



EESC • USP

*Escola de Engenharia de São Carlos
Universidade de São Paulo*



SEP0506 – Sistemas de Apoio à Decisão

Fuzzy TOPSIS

Prof. Luiz C. R. Carpinetti



Except where otherwise noted, this work is licensed under
<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/>

Fuzzy TOPSIS

- Chen (2000) propôs a primeira combinação entre TOPSIS e a teoria dos conjuntos *fuzzy*.
 - CHEN, C. T. Extensions of the TOPSIS for group decision-making under fuzzy environment. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 114, p. 1–9, 2000.
 - CHEN, C.; LIN, C.; HUANG, S. A fuzzy approach for supplier evaluation and selection. **International Journal of Production Economics**, v.102, p. 289–301, 2006.

Fuzzy TOPSIS

- No método *Fuzzy-TOPSIS*, as pontuações das alternativas e o peso dos critérios são avaliados usando termos linguísticos e representados matematicamente por números fuzzy triangulares.

Passos do método

1. Montar uma matriz de decisão *fuzzy* \tilde{D} para as pontuações das alternativas e um vetor *fuzzy* \tilde{W} para o peso dos critérios de acordo com as equações:

$$\tilde{D} = \begin{matrix} & \begin{matrix} C_1 & C_2 & \dots & C_j & \dots & C_m \end{matrix} \\ \begin{matrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} \tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{12} & \dots & \tilde{x}_{1j} & \dots & \tilde{x}_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \tilde{x}_{i1} & \tilde{x}_{i2} & \dots & \tilde{x}_{ij} & \dots & \tilde{x}_{im} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \tilde{x}_{n1} & \tilde{x}_{n2} & \dots & \tilde{x}_{nj} & \dots & \tilde{x}_{nm} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\tilde{W} = [\tilde{w}_1 \quad \tilde{w}_2 \quad \dots \quad \tilde{w}_m]$$

Fuzzy TOPSIS - Exemplo

Gestão de fornecedores (mesmo exemplo da aula sobre TOPSIS):

- Objetivo: identificar os melhores fornecedores de 1 item considerando os seguintes critérios:
 - C_1 : Capacitação em gestão da qualidade;
 - C_2 : Custo unitário;
 - C_3 : agilidade de entrega;
 - C_4 : saúde financeira.

Avaliação das alternativas no TOPSIS

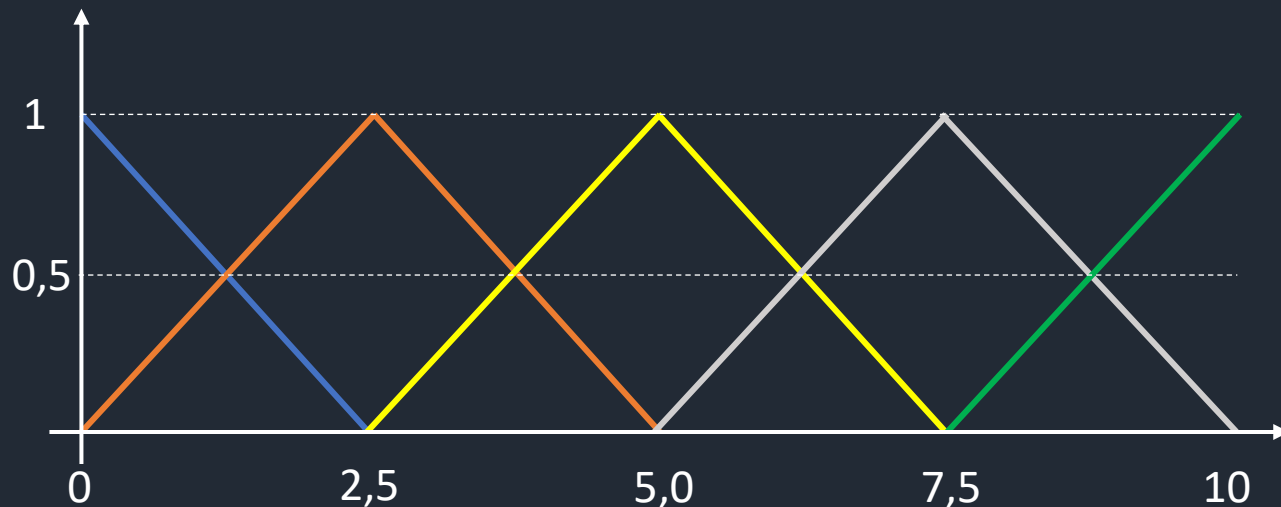
- No exemplo da vídeo aula sobre TOPSIS: expressão linguística e escala ordinal para critérios C_1 , C_3 e C_4

Termo	Nota	Termo	Nota
Excelente	10	De Regular pra insatisfatório	5
Muito bom	9	Insatisfatório	4
Bom	8	Bem insatisfatório	3
De regular a bom	7	Ruim	2
Regular	6	Péssimo	1

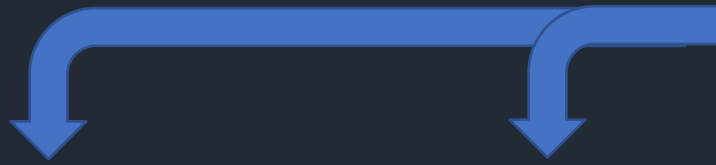
Avaliação das alternativas no Fuzzy TOPSIS

Expressões linguísticas associadas a números fuzzy – Exemplo:

Termos Linguisticos	Números Fuzzy Triangular
Muito ruim (MR)	(0; 0; 2,5)
Ruim (R)	(0; 2,5; 5,0)
Médio (M)	(2,5; 5,0; 7,5)
Bom (B)	(5,0; 7,5; 10,0)
Muito bom (MB)	(7,5; 10; 10)



Avaliação Exemplo TOPSIS



Fornecedor	C_1	C_2 (R\$)	C_3	C_4
S_1	7	5,5	6	8
S_2	8	5,0	7	8
S_3	8	7,2	8	9
S_4	6	4,3	5	6
S_5	7	4,0	8	5
S_6	9	6,5	8	9
S_7	9	8,2	7	9
S_8	5	4,9	7	8
S_9	8	7,5	5	9

Termo	Nota	Termo	Nota
Excelente	10	De Regular pra insatisfatório	5
Muito bom	9	Insatisfatório	4
Bom	8	Bem insatisfatório	3
De regular a bom	7	Ruim	2
Regular	6	Péssimo	1

