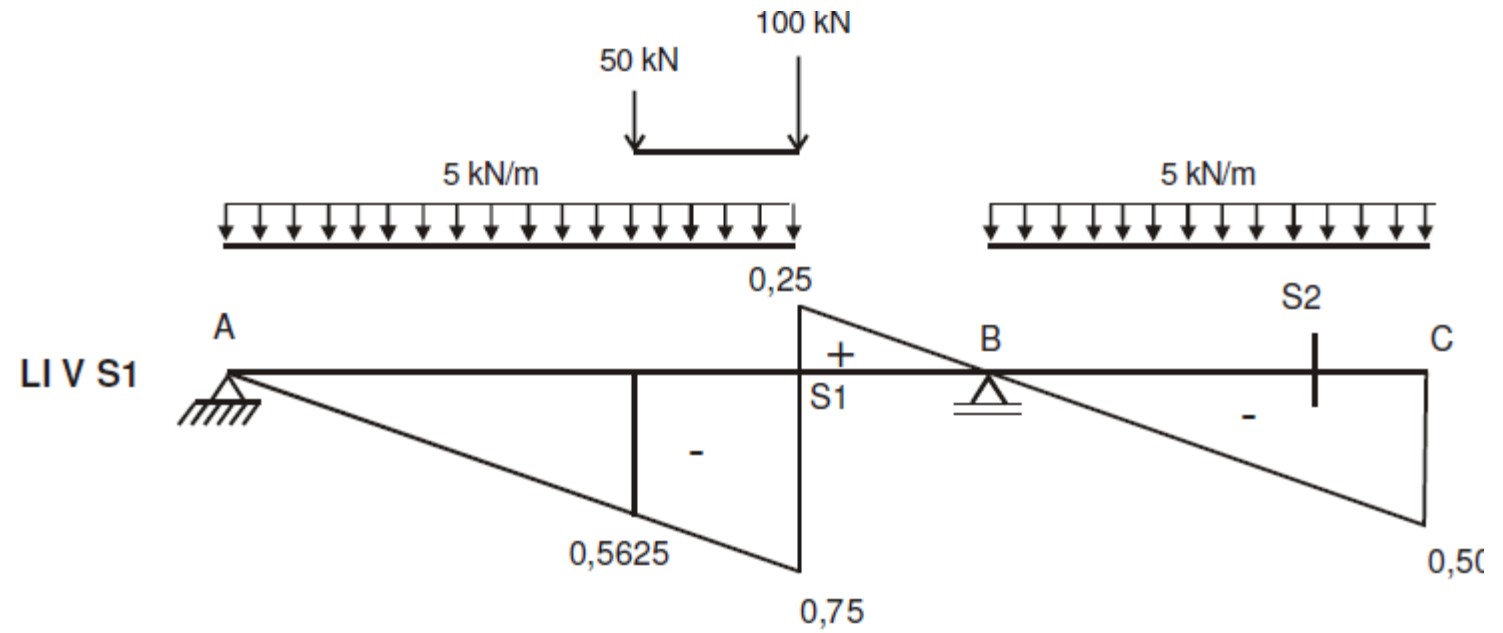
Para a estrutura e as cargas da figura, pede-se:

1. As linhas de influência LIV S1, LIM S1, LIV S2, LIM S2.
2. As posições do trem-tipo e da multidão para  $V_{\min} S1$ ,  $V_{\max} S2$ ,  $M_{\max} S1$  e  $M_{\min} S2$ .
3. Os valores de  $M_{\max} S1$  e  $V_{\max} S2$ .



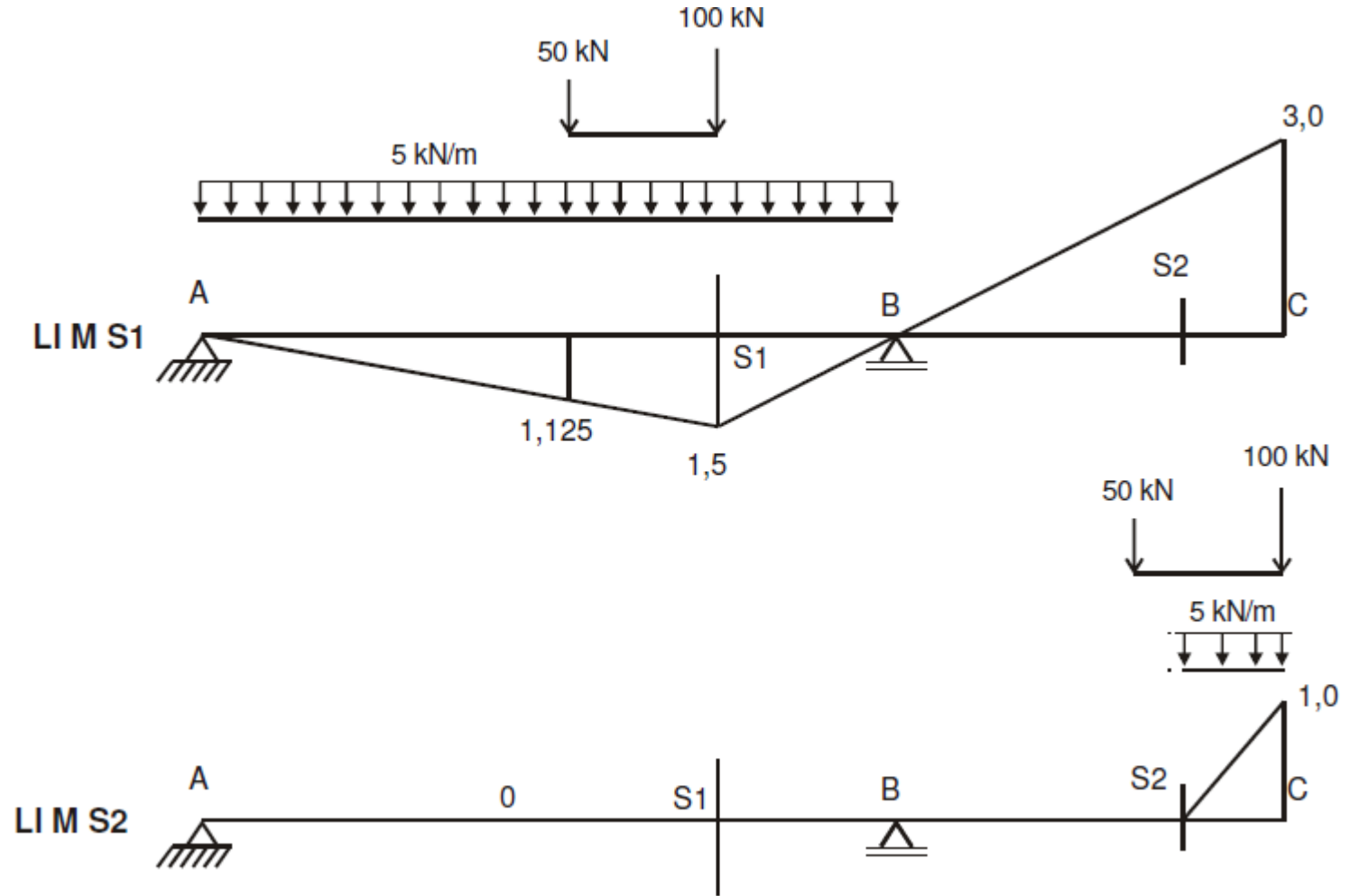
# Exemplo 4

1, 2



# Exemplo 4

1, 2, 3



$$M_{\max} S1 = 236,25 \text{ kN.m}$$

$$V_{\max} S2 = 105 \text{ kN}$$