3. Vetores

Grandezas escalares e grandezas vetoriais

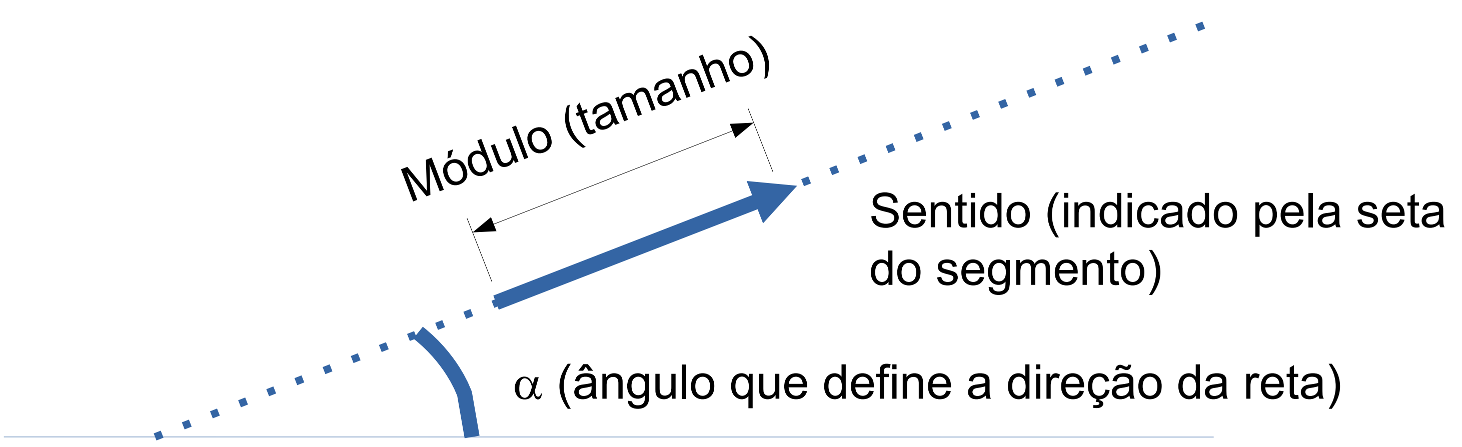
Grandezas escalares são aquelas que ficam definidas através de um número (e, provavelmente, as unidades correspondentes). Por exemplo, a altura de um prédio, a massa de um corpo, a densidade desse corpo, a pressão da atmosfera.

Por outro lado, existem grandezas que não podem ser definidas simplesmente por um número. Precisamos de mais “detalhes”… por exemplo: dizer “a velocidade de um carro é 50 km/h” não proporciona toda a informação que é necessária para saber para onde esse carro está indo… Será necessário também dizer em qual **direção** ele se movimenta (Norte-Sul, Leste-Oeste, Noroeste, etc) e ainda em qual sentido… Assim, a velocidade de um corpo é um exemplo de **grandeza vetorial**.

Mas, o que é um vetor?
Um vetor é simplesmente um **segmento com orientação definida**. Ele pode representar uma grandeza física, tal como a posição de um objeto, a sua velocidade, a aceleração, etc.

Um vetor possui três características:

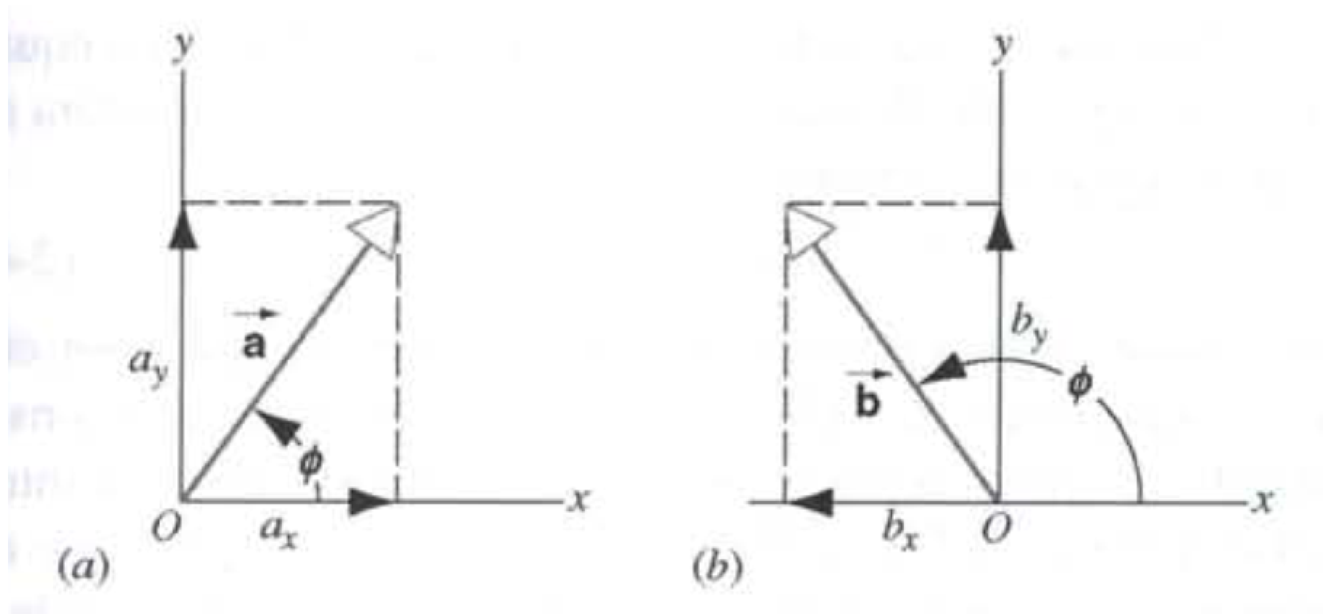
* **Módulo ou intensidade**: é o “tamanho” do vetor. Ele se representa com um número positivo, com as unidades correspondentes.
* **Direção**: ela corresponde à inclinação da reta sobre a qual o vetor é representado.
* **Sentido**: Dado que toda reta tem dois sentidos, o vetor deverá ter um desses sentidos da reta que representa a direção mencionada acima.