Avaliação Exemplo Fuzzy TOPSIS

Forn.	C_1	C_2 (R\$)	C_3	C_4
S_1	Bom	(5,5) Bom	Médio	Bom
S_2	Bom	(5,0) Bom	Bom	Bom
S_3	Bom	(7,2) Ruim	Bom	MB
S_4	Médio	(4,3) MB	Ruim	Médio
S_5	Bom	(4,0) MB	Bom	Ruim
S_6	MB	(6,5) Ruim	Bom	MB
S_7	MB	(8,2) MR	Bom	MB
S_8	Ruim	(4,9) Bom	Bom	Bom
S_9	Bom	(7,5) MR	Ruim	MB



Termos Linguisticos
Muito ruim (MR)
Ruim (R)
Médio (M)
Bom (B)
Muito bom (MB)

Avaliação Exemplo Fuzzy TOPSIS



Termos Linguís.	Núm. Fuzzy Triangular
Muito ruim (MR)	(0; 0; 2,5)
Ruim (R)	(0; 2,5; 5,0)
Médio (M)	(2,5; 5,0; 7,5)
Bom (B)	(5,0; 7,5; 10,0)
Muito bom (MB)	(7,5; 10; 10)

Forn	C_1	C_2	C_3	C_4
S_1	B (5; 7,5; 10)	B (5; 7,5; 10)	M (2,5; 5; 7,5)	B (5; 7,5; 10)
S_2	B (5; 7,5; 10)	B (5; 7,5; 10)	B (5; 7,5; 10)	B (5; 7,5; 10)
S_3	B (5; 7,5; 10)	R (0; 2,5; 5)	B (5; 7,5; 10)	MB (7,5; 10; 10)
S_4	M (2,5; 5; 7,5)	MB (7,5; 10; 10)	R (0; 2,5; 5)	M (2,5; 5; 7,5)
S_5	B (5; 7,5; 10)	MB (7,5; 10; 10)	B (5; 7,5; 10)	R (0; 2,5; 5)
S_6	MB (7,5; 10; 10)	R (0; 2,5; 5)	B (5; 7,5; 10)	MB (7,5; 10; 10)
S_7	MB (7,5; 10; 10)	MR (0; 0; 2,5)	B (5; 7,5; 10)	MB (7,5; 10; 10)
S_8	R (0; 2,5; 5)	B (5; 7,5; 10)	B (5; 7,5; 10)	B (5; 7,5; 10)
S_9	B (5; 7,5; 10)	MR (0; 0; 2,5)	R (0; 2,5; 5)	MB (7,5; 10; 10)

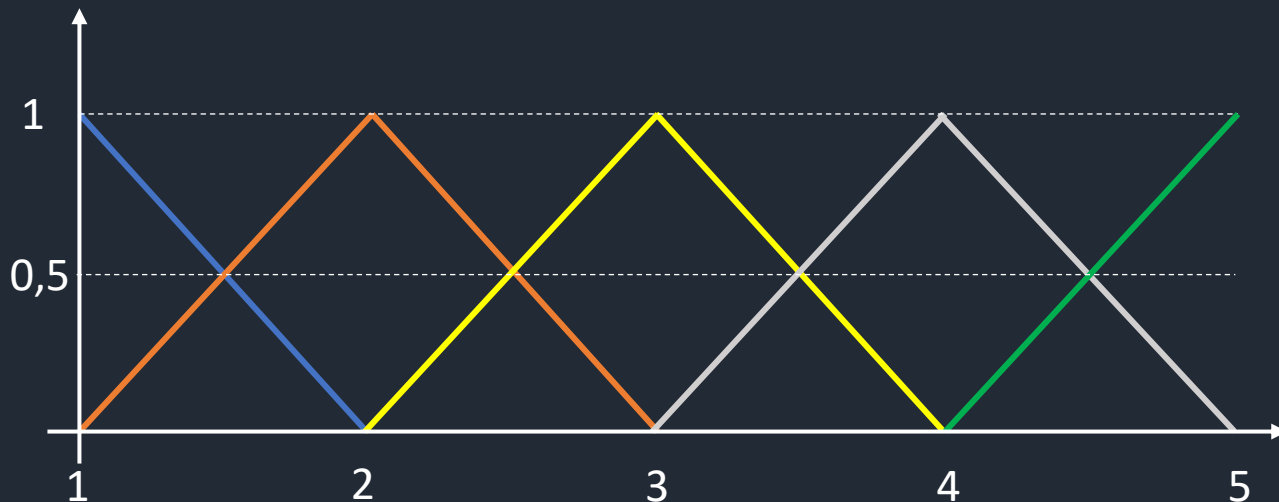
Peso dos critérios - Exemplo TOPSIS

No exemplo da aula sobre TOPSIS:

- C_1 : Capacitação em gestão da qualidade - 25%
- C_2 : Custo unitário – 30%
- C_3 : agilidade de entrega – 20%
- C_4 : saúde financeira – 25%

Termos linguísticos e números fuzzy para o peso dos critérios

Termos Linguísticos	Número Fuzzy Triangular
Nada importante (NI)	(1,0, 1,0, 2,0)
Pouco importante (PI)	(1,0, 2,0, 3,0)
Importância média (IM)	(2,0, 3,0, 4,0)
Importante (I)	(3,0, 4,0, 5,0)
Muito importante (MI)	(4,0, 5,0, 5,0)



Peso dos critérios – escala Fuzzy TOPSIS

Termos Linguísticos
Nada importante (NI)
Pouco importante (PI)
Importância média (IM)
Importante (I)
Muito importante (MI)



Critérios	Termos Linguísticos
C_1 : Capacitação em GQ	Importância média (IM)
C_2 : Custo unitário	Importante (I)
C_3 : agilidade de entrega	Pouco importante (PI)
C_4 : saúde financeira	Importância média (IM)

Peso dos critérios – escala Fuzzy TOPSIS

Crêterios	Termos Linguisticos	Número Fuzzy Triangular
C_1 : Capacita�o em GQ	Importância média (IM)	(2,0, 3,0, 4,0)
C_2 : Custo unitário	Importante (I)	(3,0, 4,0, 5,0)
C_3 : agilidade de entrega	Pouco importante (PI)	(1,0, 2,0, 3,0)
C_4 : saúde financeira	Importância média (IM)	(2,0, 3,0, 4,0)

