

Comentários sobre os Relatórios R1 e R2

O objetivo deste texto é pontuar quais os conceitos mais importantes que deveriam ter ficado bem entendidos após as primeiras aulas e a confecção dos relatórios R1 e R2.

Item (a) do roteiro R1: A distribuição de medidas da distância focal de uma lente para um #USP com A=5, B=6, C=7 é mostrada na Figura 1, abaixo. Para os demais estudantes o formato dela é o mesmo, só mudam os 3 primeiros algarismos do valor da média, os 3 dígitos antes da vírgula (de 567 para os dígitos do #USP do estudante). Esta figura representa a probabilidade (eixo Y) de encontrar um determinado valor para a medida em função desse valor (eixo X).

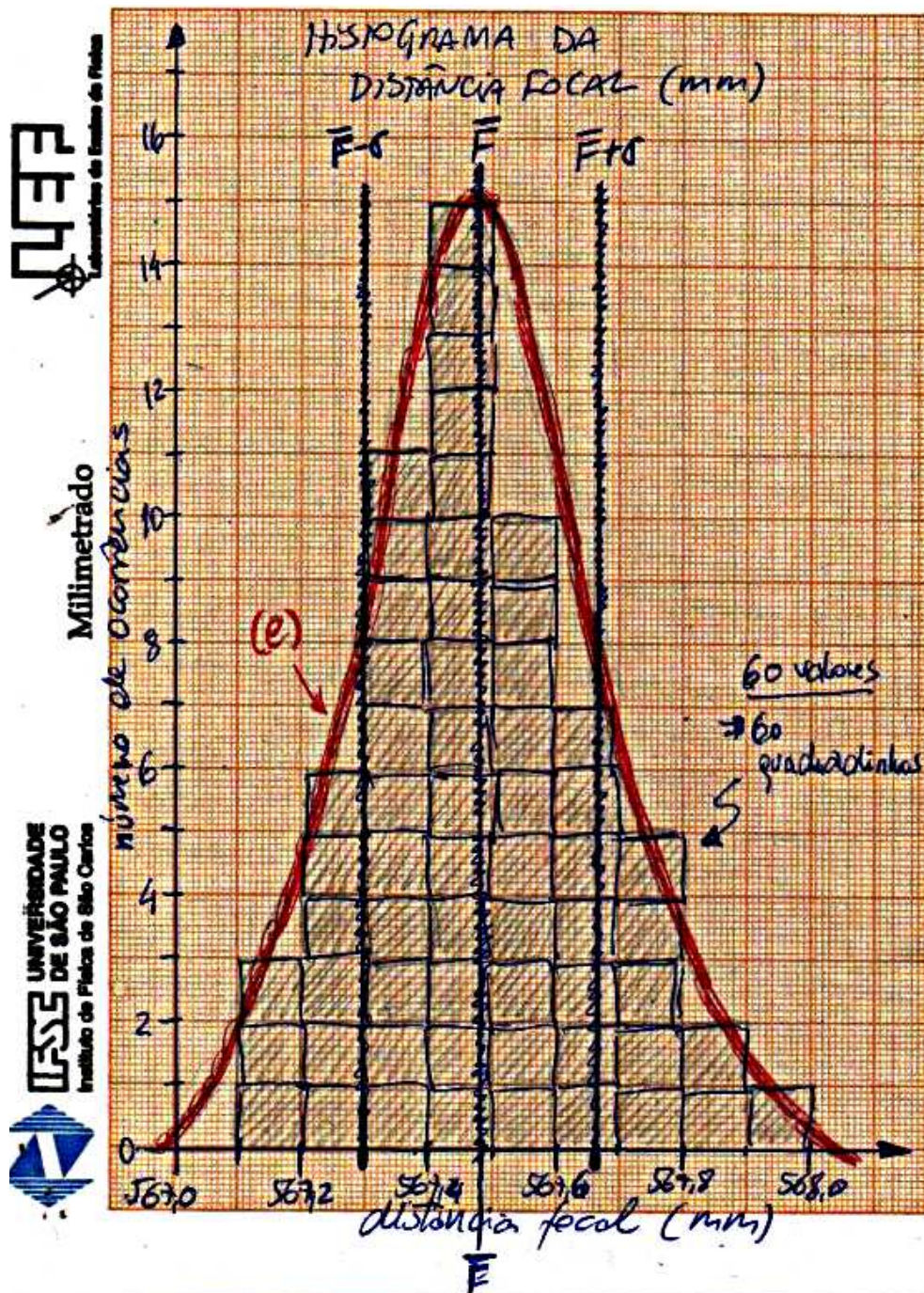


Figura 1 – Histograma obtido para um conjunto de 60 medidas da distância focal de uma lente convergente.

Apesar das medidas corresponderem a uma distância focal, a ideia é exatamente a mesma para qualquer tipo de medida, como já vimos para aquelas medidas de diâmetro, feitas para bolinhas de material plástico usando diferentes instrumentos.

A expressão matemática para uma distribuição de probabilidade gaussiana $f(x)$ para os valores x de uma medida é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (1), \quad \text{onde } \mu \text{ é a média e } \sigma \text{ é o desvio padrão da distribuição.}$$

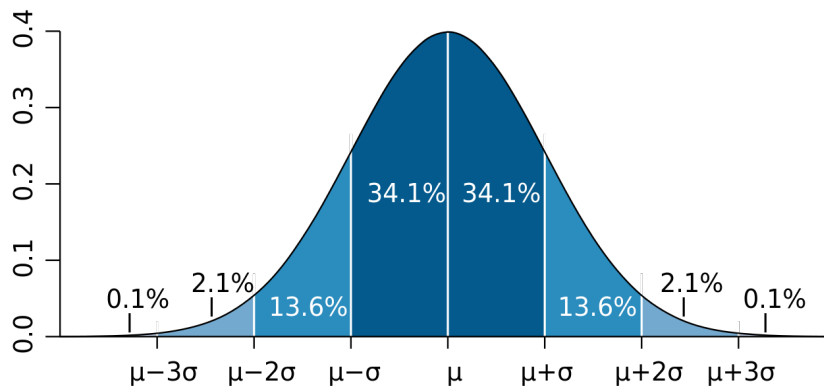


Figura 2 – Distribuição gaussiana de probabilidades.