Um exemplo: a posição de um objeto em um plano.

Para definir a posição de um objeto em um plano é necessário um sistema de coordenadas com dois eixos. Chamaremos esses eixos de *x* e *y*.
Na figura abaixo mostramos dois vetores **a** e **b** que indicam duas posições no plano *xy*. Observe-se que o ângulo que indica a direção de cada vetor é o ângulo formado pelo eixo horizontal (no seu sentido positivo) e o segmento do vetor correspondente.
São mostradas também na figura as ***componentes*** dos vetores **a** e **b**. Por exemplo, as c

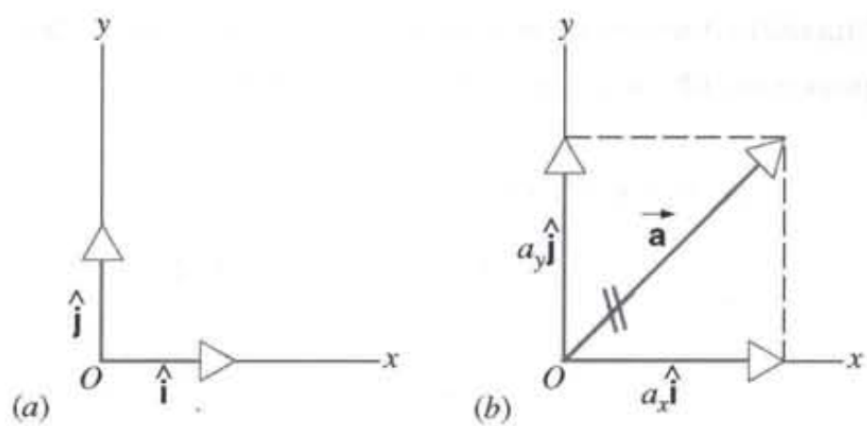
$$a_x = a \cos \phi \qquad \text{e} \qquad a_y = a \,\text{sen}\, \phi.$$



As componentes do vetor são as ***projeções*** dele em cada um dos eixos. Observe que conhecer as componentes do vetor nos permite determinar a sua intensidade e também a direção:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{tg}\phi = a_y/a_x.$$

Uma forma mais formal de descrever um vetor é usar a definição de **vetores unitários** ou **versores**.
O que é um vetor unitário? É um vetor de módulo (tamanho) igual a um (1), por isso o termo unitário (uma unidade). E ele possui a orientação e sentido de um determinado eixo do sistema de coordenadas utilizado. Na figura abaixo são mostrados os vetores unitários correspondentes aos eixos x e y do sistema de coordenadas que estamos usando. Eles são chamados de $\hat{\mathbf{i}}$ e $\hat{\mathbf{j}}$.



Usando os versores, escrevemos o vetor **a** como:

$$\vec{\mathbf{a}} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}}.$$

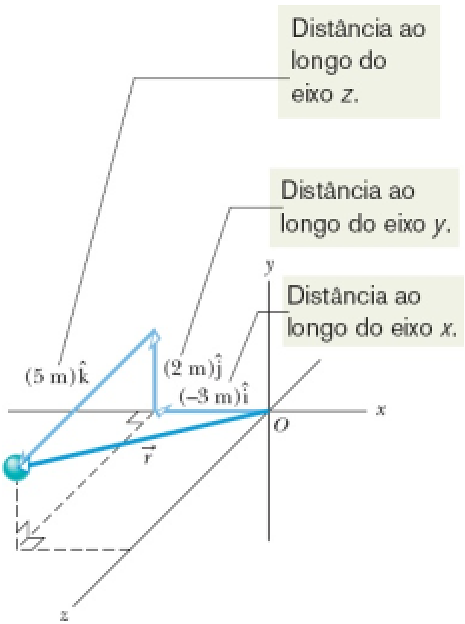
4. Movimento em duas ou três dimensões

Como já foi mencionado, em geral, um objeto pode se movimentar em nosso espaço cotidiano, o qual possui três dimensões. Também é possível encontrar objetos que se movimentam em planos (duas dimensões). Assim, agora vamos a considerar a cinemática desses corpos.

Posição e deslocamento

Vamos definir a **posição** de um corpo no espaço tridimensional como o vetor que vai desde a origem do sistema de coordenadas até o ponto ocupado pelo corpo, no instante de tempo considerado. Designamos esse vetor como:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + \mathrm{z(t)}\hat{k}$$



Observe que, se o corpo está em movimento, o vetor posição deve mudar com o tempo (por isso a dependência dele com a variável t). Também, o vetor posição tem três componentes: $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ as quais indicam a posição do objeto ao longo de cada um dos eixos de coordenadas.

Por exemplo, na figura ao lado, a posição do corpo, no instante t_0 considerado é:

$$\vec{r}(t_0) = -3\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k} \Longrightarrow \begin{aligned} x(t_0) &= -3 \\ y(t_0) &= 2 \\ z(t_0) &= 5 \end{aligned}$$

O movimento do corpo no espaço produz que ele se desloque. O **deslocamento** do objeto entre os instantes de tempo t_1 e t_2 é o **vetor** definido como:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$$

cujas componentes são:

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} + \Delta z\hat{k}$$

$$\Delta\vec{r} = \left(x(t_2) - x(t_1)\right)\hat{i} + \left(y(t_2) - y(t_1)\right)\hat{j} + \left(z(t_2) - z(t_1)\right)\hat{k}$$