Exemplo Fuzzy TOPSIS

1. Montar uma matriz de decisão *fuzzy* \tilde{D} para as pontuações das alternativas:

	C_1	C_2	C_3	C_4
S_1	(5; 7,5; 10)	(5; 7,5; 10)	(2,5; 5; 7,5)	(5; 7,5; 10)
S_2	(5; 7,5; 10)	(5; 7,5; 10)	(5; 7,5; 10)	(5; 7,5; 10)
S_3	(5; 7,5; 10)	(0; 2,5; 5)	(5; 7,5; 10)	(7,5; 10; 10)
S_4	(2,5; 5; 7,5)	(7,5; 10; 10)	(0; 2,5; 5)	(2,5; 5; 7,5)
S_5	(5; 7,5; 10)	(7,5; 10; 10)	(5; 7,5; 10)	(0; 2,5; 5)
S_6	(7,5; 10; 10)	(0; 2,5; 5)	(5; 7,5; 10)	(7,5; 10; 10)
S_7	(7,5; 10; 10)	(0; 0; 2,5)	(5; 7,5; 10)	(7,5; 10; 10)
S_8	(0; 2,5; 5)	(5; 7,5; 10)	(5; 7,5; 10)	(5; 7,5; 10)
S_9	(5; 7,5; 10)	(0; 0; 2,5)	(0; 2,5; 5)	(7,5; 10; 10)

Passos do método

1. Montar um vetor *fuzzy* \tilde{W} para o peso dos critérios:

$$\left[\begin{array}{cccc} \text{C1} & \text{C2} & \text{C3} & \text{C4} \\ (2,0, 3,0, 4,0) & (3,0, 4,0, 5,0) & (1,0, 2,0, 3,0) & (2,0, 3,0, 4,0) \end{array} \right]$$

Agregação de julgamentos

- Quando houver mais de um decisor, agregar os valores linguísticos:

$$\tilde{x}_{ij} = \frac{1}{K} [\tilde{x}_{ij}^1 + \tilde{x}_{ij}^r + \dots + \tilde{x}_{ij}^k] \quad \tilde{w}_j = \frac{1}{K} [\tilde{w}_j^1 + \tilde{w}_j^2 + \dots + \tilde{w}_j^k]$$

\tilde{x}_{ij}^r : avaliação da alternativa A_i ($i = 1, \dots, n$), em relação ao critério C_j ($j = 1, \dots, m$), dado pelo tomador de decisão DM_r ($r = 1, \dots, k$);

\tilde{w}_j^r : peso do critério, dado por cada DM_r .

Passos do Fuzzy TOPSIS

2. Normalizar a matriz \tilde{D} usando uma escala de transformação linear. A matriz normalizada \tilde{R} é dada pelas equações abaixo

$$\tilde{R} = [\tilde{r}_{ij}]_{m \times n}$$

No nosso exemplo

$$\tilde{r}_{ij} = \left(\frac{l_{ij}}{u_j^+}, \frac{m_{ij}}{u_j^+}, \frac{u_{ij}}{u_j^+} \right), \quad u_j^+ = \max_i u_{ij} \text{ (critérios de benefício)}$$

$$\tilde{r}_{ij} = \left(\frac{l_j^-}{u_{ij}}, \frac{l_j^-}{m_{ij}}, \frac{l_j^-}{l_{ij}} \right), \quad l_j^- = \min_i l_{ij} \text{ (critérios de custo)}$$

Exemplo Fuzzy TOPSIS - Normalização

Para critérios de benefício:

$$u_1^+ = \max_i u_{i1}$$

$$\tilde{r}_{i1} = \left(\frac{l_{i1}}{10}, \frac{m_{i1}}{10}, \frac{u_{i1}}{10} \right),$$

	C_1	C_2	C_3	C_4
S_1	(5; 7,5; 10)	(5; 7,5; 10)	(2,5; 5; 7,5)	(5; 7,5; 10)
S_2	(5; 7,5; 10)	(5; 7,5; 10)	(5; 7,5; 10)	(5; 7,5; 10)
S_3	(5; 7,5; 10)	(0; 2,5; 5)	(5; 7,5; 10)	(7,5; 10; 10)
S_4	(2,5; 5; 7,5)	(7,5; 10; 10)	(0; 2,5; 5)	(2,5; 5; 7,5)
S_5	(5; 7,5; 10)	(7,5; 10; 10)	(5; 7,5; 10)	(0; 2,5; 5)
S_6	(7,5; 10; 10)	(0; 2,5; 5)	(5; 7,5; 10)	(7,5; 10; 10)
S_7	(7,5; 10; 10)	(0; 0; 2,5)	(5; 7,5; 10)	(7,5; 10; 10)
S_8	(0; 2,5; 5)	(5; 7,5; 10)	(5; 7,5; 10)	(5; 7,5; 10)
S_9	(5; 7,5; 10)	(0; 0; 2,5)	(0; 2,5; 5)	(7,5; 10; 10)

Exemplo Fuzzy TOPSIS - Normalização

Para critérios de benefício:

$$u_2^+ = \max_i u_{i2}$$

$$\tilde{r}_{i2} = \left(\frac{l_{i2}}{10}, \frac{m_{i2}}{10}, \frac{u_{i2}}{10} \right),$$

	C_1	C_2	C_3	C_4
S_1	(5; 7,5; 10)	(5; 7,5; 10)	(2,5; 5; 7,5)	(5; 7,5; 10)
S_2	(5; 7,5; 10)	(5; 7,5; 10)	(5; 7,5; 10)	(5; 7,5; 10)
S_3	(5; 7,5; 10)	(0; 2,5; 5)	(5; 7,5; 10)	(7,5; 10; 10)
S_4	(2,5; 5; 7,5)	(7,5; 10; 10)	(0; 2,5; 5)	(2,5; 5; 7,5)
S_5	(5; 7,5; 10)	(7,5; 10; 10)	(5; 7,5; 10)	(0; 2,5; 5)
S_6	(7,5; 10; 10)	(0; 2,5; 5)	(5; 7,5; 10)	(7,5; 10; 10)
S_7	(7,5; 10; 10)	(0; 0; 2,5)	(5; 7,5; 10)	(7,5; 10; 10)
S_8	(0; 2,5; 5)	(5; 7,5; 10)	(5; 7,5; 10)	(5; 7,5; 10)
S_9	(5; 7,5; 10)	(0; 0; 2,5)	(0; 2,5; 5)	(7,5; 10; 10)