Na Figura 2 é apresentado o formato da curva expressa por (1), o eixo X representa os possíveis valores da medida e o eixo Y é a probabilidade de observar a medida. Essa curva é o que se esperaria obter ao fazer um histograma com um número muito grande de medidas no conjunto de dados. A área embaixo da curva em um intervalo representa a probabilidade de obter uma medida com valor dentro do intervalo. Como a função está normalizada, a probabilidade de obter um valor qualquer $-\infty < x < +\infty$ é igual a 1 (experimentalmente fazemos isso calculando as probabilidades dividindo pelo número total de medidas no histograma). No intervalo $\mu - \sigma < x < \mu + \sigma$ a área vale $\sim 0,682$, assim a probabilidade é de $\sim 68\%$. Por outro lado, a probabilidade de uma medida cair em um valor abaixo de $\mu - \sigma$ ou acima $\mu + \sigma$ é dada por $1 - 0,68 = \sim 32\%$. A cada nova medida feita, nunca sabemos qual será o seu valor individual, mas um conjunto de medidas irá se distribuir de acordo com a expressão (1) e o histograma desse conjunto de medidas deverá se aproximar da Fig.2 quando tivermos um número suficientemente grande de medidas. Observe que $f(\mu - \sigma)$ e $f(\mu + \sigma)$ tem aproximadamente o valor de $\frac{1}{2}$ de seu valor máximo, por isso o valor 2σ é muitas vezes chamado de largura à meia altura. Por isso podemos usar os valores $x_1 = \mu - \sigma$ e $x_2 = \mu + \sigma$ para ajudar no esboço de uma curva gaussiana experimental (tem (e)).

