Lista de Exercícios III

① Um pulso triangular se propaga como uma onda para a direita com velocidade $v = 1$ m/s. A equação do pulso no instante $t = 0$ s é dada por

$$y(x,0) = \begin{cases} 1 - |x| \ , & \text{se } |x| \leq 1 \text{ m}, \\ 0 \ , & \text{se } |x| > 1 \text{ m}. \end{cases}$$

(a) Esboce o gráfico de $y(x)$ nos instantes $t = 0$, 1 e 2 s;

(b) Esboce o gráfico de $y(t)$ para as posições $x = -1$, 0 e 1 m;

(c) Escreva a função $y(x,t)$ dessa onda.

(d) Calcule os coeficientes de Fourier e verifique o que ocorre com os primeiros cinco termos da série.

② Considere uma corda de comprimento ℓ distendida horizontalmente, com a extremidade esquerda livre e a extremidade direita fixa. No instante $t = 0$ s, um pequeno pulso de forma triangular localizado na extremidade esquerda está se propagando para a direita com velocidade v (veja a figura abaixo). Depois de quanto tempo a corda voltará à configuração inicial?

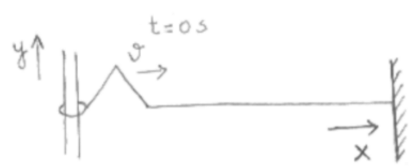

Figura 1: Corda de comprimento L distendida horizontalmente.

③ (a) Encontre os modos normais e frequências das ondas transversais em uma corda de comprimento L e densidade linear de massa μ, que está sob tensão T e fixa em ambas as extremidades.

(b) Admitindo que a corda tem $L = 0{,}5$ m, $\mu = 0{,}01$ kg/m e que a frequência fundamental da corda seja 247 Hz, qual a tensão da corda ?

④ Uma corda vibrante de comprimento ℓ presa em ambas as extremidades está vibrando em seu n-ésimo modo normal, com deslocamento transversal dado por

$$y_n(x,t) = b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}vt + \delta_n\right), \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Calcule a energia total de oscilação da corda.
Sugestão: Considere um instante em que a corda esteja passando pela posição de equilíbrio, de modo que a energia total de oscilação esteja em forma puramente cinética. Calcule a densidade linear de energia e integre sobre toda a corda.

⑤ Duas cordas muito longas, bem esticadas, de densidades lineares diferentes μ_1 e μ_2, estão ligadas uma à outra. Toma-se a posição de equilíbrio como eixo dos x e a origem O no ponto de junção, sendo y o deslocamento transversal da corda. Uma onda harmônica progressiva, $y_i = A_1 \cos(k_1 x - \omega t)$, viajando na corda 1 ($x < 0$), incide sobre o ponto de junção, fazendo-o oscilar com frequência angular ω. Isto produz na corda 2 ($x > 0$) uma onda progressiva de mesma frequência, $y_t = A_2 \cos(k_2 x - \omega t)$ (onda transmitida), e dá origem, na corda 1, a uma onda que viaja em sentido contrário, $y_r = B_1 \cos(k_1 x + \omega t)$ (onda refletida). Dada a onda incidente y_i, de amplitude A_1, deseja-se obter a amplitude de reflexão $\rho = B_1/A_1$ e a amplitude de transmissão $\tau = A_2/A_1$.

(a) Use sua intuição para prever quais devem ser os valores de ρ e τ para os casos em que: (i) $\mu_1 >> \mu_2$; (ii) $\mu_1 = \mu_2$; e (iii) $\mu_1 << \mu_2$.

(b) Dada a tensão T da corda, calcule as velocidades de propagação v_1 e v_2 nas cordas 1 e 2, bem como os respectivos números de onda k_1 e k_2.

(c) O deslocamento total na corda 1 é $y_i + y_r$, e na corda 2 é y_t. Explique por que, no ponto de junção $x = 0$, deve-se ter $y_i + y_r = y_t$.

(d) Aplicando a terceira lei de Newton ao ponto de junção $x = 0$, explique por que, nesse ponto, deve-se ter também $\partial(y_i + y_r)/\partial x = \partial y_t/\partial x$.

(e) A partir de (c) e (d), calcule as amplitudes de reflexão ρ e de transmissão τ em função das velocidades v_1 e v_2. Compare com sua resposta no ítem (a). Discuta o sinal de ρ.

⑥ A refletividade r da junção do problema anterior é definida como a razão da intensidade da onda refletida para a intensidade da onda incidente, e a transmissividade t como a razão da intensidade transmitida para a incidente.

(a) Calcule r e t.

(b) Mostre que $r + t = 1$ e interprete este resultado.

⑦ Um arame de alumínio de comprimento $L_1 = 60$ cm e seção reta de 0,01 cm^2 está ligado a um arame de aço de mesma seção reta e de comprimento $L_2 = 86,6$ cm. Mantendo este arame composto sob tensão de 100 N, provocam-se ondas transversais usando uma fonte externa de frequência variável. Sendo a densidade do alumínio igual a 2,6 g/cm^3 e a do aço igual a 7,8 g/cm^3:

(a) Encontre a frequência de excitação mais baixa para que sejam observadas ondas estacionárias tais que o ponto de junção seja um nó;

(b) Qual é o número total de nós observados a esta frequência, excluindo os que se encontram nas duas extremidades do arame composto?

⑧ Uma corda de comprimento L é suspensa no teto por uma de suas extremidades, mantida fixa, permanecendo em repouso na vertical. Escolha o eixo x sobre a corda, sendo $x = 0$ a coordenada de sua ponta solta e $x = L$, de sua ponta fixa. Como visto no exercício ⑤ da Lista de Exercícios I, a velocidade v de propagação de uma onda transversal na corda é uma função da altura x, dada por $v = \sqrt{gx}$.

(a) Suponha que alguém cause um pulso na extremidade solta da corda. Calcule o tempo Δt que o pulso leva para subir até a extremidade fixa. Calcule o tempo total que o pulso toma para retornar a sua posição de partida. (*Sugestão:* $v = \frac{dx}{dt}$).

(b) Coloca-se a extremidade livre da corda a oscilar sob influência de uma força com frequência ν. Calcule a frequência necessária para que a corda oscile em seu modo fundamental. (*Sugestão:* para que isso ocorra, a onda que parte da extremidade a ser excitada deve retornar a ela **em fase** com a força oscilatória que a excita. Tente aplicar isto à situação mais simples de uma corda na horizontal, presa em uma extremidade e solta na outra, com tensão constante em todo seu comprimento, e determinar o que se pede; isto é análogo a um tubo de som com uma extremidade aberta e outra fechada).

(c) Ajusta-se a frequência da força de forma que o primeiro harmônico seja excitado (a corda possui um nó). Calcule esta frequência e a posição do nó.

(d) Por fim, calcule a frequência necessária para excitar o n-ésimo harmônico da corda e as posições de seus n nós.