Exemplo Fuzzy TOPSIS - Normalização

Para critérios de benefício:

$$u_3^+ = \max_i u_{i3}$$

$$\tilde{r}_{i3} = \left(\frac{l_{i3}}{10}, \frac{m_{i3}}{10}, \frac{u_{i3}}{10} \right),$$

	C_1	C_2	C_3	C_4
S_1	(5; 7,5; 10)	(5; 7,5; 10)	(2,5; 5; 7,5)	(5; 7,5; 10)
S_2	(5; 7,5; 10)	(5; 7,5; 10)	(5; 7,5; 10)	(5; 7,5; 10)
S_3	(5; 7,5; 10)	(0; 2,5; 5)	(5; 7,5; 10)	(7,5; 10; 10)
S_4	(2,5; 5; 7,5)	(7,5; 10; 10)	(0; 2,5; 5)	(2,5; 5; 7,5)
S_5	(5; 7,5; 10)	(7,5; 10; 10)	(5; 7,5; 10)	(0; 2,5; 5)
S_6	(7,5; 10; 10)	(0; 2,5; 5)	(5; 7,5; 10)	(7,5; 10; 10)
S_7	(7,5; 10; 10)	(0; 0; 2,5)	(5; 7,5; 10)	(7,5; 10; 10)
S_8	(0; 2,5; 5)	(5; 7,5; 10)	(5; 7,5; 10)	(5; 7,5; 10)
S_9	(5; 7,5; 10)	(0; 0; 2,5)	(0; 2,5; 5)	(7,5; 10; 10)

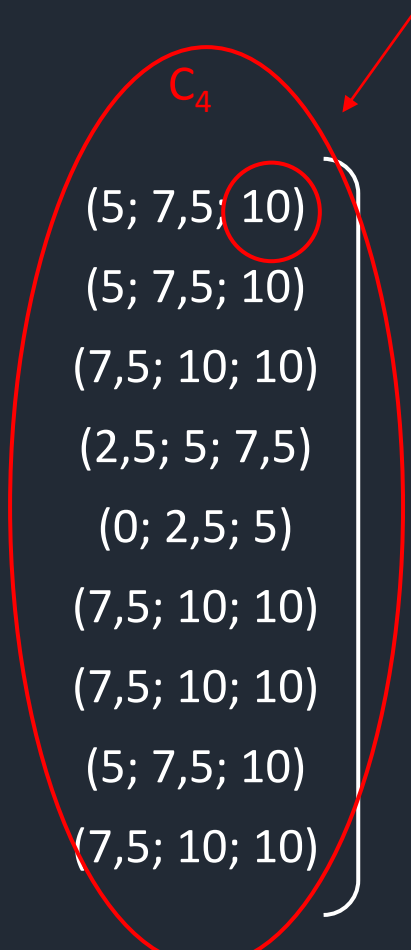
Exemplo Fuzzy TOPSIS - Normalização

Para critérios de benefício:

$$u_4^+ = \max_i u_{i4}$$

$$\tilde{r}_{i4} = \left(\frac{l_{i4}}{10}, \frac{m_{i4}}{10}, \frac{u_{i4}}{10} \right),$$

	C_1	C_2	C_3	C_4
S_1	(5; 7,5; 10)	(5; 7,5; 10)	(2,5; 5; 7,5)	(5; 7,5; 10)
S_2	(5; 7,5; 10)	(5; 7,5; 10)	(5; 7,5; 10)	(5; 7,5; 10)
S_3	(5; 7,5; 10)	(0; 2,5; 5)	(5; 7,5; 10)	(7,5; 10; 10)
S_4	(2,5; 5; 7,5)	(7,5; 10; 10)	(0; 2,5; 5)	(2,5; 5; 7,5)
S_5	(5; 7,5; 10)	(7,5; 10; 10)	(5; 7,5; 10)	(0; 2,5; 5)
S_6	(7,5; 10; 10)	(0; 2,5; 5)	(5; 7,5; 10)	(7,5; 10; 10)
S_7	(7,5; 10; 10)	(0; 0; 2,5)	(5; 7,5; 10)	(7,5; 10; 10)
S_8	(0; 2,5; 5)	(5; 7,5; 10)	(5; 7,5; 10)	(5; 7,5; 10)
S_9	(5; 7,5; 10)	(0; 0; 2,5)	(0; 2,5; 5)	(7,5; 10; 10)



Exemplo Fuzzy TOPSIS - Normalização

MATRIZ DE JULGAMENTOS NORMALIZADA

$$\tilde{r}_{11} = \left(\frac{5}{10}, \frac{7,5}{10}, \frac{10}{10} \right),$$

	C1			C2			C3			C4		
	l	m	u	l	m	u	l	m	u	l	m	u
S1	0,5	0,75	1	0,5	0,75	1	0,25	0,50	0,75	0,5	0,75	1
S2	0,5	0,75	1	0,5	0,75	1	0,67	0,75	1,00	0,5	0,75	1
S3	0,5	0,75	1	0	0,25	0,5	0,67	0,75	1,00	0,75	1	1
S4	0,25	0,5	0,75	0,75	1	1	0,00	0,25	0,50	0,25	0,5	0,75
S5	0,5	0,75	1	0,75	1	1	0,67	0,75	1,00	0	0,25	0,5
S6	0,75	1	1	0	0,25	0,5	0,67	0,75	1,00	0,75	1	1
S7	0,75	1	1	0	0	0,25	0,67	0,75	1,00	0,75	1	1
S8	0	0,25	0,5	0,5	0,75	1	0,67	0,75	1,00	0,5	0,75	1
S9	0,5	0,75	1	0	0	0,25	0,00	0,25	0,50	0,75	1	1

Passos do Fuzzy TOPSIS

3. Obter a matriz normalizada e ponderada \tilde{V}

$$\tilde{V} = [\tilde{v}_{ij}]_{m \times n}$$

$$\tilde{v}_{ij} = \tilde{r}_{ij} * \tilde{w}_j$$

\tilde{r}_{ij} : elementos da matriz normalizada;

\tilde{w}_j : pesos dos critérios;