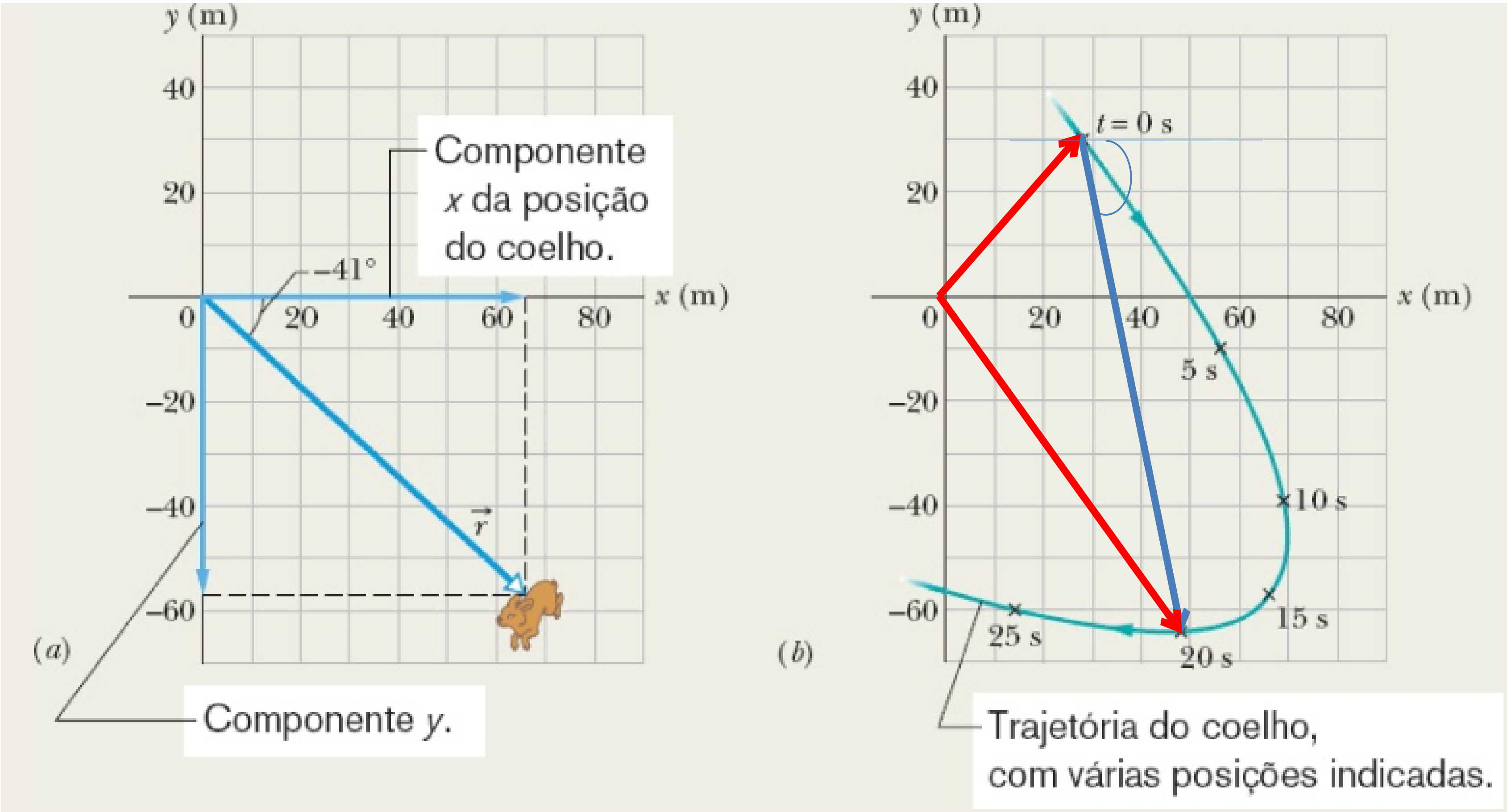
Exemplo: vamos considerar o movimento de um coelho sobre um chão plano (portanto, bidimensional, que vamos chamar de plano *xy*). Consideremos que a posição do coelho é descrita pelas seguintes **funções de movimento** (as componentes do vetor posição):