(R1_b) e (R1_c) → No caso de nossa tabela de dados, a média é \bar{F} , ou $\bar{F} = ABC,4845$ mm e o desvio padrão é $\sigma = 0,1840$ mm

(R1_d) e (R1_e) → $(\bar{F} + \sigma) = ABC,6685$ mm → $\sim ABC,67$ mm e $(\bar{F} - \sigma) = ABC,3005$ mm → $\sim ABC,30$ mm. Foram acrescentadas linhas verticais nos valores (\bar{F}) , $(\bar{F} + \sigma)$ e $(\bar{F} - \sigma)$ na Figura 1. Observe que, no caso de termos uma distribuição do tipo normal ou gaussiana, \bar{F} coincide com o valor de máxima probabilidade (pico da gaussiana ocorre em \bar{F}). Apesar dos valores das medidas oscilarem aleatoriamente, uma propriedade da gaussiana é que, para um grande número de medidas, 68% delas irão cair no intervalo entre $(\bar{F} - \sigma)$ e $(\bar{F} + \sigma)$ e os outros 32% irão cair fora deste intervalo. Na nossa tabela de dados temos 41 medidas dentro do intervalo $[\bar{F} - \sigma, \bar{F} + \sigma]$ → prob =

$\text{num_no_intervalo}/N_{\text{total}} = 41/60 = 68,3\%$ e temos 19 medidas fora do intervalo $\rightarrow \text{prob} = 19/60 = 31,7\%$, valores bem próximos de 68% e 32%, esperados para uma distribuição ideal.

(R1_f) Repetindo mais uma vez o experimento só podemos afirmar que a probabilidade do valor obtido estar no intervalo $[F-\sigma, F+\sigma]$ será de $\sim 68\%$.

(R1_g) Repetindo 200X o experimento devemos esperar que a probabilidade de obter valores fora do intervalo $[F-\sigma, F+\sigma]$ será de $\sim 32\% \rightarrow 200 \times 0,32 = 64 \rightarrow$ a medida deverá cair fora do intervalo umas 64 vezes ao longo das 200 repetições.

(R1_h-R1_l) – O objetivo destes itens era mostrar que, ao aumentar o número de dados de um conjunto de medidas, os valores de média e desvio padrão do conjunto tendem a se aproximar dos valores “corretos” (aqueles da distribuição com número de dados tendendo ao infinito). Podemos entender isso com a seguinte argumentação: apesar de a cada medida termos a probabilidade de 68% de obtermos um valor entre $(\mu-\sigma)$ e $(\mu+\sigma)$, o resultado é aleatório e não temos como saber onde ele vai cair na distribuição. Vamos imaginar um conjunto com 4 medidas: nada garante que estas 4 medidas não caiam todas muito próximas umas das outras em uma região de valores distantes da média – veja os conjuntos de medidas marcadas em azul, amarelo e verde na Figura 3. Considere o mesmo conjunto total de dados e subconjuntos menores aleatoriamente escolhidos. Se tivermos sorte, mesmo com poucas medidas obtemos boas estimativas de média e desvio padrão, como aconteceu com o conjunto verde... mas é sorte, não tem como sabermos qual o caso... Entretanto, se pegarmos um conjunto bem maior, será muito difícil (pouco provável) que todas as medidas caiam no mesmo intervalo distante da média, como mostrado pelas medidas marcadas em vermelho na Fig.3. Para entender isso intuitivamente imagine um dado (destes que usamos em jogos) e as medidas são a face do dado que fica para cima a cada vez em que ele é lançado. Se jogarmos o dado apenas 2 ou 3 vezes, podemos obter a face 1 todas as vezes. Entretanto se jogarmos o dado umas 60 vezes é mais provável que tenhamos um resultado próximo de 10 vezes cada face para cima, mas é muito improvável que apenas uma das faces fique para cima as 60 vezes e nada mais apareça (a não ser que o dado tenha algum tipo de vício...). Esta é a ideia de “a cada medida termos a mesma chance de errar para cima ou para baixo da média”. Estamos supondo que nosso “dado” não é viciado. No caso (R1_l) o mais simples a fazer é aumentar o número de provas.