Exemplo Fuzzy TOPSIS - Ponderação

MATRIZ DE JULGAMENTOS NORMALIZADA E PONDERADA

	C1			C2			C3			C4		
	l	m	u	l	m	u	l	m	u	l	m	u
S1	1	2,25	4	1,5	3	5	0,25	1,00	2,25	1	2,25	4
S2	1	2,25	4	1,5	3	5	0,50	1,50	3	1	2,25	4
S3	1	2,25	4	0	1	2,5	0,50	1,50	3	1,5	3	4
S4	0,5	1,5	3	2,25	4	5	0,00	0,50	1,5	0,5	1,5	3
S5	1	2,25	4	2,25	4	5	0,50	1,50	3	0	0,75	2
S6	1,5	3	4	0	1	2,5	0,50	1,50	3	1,5	3	4
S7	1,5	3	4	0	0	1,25	0,50	1,50	3	1,5	3	4
S8	0	0,75	2	1,5	3	5	0,50	1,50	3	1	2,25	4
S9	1	2,25	4	0	0	1,25	0,00	0,50	1,5	1,5	3	4

Passos do Fuzzy TOPSIS

4. Definir a solução ideal positiva *fuzzy* (FPIS, A^+) e a solução ideal negativa (FNIS, A^-), Chen et al. 2006

$$A^+ = \{\tilde{v}_1^+, \tilde{v}_j^+, \dots, \tilde{v}_m^+\} \quad \tilde{v}_j^+ = \max_i \{u_{vij}\}$$

$$A^- = \{\tilde{v}_1^-, \tilde{v}_j^-, \dots, \tilde{v}_m^-\} \quad \tilde{v}_j^- = \min_i \{l_{vij}\}$$

Exemplo Fuzzy TOPSIS – Solução Ideal Positiva

Matriz ponderada:

$$A^+ = \{\tilde{v}_1^+, \tilde{v}_j^+, \dots, \tilde{v}_m^+\} \quad \tilde{v}_1^+ = \max_i \{u_{v_{1j}}\}$$

$$A^+ = \{(4; 4; 4), \tilde{v}_2^+, \dots, \tilde{v}_m^+\}$$

	C1			C2			C3			C4		
	l	m	u	l	m	u	l	m	u	l	m	u
S1	1	2,25	4	1,5	3	5	0,25	1,00	2,25	1	2,25	4
S2	1	2,25	4	1,5	3	5	0,50	1,50	3	1	2,25	4
S3	1	2,25	4	0	1	2,5	0,50	1,50	3	1,5	3	4
S4	0,5	1,5	3	2,25	4	5	0,00	0,50	1,5	0,5	1,5	3
S5	1	2,25	4	2,25	4	5	0,50	1,50	3	0	0,75	2
S6	1,5	3	4	0	1	2,5	0,50	1,50	3	1,5	3	4
S7	1,5	3	4	0	0	1,25	0,50	1,50	3	1,5	3	4
S8	0	0,75	2	1,5	3	5	0,50	1,50	3	1	2,25	4
S9	1	2,25	4	0	0	1,25	0,00	0,50	1,5	1,5	3	4

Exemplo Fuzzy TOPSIS – Solução Ideal Positiva

Matriz ponderada:

$$A^+ = \{\tilde{v}_1^+, \tilde{v}_j^+, \dots, \tilde{v}_m^+\} \quad \tilde{v}_2^+ = \max_i \{u_{v_2j}\}$$

$$A^+ = \{(4; 4; 4) (5; 5; 5) \dots, \tilde{v}_m^+\}$$

	C1			C2			C3			C4		
	l	m	u	l	m	u	l	m	u	l	m	u
S1	1	2,25	4	1,5	3	5	0,25	1,00	2,25	1	2,25	4
S2	1	2,25	4	1,5	3	5	0,50	1,50	3	1	2,25	4
S3	1	2,25	4	0	1	2,5	0,50	1,50	3	1,5	3	4
S4	0,5	1,5	3	2,25	4	5	0,00	0,50	1,5	0,5	1,5	3
S5	1	2,25	4	2,25	4	5	0,50	1,50	3	0	0,75	2
S6	1,5	3	4	0	1	2,5	0,50	1,50	3	1,5	3	4
S7	1,5	3	4	0	0	1,25	0,50	1,50	3	1,5	3	4
S8	0	0,75	2	1,5	3	5	0,50	1,50	3	1	2,25	4
S9	1	2,25	4	0	0	1,25	0,00	0,50	1,5	1,5	3	4

Exemplo Fuzzy TOPSIS – Solução Ideal Positiva

Matriz ponderada:

$$A^+ = \{\tilde{v}_1^+, \tilde{v}_j^+, \dots, \tilde{v}_m^+\} \quad \tilde{v}_3^+ = \max_i \{u_{v_{3j}}\}$$

$$A^+ = \{(4; 4; 4) (5; 5; 5) (3; 3; 3) \dots, \tilde{v}_m^+\}$$

	C1			C2			C3			C4		
	l	m	u	l	m	u	l	m	u	l	m	u
S1	1	2,25	4	1,5	3	5	0,25	1,00	2,25	1	2,25	4
S2	1	2,25	4	1,5	3	5	0,50	1,50	3	1	2,25	4
S3	1	2,25	4	0	1	2,5	0,50	1,50	3	1,5	3	4
S4	0,5	1,5	3	2,25	4	5	0,00	0,50	1,5	0,5	1,5	3
S5	1	2,25	4	2,25	4	5	0,50	1,50	3	0	0,75	2
S6	1,5	3	4	0	1	2,5	0,50	1,50	3	1,5	3	4
S7	1,5	3	4	0	0	1,25	0,50	1,50	3	1,5	3	4
S8	0	0,75	2	1,5	3	5	0,50	1,50	3	1	2,25	4
S9	1	2,25	4	0	0	1,25	0,00	0,50	1,5	1,5	3	4



Exemplo Fuzzy TOPSIS – Solução Ideal Positiva

$$A^+ = \{\tilde{v}_1^+, \tilde{v}_j^+, \dots, \tilde{v}_m^+\} \quad \tilde{v}_4^+ = \max_i \{u_{v_{4j}}\}$$

Matriz ponderada:

$$A^+ = \{(4; 4; 4) (5; 5; 5)(3; 3; 3)(4; 4; 4) \}$$

	C1			C2			C3			C4		
	l	m	u	l	m	u	l	m	u	l	m	u
S1	1	2,25	4	1,5	3	5	0,25	1,00	2,25	1	2,25	4
S2	1	2,25	4	1,5	3	5	0,50	1,50	3	1	2,25	4
S3	1	2,25	4	0	1	2,5	0,50	1,50	3	1,5	3	4
S4	0,5	1,5	3	2,25	4	5	0,00	0,50	1,5	0,5	1,5	3
S5	1	2,25	4	2,25	4	5	0,50	1,50	3	0	0,75	2
S6	1,5	3	4	0	1	2,5	0,50	1,50	3	1,5	3	4
S7	1,5	3	4	0	0	1,25	0,50	1,50	3	1,5	3	4
S8	0	0,75	2	1,5	3	5	0,50	1,50	3	1	2,25	4
S9	1	2,25	4	0	0	1,25	0,00	0,50	1,5	1,5	3	4