$$x(t) = -0,31t^2 + 7,2t + 28$$

$$y(t) = 0,22t^2 - 9,1t + 30$$

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$$

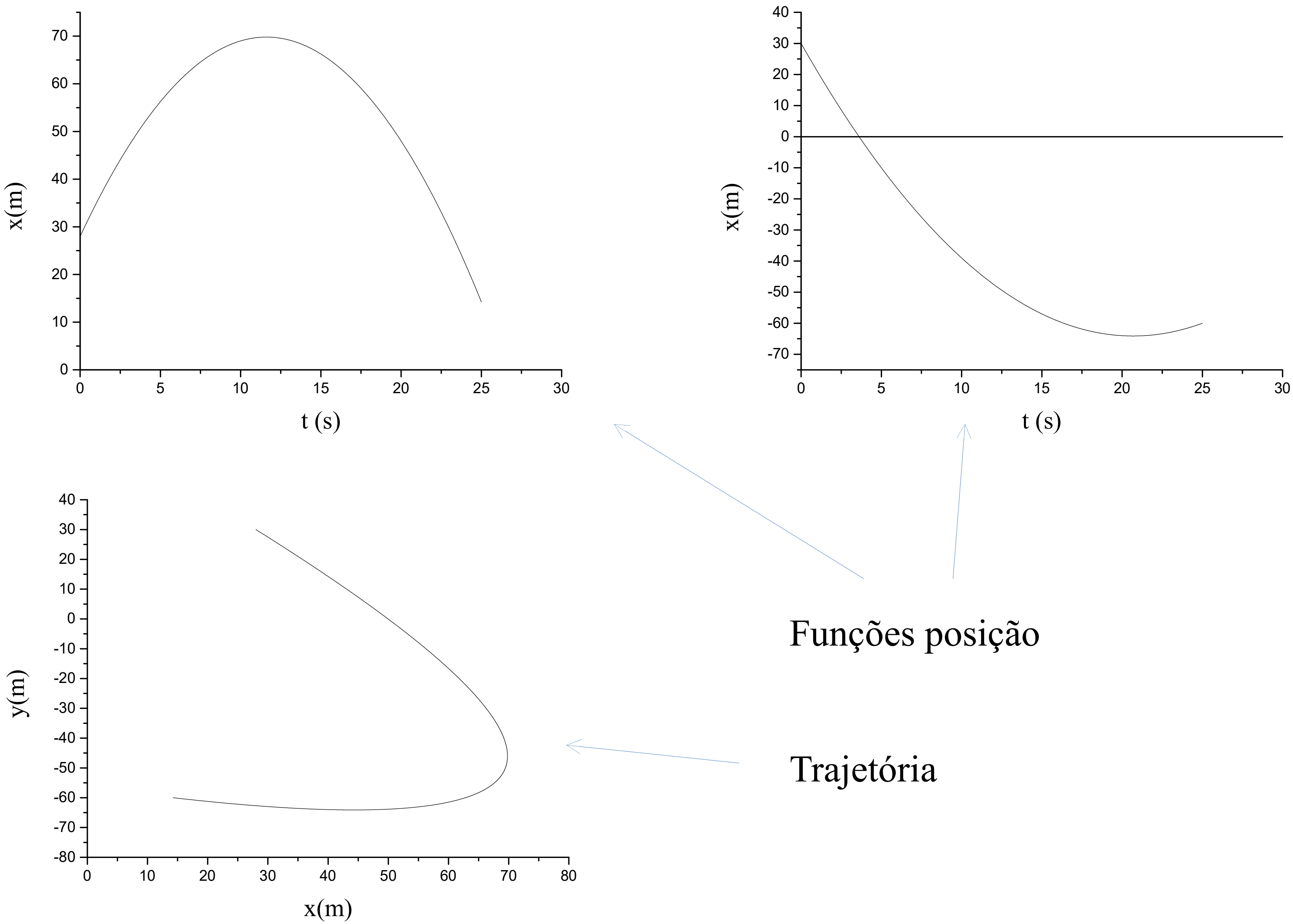
Vamos determinar: a) a posição do coelho no instante t = 15s (obtenha o vetor posição, o seu módulo e a sua direção); e b) o vetor deslocamento (também o módulo e a direção) do coelho entre o instante inicial e t = 20s.



A figura acima mostra a posição do coelho num determinado instante de tempo (a) e a **trajetória** seguida pelo bichinho (b).

Trajetória é a curva (ou caminho) seguido por um objeto no espaço no qual se movimenta.

Observe: não se deve confundir o gráfico das funções posição $x(t)$ e $y(t)$ com o gráfico da trajetória. São gráficos totalmente diferentes.



Velocidade média e velocidade instantânea

As velocidades média e instantânea em duas ou três dimensões são definidas de forma simples, como extensões das definições para uma única dimensão.

Definimos a velocidade média do objeto como o deslocamento sofrido dividido pelo intervalo de tempo no qual ocorreu esse deslocamento:

$$\vec{v}_{med} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$$\vec{v}_{med} = \left(v_{med}\right)_x \hat{i} + \left(v_{med}\right)_y \hat{j} + \left(v_{med}\right)_z \hat{k}$$

$$\vec{v}_{med} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{k}$$

Voltando ao **exemplo do coelho**, vamos calcular agora a velocidade média do coelho durante os 15 s iniciais do seu movimento. Vamos obter o vetor velocidade média, e o módulo e a direção correspondente.

Velocidade instantânea

A velocidade em um dado instante de tempo é obtida a partir da velocidade média reduzindo o intervalo de tempo *Δt* até torná-lo próximo de zero. Quando *Δt* diminui, a velocidade média se aproxima cada vez mais de um valor limite, que é a **velocidade instantânea**:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

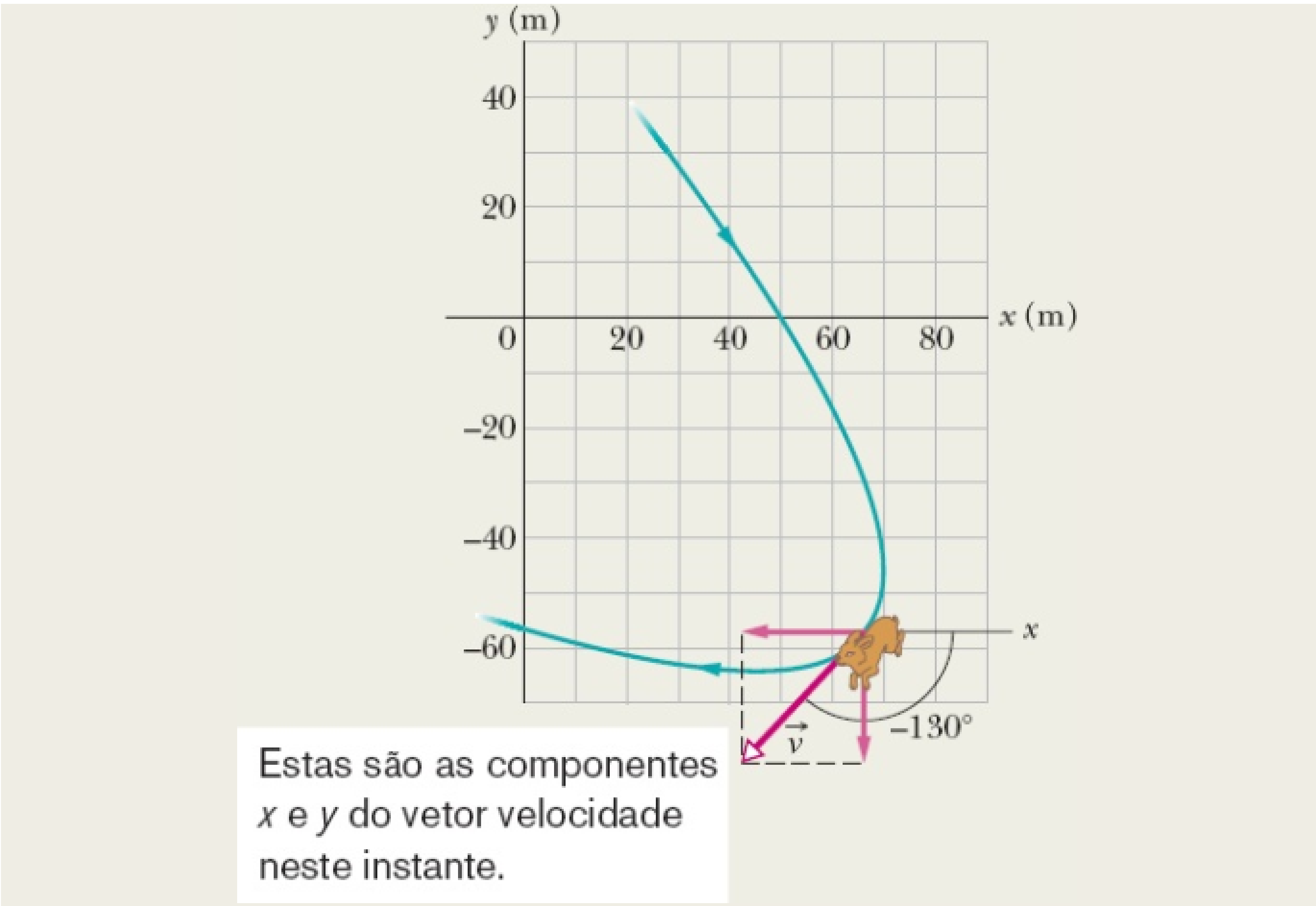
$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