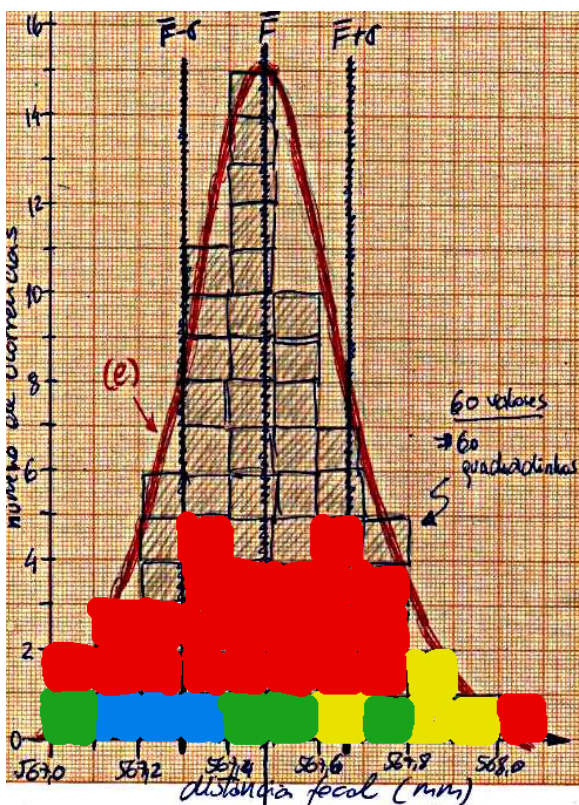


Figura 3 – Cada cor representa um subconjunto menor de medidas escolhidas aleatoriamente no conjunto original. A média e desvio padrão de conjuntos pequenos, como o amarelo e o azul, podem ficar bem distantes dos valores corretos. Por sorte (conjunto verde), mesmo com poucas amostras a média e o desvio podem dar valores razoáveis. Mas para garantir um bom resultado a maneira mais segura é usar um grande número de medidas (conjunto vermelho), onde é muito pouco provável todas as medidas do conjunto se concentrarem em um intervalo não representativo da distribuição.

Ideias desenvolvidas no R2 -

Toda vez que fazemos ou trabalhamos com uma medida o que devemos imaginar não é um valor numérico, mas sim algo parecido com a Fig.1 ou a Fig.2. De agora em diante sempre iremos nos referir a uma medida ou valor de alguma coisa como uma distribuição de probabilidades do tipo gaussiana. Assim, ao invés de apresentar um único valor, temos que informar como é a distribuição que se espera obter ao medir ou calcular cada determinada grandeza. A notação adotada para isso é informar qual o valor da média e qual o intervalo que apresenta probabilidade ~68% na distribuição. Assim, uma altura H, obtida de um conjunto de medidas cujo valor médio é 1,73 m e o desvio padrão é 0,05 m deve ser representada por $H = (1,73 \pm 0,05)\text{m}$. A quantidade 0,05 m é comumente chamada de incerteza de H. Observe que o dígito 5 é somado ou subtraído do dígito 3 do valor da média, por isso o 3 é o algarismo duvidoso da média e é nele que devemos parar de escrever o valor da média.

Exemplo prático: se você fizer uma tabela com N medidas de uma grandeza L e calcular a média, obtendo 10,786234 mm (com todos os dígitos que você obteve na calculadora) e o desvio padrão for 0,01747892 mm.

1º - você precisa arredondar o valor do desvio, porque a incerteza só pode ter 1 algarismo significativo, então você vai representar a incerteza na forma $\Delta L = 0,02$ mm (arredondando 0,017 para 0,02).

2º - observe a qual dígito da média o dígito 2 da incerteza será somado ou subtraído para achar o intervalo de 68%... neste caso é o dígito 8 do 10,786234 mm. Então você deve parar de escrever a média neste dígito. Como o próximo dígito é um 6, devemos arredondar a média para 10,79 mm.