Exemplo Fuzzy TOPSIS – Solução Ideal Negativa

$$A^- = \{\tilde{v}_1^-, \tilde{v}_j^-, \dots, \tilde{v}_m^-\} \quad \tilde{v}_j^- = \min_i \{l_{v_{ij}}\}$$

$$A^- = \{(0; 0; 0) (0; 0; 0)(0; 0; 0)(0; 0; 0) \}$$

	C1			C2			C3			C4		
	l	m	u	l	m	u	l	m	u	l	m	u
S1	1	2,25	4	1,5	3	5	0,25	1,00	2,25	1	2,25	4
S2	1	2,25	4	1,5	3	5	0,50	1,50	3	1	2,25	4
S3	1	2,25	4	0	1	2,5	0,50	1,50	3	1,5	3	4
S4	0,5	1,5	3	2,25	4	5	0,00	0,50	1,5	0,5	1,5	3
S5	1	2,25	4	2,25	4	5	0,50	1,50	3	0	0,75	2
S6	1,5	3	4	0	1	2,5	0,50	1,50	3	1,5	3	4
S7	1,5	3	4	0	0	1,25	0,50	1,50	3	1,5	3	4
S8	0	0,75	2	1,5	3	5	0,50	1,50	3	1	2,25	4
S9	1	2,25	4	0	0	1,25	0,00	0,50	1,5	1,5	3	4

Passos do Fuzzy TOPSIS

5. Calcular a distância D_i^+ entre os valores de FPIS e as pontuações das alternativas da matriz ponderada.


$$D_i^+ = \sum_{j=1}^n d_v(\tilde{v}_{ij}, \tilde{v}_j^+)$$

$$d_v(\tilde{v}_{ij}, \tilde{v}_j^+) = \sqrt{\frac{1}{3} [(l_{ij} - l_{v_j^+})^2 + (m_{ij} - m_{v_j^+})^2 + (u_{ij} - u_{v_j^+})^2]}$$

Passos do Fuzzy TOPSIS

5. Analogamente, calcular a distância D_i^- entre os valores de FNIS e as pontuações das alternativas da matriz ponderada.

$$D_i^- = \sum_{j=1}^n d_v(\tilde{v}_{ij}, \tilde{v}_j^-)$$


$$d_v(\tilde{v}_{ij}, \tilde{v}_j^-) = \sqrt{\frac{1}{3} [(l_{ij} - l_{v_j^-})^2 + (m_{ij} - m_{v_j^-})^2 + (u_{ij} - u_{v_j^-})^2]}$$

Exemplo Fuzzy TOPSIS – distância D_i^+

$$A^+ = \{(4; 4; 4) (5; 5; 5) (3; 3; 3) (4; 4; 4)\}$$

$$d_v(\tilde{v}_{11}, \tilde{v}_1^+) = \sqrt{\frac{1}{3} [(1 - 4)^2 + (2,25 - 4)^2 + (4 - 4)^2]}$$

	C1			C2			C3			C4		
	l	m	u	l	m	u	l	m	u	l	m	u
S1	1	2,25	4	1,5	3	5	0,25	1,00	2,25	1	2,25	4
S2	1	2,25	4	1,5	3	5	0,50	1,50	3	1	2,25	4
S3	1	2,25	4	0	1	2,5	0,50	1,50	3	1,5	3	4
S4	0,5	1,5	3	2,25	4	5	0,00	0,50	1,5	0,5	1,5	3
S5	1	2,25	4	2,25	4	5	0,50	1,50	3	0	0,75	2
S6	1,5	3	4	0	1	2,5	0,50	1,50	3	1,5	3	4
S7	1,5	3	4	0	0	1,25	0,50	1,50	3	1,5	3	4
S8	0	0,75	2	1,5	3	5	0,50	1,50	3	1	2,25	4
S9	1	2,25	4	0	0	1,25	0,00	0,50	1,5	1,5	3	4

Exemplo Fuzzy TOPSIS – distância D_i^+

$$A^+ = \{(4; 4; 4) (5; 5; 5) (3; 3; 3) (4; 4; 4)\}$$

$$d_v(\tilde{v}_{11}, \tilde{v}_1^+) = \sqrt{\frac{1}{3} [(1 - 4)^2 + (2,25 - 4)^2 + (4 - 4)^2]}$$

	C1			C2			C3			C4		
	l	m	u	l	m	u	l	m	u	l	m	u
S1	1	2,25	4	1,5	3	5	0,25	1,00	2,25	1	2,25	4
S2	1	2,25	4	1,5	3	5	0,50	1,50	3	1	2,25	4
S3	1	2,25	4	0	1	2,5	0,50	1,50	3	1,5	3	4
S4	0,5	1,5	3	2,25	4	5	0,00	0,50	1,5	0,5	1,5	3
S5	1	2,25	4	2,25	4	5	0,50	1,50	3	0	0,75	2
S6	1,5	3	4	0	1	2,5	0,50	1,50	3	1,5	3	4
S7	1,5	3	4	0	0	1,25	0,50	1,50	3	1,5	3	4
S8	0	0,75	2	1,5	3	5	0,50	1,50	3	1	2,25	4
S9	1	2,25	4	0	0	1,25	0,00	0,50	1,5	1,5	3	4

Exemplo Fuzzy TOPSIS – distância D_i^+

$$A^+ = \{(4; 4; 4) (5; 5; 5) (3; 3; 3) (4; 4; 4)\}$$

$$d_v(\tilde{v}_{11}, \tilde{v}_1^+) = \sqrt{\frac{1}{3} [(1 - 4)^2 + (2,25 - 4)^2 + (4 - 4)^2]} = 2,005$$

	C1			C2			C3			C4		
	l	m	u	l	m	u	l	m	u	l	m	u
S1	1	2,25	4	1,5	3	5	0,25	1,00	2,25	1	2,25	4
S2	1	2,25	4	1,5	3	5	0,50	1,50	3	1	2,25	4
S3	1	2,25	4	0	1	2,5	0,50	1,50	3	1,5	3	4
S4	0,5	1,5	3	2,25	4	5	0,00	0,50	1,5	0,5	1,5	3
S5	1	2,25	4	2,25	4	5	0,50	1,50	3	0	0,75	2
S6	1,5	3	4	0	1	2,5	0,50	1,50	3	1,5	3	4
S7	1,5	3	4	0	0	1,25	0,50	1,50	3	1,5	3	4
S8	0	0,75	2	1,5	3	5	0,50	1,50	3	1	2,25	4
S9	1	2,25	4	0	0	1,25	0,00	0,50	1,5	1,5	3	4