$$\vec{v}(t) = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k} = \frac{dx(t)}{dt}\hat{i} + \frac{dy(t)}{dt}\hat{j} + \frac{dz(t)}{dt}\hat{k}$$

A função velocidade instantânea (t) é a derivada da função posição (t).

Exemplo: determine a velocidade instantânea do coelho para qualquer instante de tempo. Agora determine o vetor velocidade instantânea para t = 15 s, e encontre também o módulo e a direção.

Observe: o vetor velocidade instantânea sempre é tangente à curva da trajetória em cada instante de tempo.



Aceleração média e aceleração instantânea

A **aceleração** é à taxa de variação da velocidade de um objeto com o tempo.

De maneira análoga ao que foi feito com a velocidade, vamos definir a **aceleração média** de um corpo, em um determinado intervalo de tempo *Δt*, no qual o corpo experimentou uma variação de velocidade *Δ*, como:

$$\vec{a}_{med} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$$\vec{a}_{med} = \left(a_{med}\right)_x \hat{i} + \left(a_{med}\right)_y \hat{j} + \left(a_{med}\right)_z \hat{k}$$

$$\vec{v}_{med} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\hat{j} + \frac{\Delta v_z}{\Delta t}\hat{k}$$

E**xemplo:** determine a aceleração média do coelho durante os 15 s iniciais do seu movimento (vetor, módulo e direção).

A aceleração em um dado instante é obtida a partir da aceleração média reduzindo o intervalo de tempo Δt até torná-lo próximo de zero. Quando Δt diminui, a aceleração média se aproxima cada vez mais de um valor limite, que é a **aceleração instantânea**:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

$$\vec{a}(t) = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$

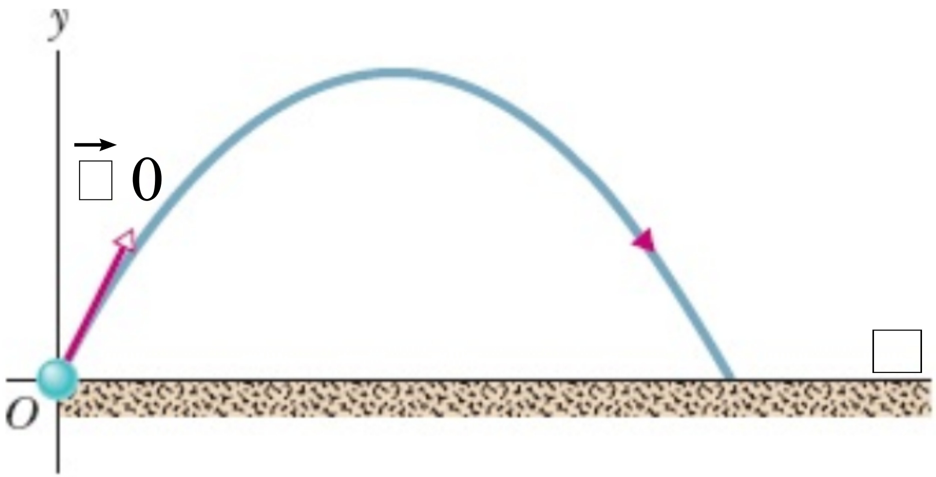
$$\vec{a}(t) = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k}$$

A função aceleração instantânea (t) é a derivada da função velocidade (t). Também é a segunda derivada da função posição (t).

Exemplo: determine a aceleração instantânea do coelho para qualquer instante de tempo. Agora determine o vetor aceleração instantânea para t = 15 s, e encontre também o módulo e a direção.