3º - finalmente você deve escrever explicitamente o intervalo com os algarismos significativos corretos: **$L = (10,79 \pm 0,02)$ mm**

Existem outras notações diferentes para expressar a mesma ideia. Por exemplo, pode ser encontrado o mesmo resultado na forma $L = 10,79(2)$ mm → que indica incerteza de 2 na última casa do valor da média.

Quando trabalhamos com valores representados por distribuições e fazemos cálculos, temos que levar em conta o efeito das incertezas nos resultados dos nossos cálculos. Felizmente as distribuições gaussianas tem uma propriedade muito útil neste sentido: quando fazemos operações matemáticas com distribuições gaussianas, o resultado das operações também é uma distribuição gaussiana. Na prática o que fazemos é usar o valor médio das distribuições para obter o valor médio do resultado e aplicamos regras chamadas de propagação de incertezas para calcular a incerteza final das operações.

Exemplo: imagine que queremos obter a área de um retângulo de papel que teve seus lados **a** e **b** medidos. Obtivemos $a = (21,2 \pm 0,1)$ mm, $b = (29,7 \pm 0,5)$ mm. A expressão para calcular a área A a partir de a e b é: $A = a \cdot b$. Como A é uma função matemática que depende do valor de 2 distribuições gaussianas, A também será uma distribuição gaussiana. O valor médio, A_m , da área é dado por $A_m = a_m \cdot b_m$, onde a_m e b_m são os valores médios das distribuições a e b, respectivamente. Então: $A_m = 21,2$ mm x $29,7$ mm = $629,64$ mm² (por enquanto você deve copiar todos os dígitos obtidos na calculadora). A expressão para a propagação de incertezas da multiplicação $(A \pm \sigma_A) = (a \pm \sigma_a) \cdot (b \pm \sigma_b)$ é:

$$\sigma_A = (a \cdot \sigma_b) + (b \cdot \sigma_a) \quad (2).$$

No nosso caso:

$$\sigma_A = (21,2 \text{ mm} \cdot 0,5 \text{ mm}) + (29,7 \text{ mm} \cdot 0,1 \text{ mm})$$

$$\sigma_A = 10,6 \text{ mm}^2 + 2,97 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_A = 13,57 \text{ mm}^2$$

Acertando para apenas 1 significativo, a incerteza de A deverá ser: $1 \times 10^1 \text{ mm}^2$. Como valor médio de A é $629,64 \text{ mm}^2$ este 1 da incerteza é somado e subtraído ao 2 do valor médio para obter o intervalo de 68%, então este 2 é o duvidoso e é nele que devemos parar de escrever a área... como o próximo dígito é um 9, a área será arredondada para $63 \times 10^1 \text{ mm}^2$. Então: **$A = (63 \pm 1) \times 10^1 \text{ mm}^2$** .

Vamos tentar entender de um modo mais intuitivo de onde vem as expressões para a propagação de incertezas...

Observe a Figura 4, onde representamos graficamente a área $A = a \cdot b$. O valor médio da área é representado pela região hachurada em azul. Entretanto, se ao invés de a e b, considerarmos os valores $(a + \sigma_a)$ e $(b + \sigma_b)$ para calcular uma área máxima, obteríamos $A_{\text{máx}} = A + [(a \cdot \sigma_b) + (b \cdot \sigma_a)]$, onde o valor em colchetes é a soma das áreas hachuradas em vermelho na Fig.4. Estamos considerando que σ_a e σ_b são pequenos perto de a e b, de modo que a pequena área no canto superior direito $\sigma_a \cdot \sigma_b$ pode ser desprezada quando comparada com o valor de A. Aplicando o mesmo raciocínio para $(a - \sigma_a)$ e $(b - \sigma_b)$, obteríamos $A_{\text{mín}} = A - [(a \cdot \sigma_b) + (b \cdot \sigma_a)]$ (não mostrado na Fig.4). Assim, quando a e b variam em seus intervalos de incerteza $\pm \sigma$ a área varia no intervalo $[A_{\text{mín}}, A_{\text{máx}}]$. Ou seja, a área varia entre $(A - \sigma_A)$ e $(A + \sigma_A)$, com $\sigma_A = (a \cdot \sigma_b) + (b \cdot \sigma_a)$, exatamente a expressão (2) que aparece nas regras de propagação de incerteza para multiplicações. Ou seja, o intervalo $(A \pm \sigma_A)$ deve conter 68% dos valores de área obtidos a partir das combinações de valores a e b provenientes das distribuições $(a \pm \sigma_a)$ e $(b \pm \sigma_b)$.