Exemplo Fuzzy TOPSIS – distância D_i^+

$$A^+ = \{(4; 4; 4) (5; 5; 5) (3; 3; 3) (4; 4; 4)\}$$

$$d_v(\tilde{v}_{12}, \tilde{v}_2^+) = \sqrt{\frac{1}{3} [(1,5 - 5)^2 + (3 - 5)^2 + (5 - 5)^2]}$$

	C1			l	C2		l	C3			l	C4	
	l	m	u		m	u		m	u	m		u	
S1	1	2,25	4	1,5	3	5	0,25	1,00	2,25	1	2,25	4	
S2	1	2,25	4	1,5	3	5	0,50	1,50	3	1	2,25	4	
S3	1	2,25	4	0	1	2,5	0,50	1,50	3	1,5	3	4	
S4	0,5	1,5	3	2,25	4	5	0,00	0,50	1,5	0,5	1,5	3	
S5	1	2,25	4	2,25	4	5	0,50	1,50	3	0	0,75	2	
S6	1,5	3	4	0	1	2,5	0,50	1,50	3	1,5	3	4	
S7	1,5	3	4	0	0	1,25	0,50	1,50	3	1,5	3	4	
S8	0	0,75	2	1,5	3	5	0,50	1,50	3	1	2,25	4	
S9	1	2,25	4	0	0	1,25	0,00	0,50	1,5	1,5	3	4	

Exemplo Fuzzy TOPSIS – distância D_i^+

$$A^+ = \{(4; 4; 4) (5; 5; 5) (3; 3; 3) (4; 4; 4)\}$$

$$d_v(\tilde{v}_{12}, \tilde{v}_2^+) = \sqrt{\frac{1}{3} [(1,5 - 5)^2 + (3 - 5)^2 + (5 - 5)^2]}$$

	C1			C2			C3			C4		
	l	m	u	l	m	u	l	m	u	l	m	u
S1	1	2,25	4	1,5	3	5	0,25	1,00	2,25	1	2,25	4
S2	1	2,25	4	1,5	3	5	0,50	1,50	3	1	2,25	4
S3	1	2,25	4	0	1	2,5	0,50	1,50	3	1,5	3	4
S4	0,5	1,5	3	2,25	4	5	0,00	0,50	1,5	0,5	1,5	3
S5	1	2,25	4	2,25	4	5	0,50	1,50	3	0	0,75	2
S6	1,5	3	4	0	1	2,5	0,50	1,50	3	1,5	3	4
S7	1,5	3	4	0	0	1,25	0,50	1,50	3	1,5	3	4
S8	0	0,75	2	1,5	3	5	0,50	1,50	3	1	2,25	4
S9	1	2,25	4	0	0	1,25	0,00	0,50	1,5	1,5	3	4

Exemplo Fuzzy TOPSIS – distância D_i^+

$$A^+ = \{(4; 4; 4) (5; 5; 5) (3; 3; 3) (4; 4; 4)\}$$

$$d_v(\tilde{v}_{12}, \tilde{v}_2^+) = \sqrt{\frac{1}{3} [(1,5 - 5)^2 + (3 - 5)^2 + (5 - 5)^2]} = 2,327$$

	C1			C2			C3			C4		
	l	m	u	l	m	u	l	m	u	l	m	u
S1	1	2,25	4	1,5	3	5	0,25	1,00	2,25	1	2,25	4
S2	1	2,25	4	1,5	3	5	0,50	1,50	3	1	2,25	4
S3	1	2,25	4	0	1	2,5	0,50	1,50	3	1,5	3	4
S4	0,5	1,5	3	2,25	4	5	0,00	0,50	1,5	0,5	1,5	3
S5	1	2,25	4	2,25	4	5	0,50	1,50	3	0	0,75	2
S6	1,5	3	4	0	1	2,5	0,50	1,50	3	1,5	3	4
S7	1,5	3	4	0	0	1,25	0,50	1,50	3	1,5	3	4
S8	0	0,75	2	1,5	3	5	0,50	1,50	3	1	2,25	4
S9	1	2,25	4	0	0	1,25	0,00	0,50	1,5	1,5	3	4

Exemplo Fuzzy TOPSIS – distância D_i^+

$$A^+ = \{(4; 4; 4) (5; 5; 5) (3; 3; 3) (4; 4; 4)\}$$

$$d_v(\tilde{v}_{13}, \tilde{v}_3^+) = \sqrt{\frac{1}{3} [(0,25 - 3)^2 + (1 - 3)^2 + (2,25 - 3)^2]} = 2,010$$

	C1			C2			C3			C4		
	l	m	u	l	m	u	l	m	u	l	m	u
S1	1	2,25	4	1,5	3	5	0,25	1,00	2,25	1	2,25	4
S2	1	2,25	4	1,5	3	5	0,50	1,50	3	1	2,25	4
S3	1	2,25	4	0	1	2,5	0,50	1,50	3	1,5	3	4
S4	0,5	1,5	3	2,25	4	5	0,00	0,50	1,5	0,5	1,5	3
S5	1	2,25	4	2,25	4	5	0,50	1,50	3	0	0,75	2
S6	1,5	3	4	0	1	2,5	0,50	1,50	3	1,5	3	4
S7	1,5	3	4	0	0	1,25	0,50	1,50	3	1,5	3	4
S8	0	0,75	2	1,5	3	5	0,50	1,50	3	1	2,25	4
S9	1	2,25	4	0	0	1,25	0,00	0,50	1,5	1,5	3	4

Exemplo Fuzzy TOPSIS – distância D_i^+

$$A^+ = \{(4; 4; 4) (5; 5; 5) (3; 3; 3) (4; 4; 4)\}$$

$$d_v(\tilde{v}_{14}, \tilde{v}_4^+) = \sqrt{\frac{1}{3} [(1 - 4)^2 + (2,25 - 4)^2 + (4 - 4)^2]} = 2,005$$