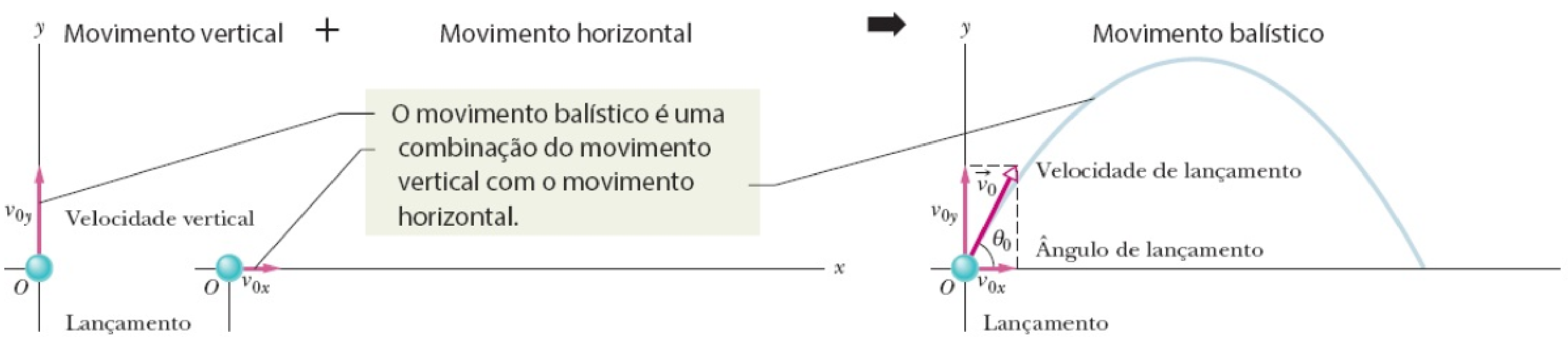
Lançamento de projéteis

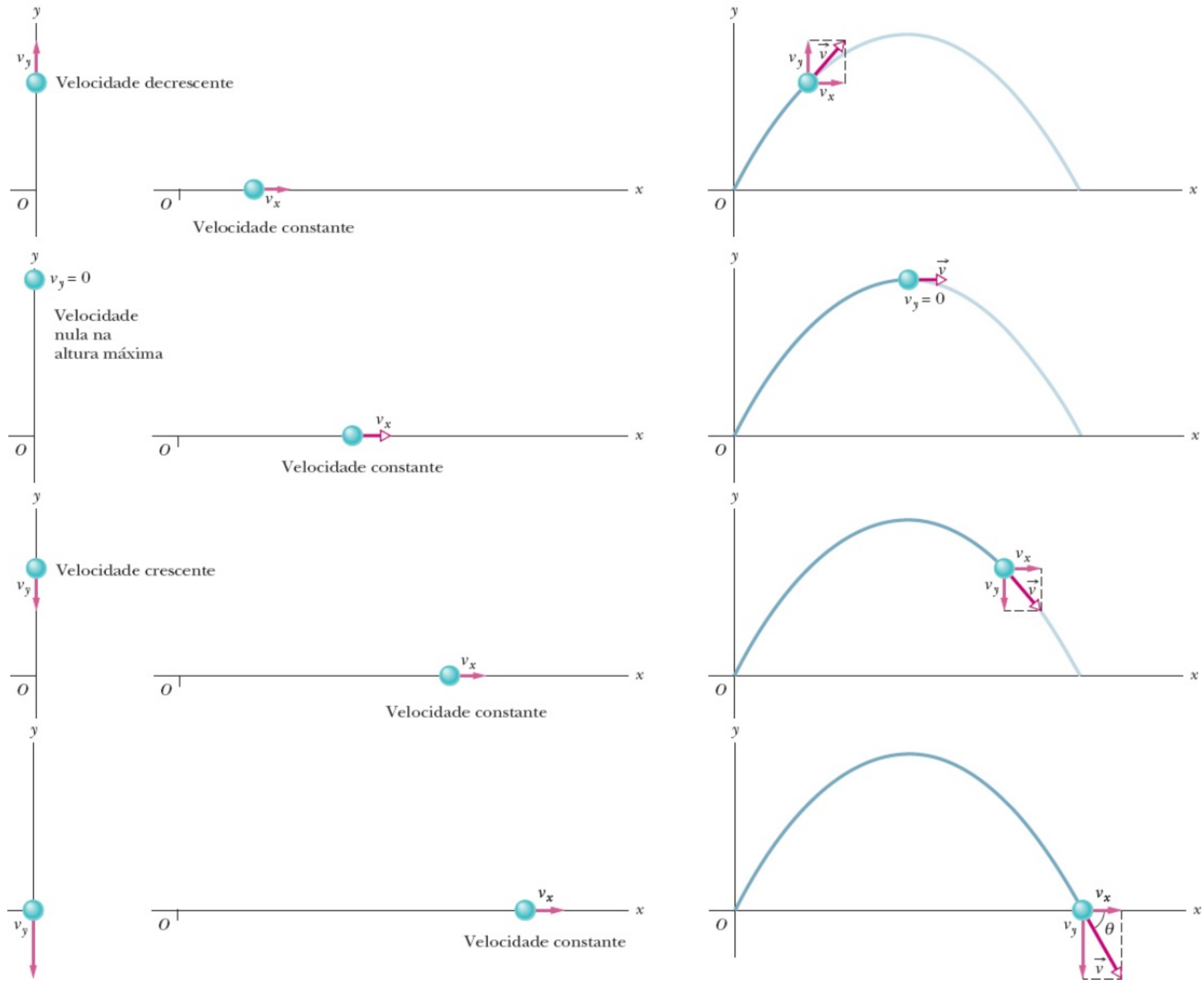
Vamos considerar o problema do lançamento de um projétil, como exemplo de movimento em duas dimensões.



Observe a figura: um corpo (uma bola, por exemplo) sai desde alguma posição inicial com velocidade inicial .

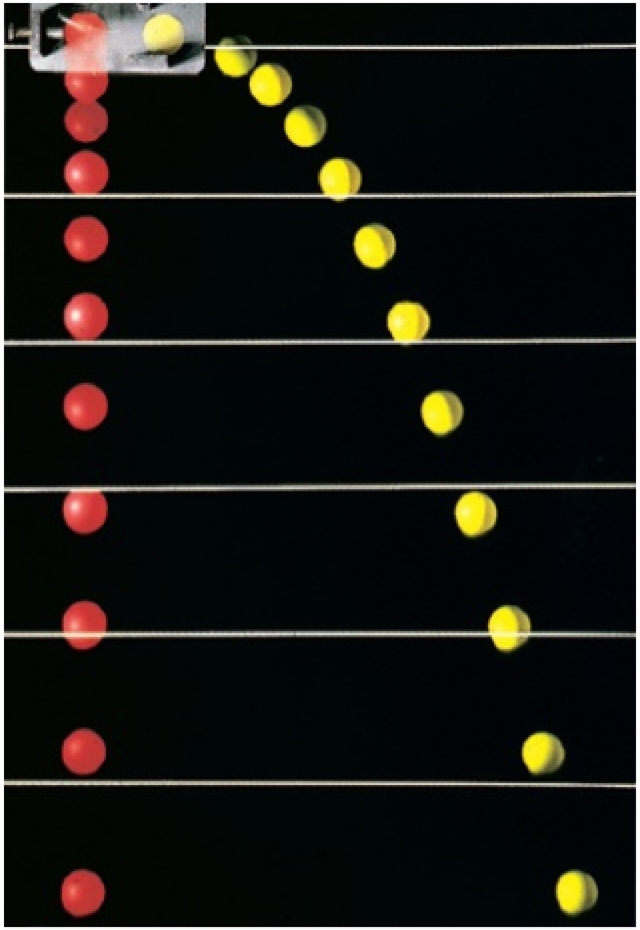
A bola se movimenta no plano *xy*, e queremos descrever completamente a seu movimento.