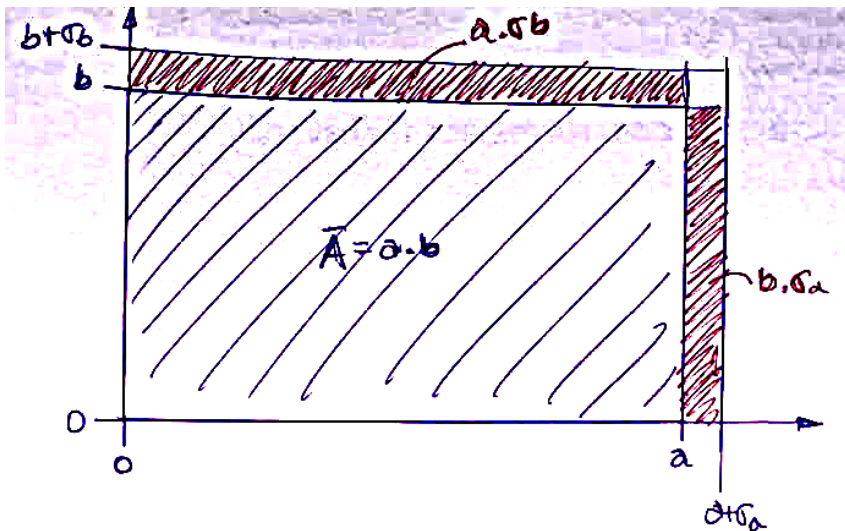


Figura 4 – exemplo do efeito das incertezas nas dimensões a e b para o cálculo da área $A = a \cdot b$.

Em outras palavras: se $A = a \cdot b$ e $(a \pm \sigma_a)$, $(b \pm \sigma_b)$ são distribuições gaussianas, **A** também é uma distribuição gaussiana representada por $(A \pm \sigma_A)$, com $\sigma_A = (a \cdot \sigma_b) + (b \cdot \sigma_a)$.

Finalmente, como as grandezas medidas e/ou calculadas são representadas por distribuições, para comparar essas grandezas precisamos aprender a comparar distribuições... Como as distribuições de uma grandeza são dadas em termos de probabilidades de obter um valor em determinados intervalos, para comparar grandezas devemos observar qual a probabilidade de um mesmo intervalo pertencer simultaneamente às distribuições comparadas, ou seja, devemos desenhar um esboço das distribuições e observar se elas apresentam superposição de intervalos com probabilidade não nula. É isso que foi sugerido no R1(ítens n-r). Observe a Figura 5.