	C1			C2			C3			C4		
	l	m	u	l	m	u	l	m	u	l	m	u
S1	1	2,25	4	1,5	3	5	0,25	1,00	2,25	1	2,25	4
S2	1	2,25	4	1,5	3	5	0,50	1,50	3	1	2,25	4
S3	1	2,25	4	0	1	2,5	0,50	1,50	3	1,5	3	4
S4	0,5	1,5	3	2,25	4	5	0,00	0,50	1,5	0,5	1,5	3
S5	1	2,25	4	2,25	4	5	0,50	1,50	3	0	0,75	2
S6	1,5	3	4	0	1	2,5	0,50	1,50	3	1,5	3	4
S7	1,5	3	4	0	0	1,25	0,50	1,50	3	1,5	3	4
S8	0	0,75	2	1,5	3	5	0,50	1,50	3	1	2,25	4
S9	1	2,25	4	0	0	1,25	0,00	0,50	1,5	1,5	3	4

Exemplo Fuzzy TOPSIS – distância D_i^+

$$D_i^+ = \sum_{j=1}^n d_v(\tilde{v}_{ij}, \tilde{v}_j^+)$$

Para alternativa S_1

$$D_1^+ = 2,005 + 2,327 + 2,010 + 2,005 = 8,348$$

Exemplo Fuzzy TOPSIS – distância D_i^+

	D+
S1	8,348
S2	8,021
S3	9,212
S4	9,204
S5	8,570
S6	8,761
S7	9,413
S8	9,208
S9	10,596

Exemplo Fuzzy TOPSIS – distância D_i^-

$$A^- = \{(0; 0; 0) (0; 0; 0) (0; 0; 0) (0; 0; 0)\}$$

$$d_v(\tilde{v}_{11}, \tilde{v}_1^-) = \sqrt{\frac{1}{3} [(1 - 0)^2 + (2,25 - 0)^2 + (4 - 0)^2]}$$

	C1			C2			C3			C4		
	l	m	u	l	m	u	l	m	u	l	m	u
S1	1	2,25	4	1,5	3	5	0,25	1,00	2,25	1	2,25	4
S2	1	2,25	4	1,5	3	5	0,50	1,50	3	1	2,25	4
S3	1	2,25	4	0	1	2,5	0,50	1,50	3	1,5	3	4
S4	0,5	1,5	3	2,25	4	5	0,00	0,50	1,5	0,5	1,5	3
S5	1	2,25	4	2,25	4	5	0,50	1,50	3	0	0,75	2
S6	1,5	3	4	0	1	2,5	0,50	1,50	3	1,5	3	4
S7	1,5	3	4	0	0	1,25	0,50	1,50	3	1,5	3	4
S8	0	0,75	2	1,5	3	5	0,50	1,50	3	1	2,25	4
S9	1	2,25	4	0	0	1,25	0,00	0,50	1,5	1,5	3	4

Exemplo Fuzzy TOPSIS – distância D_i^-

$$A^- = \{(0; 0; 0) (0; 0; 0) (0; 0; 0) (0; 0; 0)\}$$

$$d_v(\tilde{v}_{11}, \tilde{v}_1^-) = \sqrt{\frac{1}{3} [(1,5 - 0)^2 + (3 - 0)^2 + (5 - 0)^2]}$$

	C1			C2			C3			C4		
	l	m	u	l	m	u	l	m	u	l	m	u
S1	1	2,25	4	1,5	3	5	0,25	1,00	2,25	1	2,25	4
S2	1	2,25	4	1,5	3	5	0,50	1,50	3	1	2,25	4
S3	1	2,25	4	0	1	2,5	0,50	1,50	3	1,5	3	4
S4	0,5	1,5	3	2,25	4	5	0,00	0,50	1,5	0,5	1,5	3
S5	1	2,25	4	2,25	4	5	0,50	1,50	3	0	0,75	2
S6	1,5	3	4	0	1	2,5	0,50	1,50	3	1,5	3	4
S7	1,5	3	4	0	0	1,25	0,50	1,50	3	1,5	3	4
S8	0	0,75	2	1,5	3	5	0,50	1,50	3	1	2,25	4
S9	1	2,25	4	0	0	1,25	0,00	0,50	1,5	1,5	3	4

Exemplo Fuzzy TOPSIS – distância D_i^-

	D-
S1	10,329
S2	10,858
S3	9,238
S4	8,747
S5	9,821
S6	9,540
S7	8,707
S8	9,379
S9	7,360

Passos do Fuzzy TOPSIS

6. Calcular o Índice de Proximidade CC_i para cada alternativa

$$CC_i = \frac{D_i^-}{(D_i^+ + D_i^-)}$$

Fuzzy TOPSIS - Exemplo

6. Calcular o Índice de Proximidade CC_i para cada alternativa

$$CC_1 = \frac{D_i^-}{(D_i^+ + D_i^-)} = \frac{10,329}{(8,348 + 10,329)} = 0,553$$

	Di+	Di-
S1	8,348	10,329
S2	8,021	10,858
S3	9,212	9,238
S4	9,204	8,747
S5	8,570	9,821
S6	8,761	9,540
S7	9,413	8,707
S8	9,208	9,379
S9	10,596	7,360

Fuzzy TOPSIS - Exemplo

6. Calcular o Índice de Proximidade CC_i para cada alternativa

$$CC_2 = \frac{D_i^-}{(D_i^+ + D_i^-)} = \frac{10,858}{(8,021 + 10,858)} = 0,575$$

	Di+	Di-
S1	8,348	10,329
S2	8,021	10,858
S3	9,212	9,238
S4	9,204	8,747
S5	8,570	9,821
S6	8,761	9,540
S7	9,413	8,707
S8	9,208	9,379
S9	10,596	7,360

Fuzzy TOPSIS - Exemplo

Índice de Proximidade CC_j para cada alternativa

		Classificação
CC1	0,553	2º
CC2	0,575	1º
CC3	0,501	6º
CC4	0,487	7º
CC5	0,534	3º
CC6	0,521	4º
CC7	0,481	8º
CC8	0,505	5º
CC9	0,410	9º

Ordem de preferência:

$$S_2 > S_1 > S_5 > S_6 > S_8 > S_3 > S_4 > S_7 > S_9$$

Referências

CHEN, C. T. Extensions of the TOPSIS for group decision-making under fuzzy environment. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 114, p. 1–9, 2000.

CHEN, C.; LIN, C.; HUANG, S. A fuzzy approach for supplier evaluation and selection. **International Journal of Production Economics**, v.102, p. 289–301, 2006.