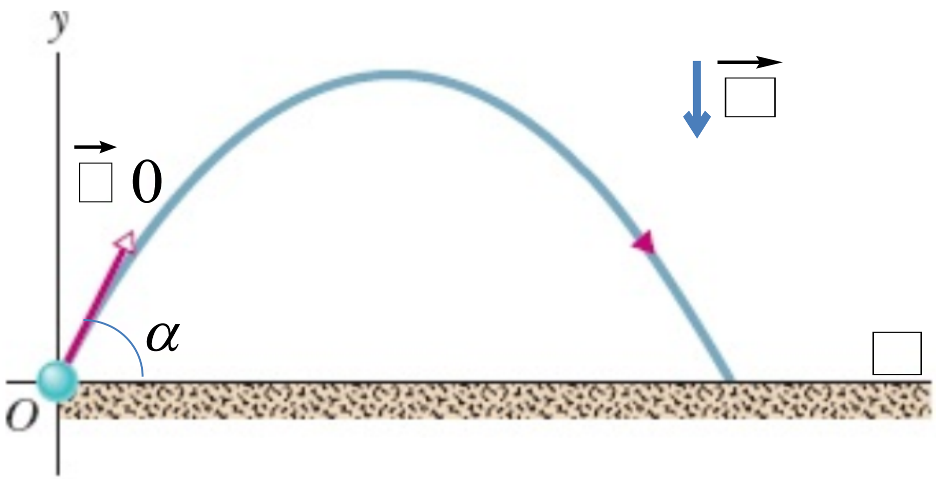
Velocidade decrescente
Velocidade constante
$v_y = 0$
Velocidade
nula na
altura máxima
Velocidade constante
Velocidade crescente
Velocidade constante
Velocidade constante

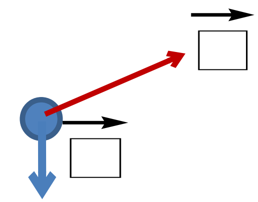
Observe: os movimentos vertical e horizontal são **independentes**.



Duas bolas lançadas desde a mesma altura. A figura mostra uma sequência de fotografias que indicam as posições sucessivas de ambos corpos. Uma delas (a vermelha) sai do repouso, a outra (amarela) tem uma velocidade inicial vertical. Observe que as duas chegam no chão ao mesmo tempo. Isso significa que ambas tem movimentos verticais iguais, e que o movimento horizontal da bola amarela não afetou o seu movimento horizontal.

No movimento balístico, o corpo está sujeito à **aceleração da gravidade** .





O corpo em qualquer ponto da sua trajetória

Observe que a aceleração é vertical (e aponta para baixo), logo ela atua somente no movimento vertical. Além disso, ela é uma aceleração constante.
O vetor aceleração do corpo pode ser escrito como:

$$\vec{a}(t) = \vec{g} = 0\hat{i} - g\hat{j}$$

$$\vec{a}(t) = -g\hat{j}$$

$$\Longrightarrow$$

$$a_x(t) = 0$$

$$a_y(t) = -g$$

$$\vec{v}_0 = v_0 \cos(\alpha)\hat{i} + v_0 \sin(\alpha)\hat{j}$$

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\hat{i} + v_y(t)\hat{j}$$

Movimento horizontal: obtenção de $a_x(t)$, $v_x(t)$ e $x(t)$

Dado que $a_x(t) = 0 \rightarrow v_x(t)$ deve ser uma constante. Essa constante é o valor inicial da velocidade em x:

$$a_x(t) = 0$$
$$v_x(t) = v_0 \cos(\alpha) = \text{constante}$$

Dado que em x a velocidade é constante, então a posição é dada por:

$$x(t) = v_x t + x_0$$
$$x(t) = v_0 \cos(\alpha) t + x_0$$

Movimento vertical: obtenção de $a_y(t)$, $v_y(t)$ e $y(t)$

Dado que $a_y(t)$ = -g = constante $\rightarrow v_y(t)$ deve variar linearmente com o tempo:

$$a_y(t) = -g$$
$$v_y(t) = -gt + v_{y0} = -gt + v_0 \sin(\alpha)$$

Dado que a aceleração em y é constante, então a posição vertical é dada por:

$$y(t) = \frac{a_y}{2} t^2 + v_{y0} t + y_0$$

$$y(t) = -\frac{g}{2} t^2 + v_0 \sin(\alpha) t + y_0$$

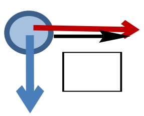
Vetores aceleração, velocidade e posição do projétil