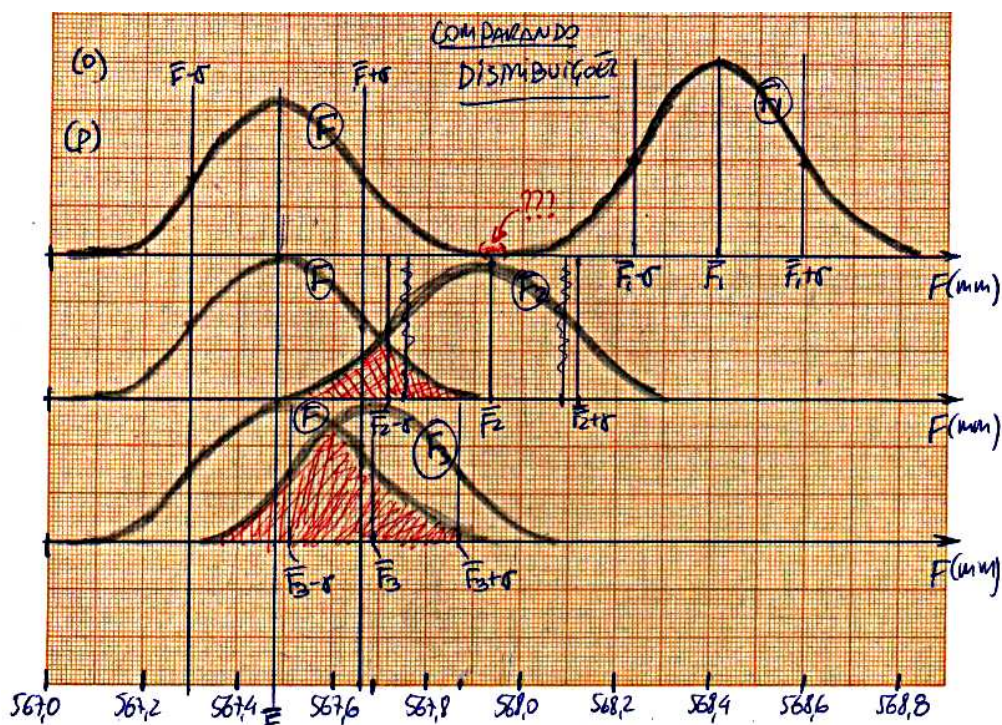


Figura 5 – Três exemplos de comparações entre distribuições de probabilidades. Os eixos Y representam a probabilidade de encontrar o valor da medida indicada no eixo X que é comum a todos os gráficos.

No gráfico superior as distribuições não apresentam nenhuma região de superposição de intervalos, ou a superposição de probabilidades é tão pequena que pode ser desprezada (simbolizado por ??? na figura), neste caso, pode-se afirmar que as distribuições representam grandezas distintas, ou seja, as distribuições não são equivalentes. No gráfico do meio, as distribuições apresentam uma boa área de superposição (hachurada em vermelho), ou seja a probabilidade de que as duas representem o mesmo resultado já não é tão pequena como no caso anterior. Finalmente no gráfico inferior, observa-se uma grande superposição das duas distribuições e pode-se afirmar que elas são experimentalmente equivalentes, representando a mesma grandeza.

Como normalmente não fazemos os esboços das distribuições de probabilidade, mas apenas representamos as distribuições pelo seu intervalo de 68% de probabilidade, $(A \pm \sigma_A)$, $(B \pm \sigma_B)$, $(C \pm \sigma_C)$, podemos usar regras simplificadas que representam as probabilidades de superposição das distribuições. Assim,

- se $|A-B| \leq 2 (\sigma_A + \sigma_B)$ existe uma grande superposição entre as distribuições de A e B e dizemos que **A e B são equivalentes**;

- se $|A-B| \geq 3 (\sigma_A + \sigma_B)$ as distribuições de A e B estão distantes e tem sobreposição quase nula, dizemos que **A e B são não equivalentes, diferentes ou distintas**;

- no caso intermediário, em que $2 (\sigma_A + \sigma_B) \leq |A-B| \leq 3 (\sigma_A + \sigma_B)$, as distribuições possuem uma pequena superposição, o que não permite optar por serem equivalentes ou não, dizemos que **o resultado é inconclusivo**.

Assim, as distribuições comparadas podem ser: equivalentes (experimentalmente indistinguíveis), não-equivalentes (experimentalmente distintas), ou a comparação é inconclusiva. Não podemos usar expressões como são próximos, parecidos, quase o mesmo valor... ser “próximo” ou não depende da incerteza (desvio padrão) da sua distribuição... Não podemos NUNCA usar estas palavras em nossas discussões de relatório ao comparar valores