$$\vec{a}(t) = 0\hat{i} - g\hat{j}$$

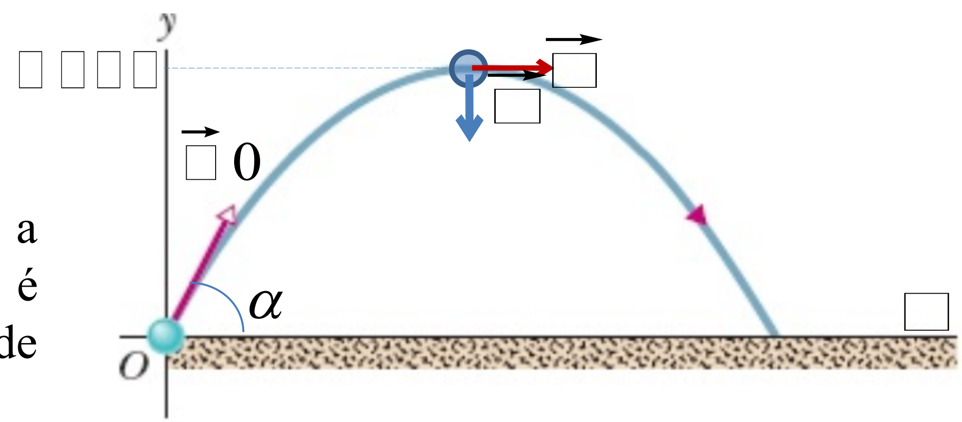
$$\vec{v}(t) = \left(v_0 \cos(\alpha)\right)\hat{i} + \left(-gt + v_0 \sin(\alpha)\right)\hat{j}$$

$$\vec{r}(t) = \left(v_0 \cos(\alpha)t + x_0\right)\hat{i} + \left(-\frac{g}{2}t^2 + v_0 \sin(\alpha)t + y_0\right)\hat{j}$$

Cálculo da **altura máxima** atingida pelo projétil



+ 0



Na posição de altura máxima, a componente y da velocidade do corpo é nula. Isso acontece em um instante de tempo particular, t_0. Calculemos t_0:

$$v_y(t_0) = -gt_0 + v_0 \sin(\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \quad t_0 = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g}$$

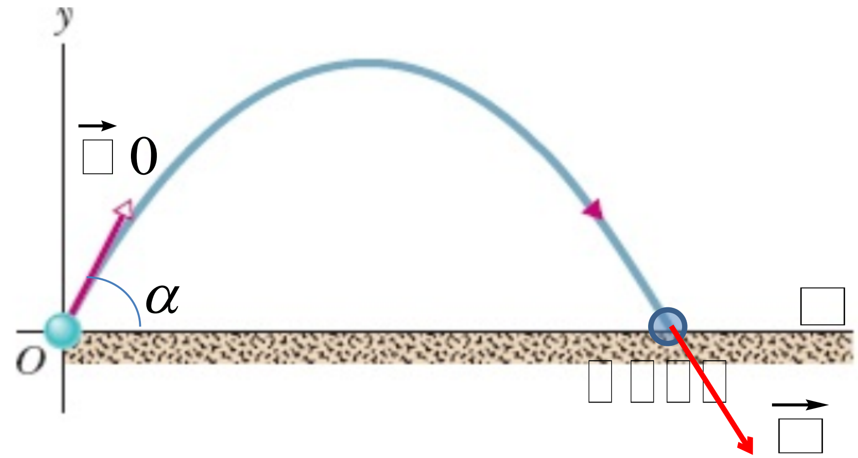
$$y_{MAX} = y(t_0) = -\frac{g}{2}t_0{}^2 + v_0 \sin(\alpha)t_0 + y_0$$

$$y_{MAX} = -\frac{g}{2}\left(\frac{v_0 \sin(\alpha)}{g}\right)^2 + v_0 \sin(\alpha)\left(\frac{v_0 \sin(\alpha)}{g}\right) + y_0$$

$$y_{MAX} = y_0 + \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g}$$

Cálculo do **alcance horizontal** atingido pelo projétil

Quando o projétil retorna ao chão, ele tem seu máximo deslocamento horizontal, x_{MAX}. Isso acontece em um instante de tempo particular, t_f. Calculemos t_f:



$$y(t_f) = -\frac{g}{2}t_f^2 + v_0\sin(\alpha)t_f + y_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad At_f^2 + Bt_f + C = 0$$

$$\Rightarrow \quad t_f = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{-v_0\sin(\alpha) \pm \sqrt{v_0^2\sin^2(\alpha) + 2gy_0}}{-g}$$

$$t_f = \frac{v_0\sin(\alpha)}{g} \mp \sqrt{\frac{v_0^2\sin^2(\alpha)}{g^2} + \frac{2y_0}{g}}$$

$$t_f = \frac{v_0\sin(\alpha)}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2\sin^2(\alpha)}{g^2} + \frac{2y_0}{g}}$$

Observe que para $y_0 = 0$ temos: $t_f = \dfrac{2v_0\sin(\alpha)}{g}$

$$x_{MAX} = x(t_f) = v_0\cos(\alpha)t_f + x_0 = v_0\cos(\alpha)\frac{2v_0\sin(\alpha)}{g} + x_0 = \frac{v_0^2 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{g} + x_0$$

$$x_{MAX} = \frac{v_0^2\sin(2\alpha)}{g} + x_0$$

Equação da trajetória do projétil

A trajetória é o caminho (a curva) percorrida pelo projétil no plano xy. Portanto, ela corresponde à curva $y(x)$. Vamos obter essa curva. Lembremos que $x(t)$ e $y(t)$ são dados por:

$$x(t) = v_0 \cos(\alpha) t + x_0$$

$$y(t) = -\frac{g}{2} t^2 + v_0 \sin(\alpha) t + y_0$$

Vamos isolar t da equação $x(t)$ e colocar esse t na expressão de $y(t)$:

$$x = v_0 \cos(\alpha) t + x_0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x - x_0}{v_0 \cos(\alpha)}$$

$$y(t) = -\frac{g}{2} t^2 + v_0 \sin(\alpha) t + y_0$$

$$y = -\frac{g}{2} \left(\frac{x - x_0}{v_0 \cos(\alpha)} \right)^2 + v_0 \sin(\alpha) \left(\frac{x - x_0}{v_0 \cos(\alpha)} \right) + y_0$$

Esta é a equação de uma parábola.