EESC · USP
Escola de Engenharia de São Carlos
Universidade de São Paulo

USP

SEP0506 – Sistemas de Apoio à Decisão

INTRODUÇÃO À TEORIA FUZZY

Lucas Zanon (Doutorando)
Prof. Luiz C. R. Carpinetti

A função de pertinência reflete o conhecimento que se tem em relação a intensidade com que o objeto pertence ao conjunto fuzzy.

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}$$

Conjunto fuzzy

Função de pertinência

Universo de discurso

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}$$

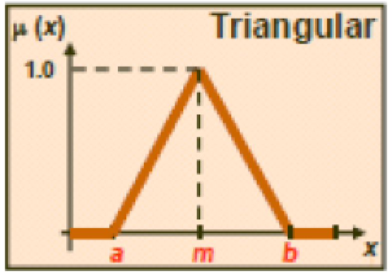
Conjunto fuzzy

Função de pertinência

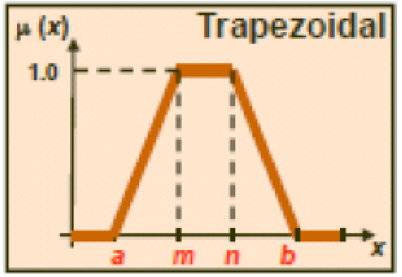
Universo de discurso

Para um conjunto fuzzy A, contínuo e finito, cada elemento definido no universo de discurso X, pode ser denotado por uma função de pertinência $\mu_A(x): x \rightarrow [0, 1]\, ;\, onde\ x \in X$

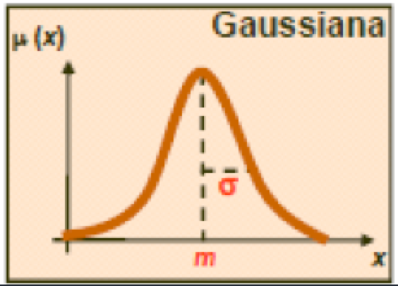
Principais tipos de função de pertinência:



$$\mu_A = \begin{cases} 0, & se\ x \leq a \\ \dfrac{x-a}{m-a}, & se\ x \in [a, m] \\ \dfrac{b-x}{b-m}, & se\ x \in [m, b] \\ 0, & se\ x \geq b \end{cases}$$



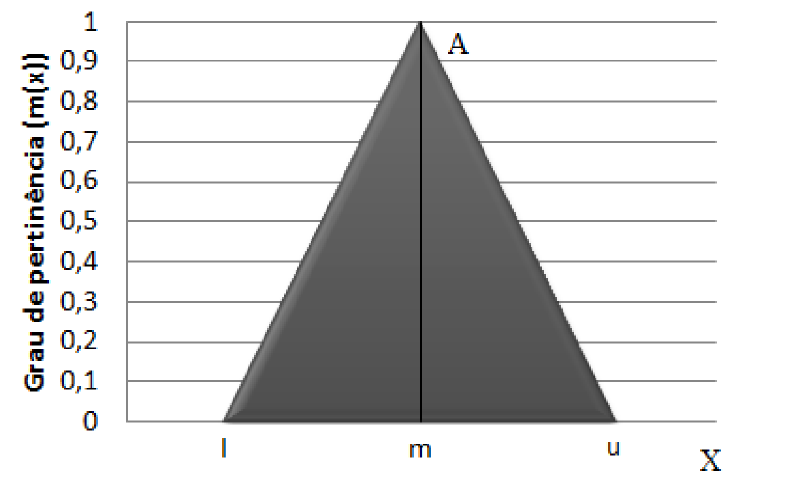
$$\mu_A = \begin{cases} 0, & se\ x \leq a \\ \dfrac{x-a}{m-a}, & se\ x \in [a, m] \\ 1, & se\ x \in [m, n] \\ \dfrac{b-x}{b-n}, & se\ x \in [n, b] \\ 0, & se\ x \geq b \end{cases}$$



$$\mu_A = e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Números fuzzy

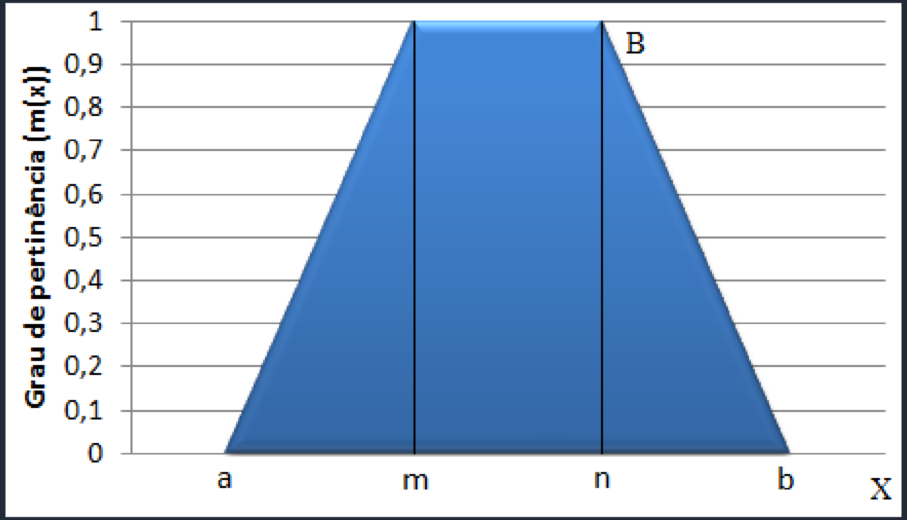
- Um número fuzzy representa um conjunto fuzzy em universo discreto ou contínuo;
- Um número fuzzy é normalmente representado pela função de pertinência;
  - Um número fuzzy (contínuo) com função de pertinência triangular é descrito graficamente por segmentos lineares na forma de um triângulo.
  - Representado numericamente pelos termos: (l, m, u)



$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & se\ x \leq l \\ \frac{x-l}{m-l}, & se\ x \in [l, m] \\ \frac{u-x}{u-m}, & se\ x \in [m, u] \\ 0, & se\ x \geq u \end{cases}$$

Números fuzzy

- Número fuzzy com função de pertinência trapezoidal, representado numericamente por: (a, m, n, b)



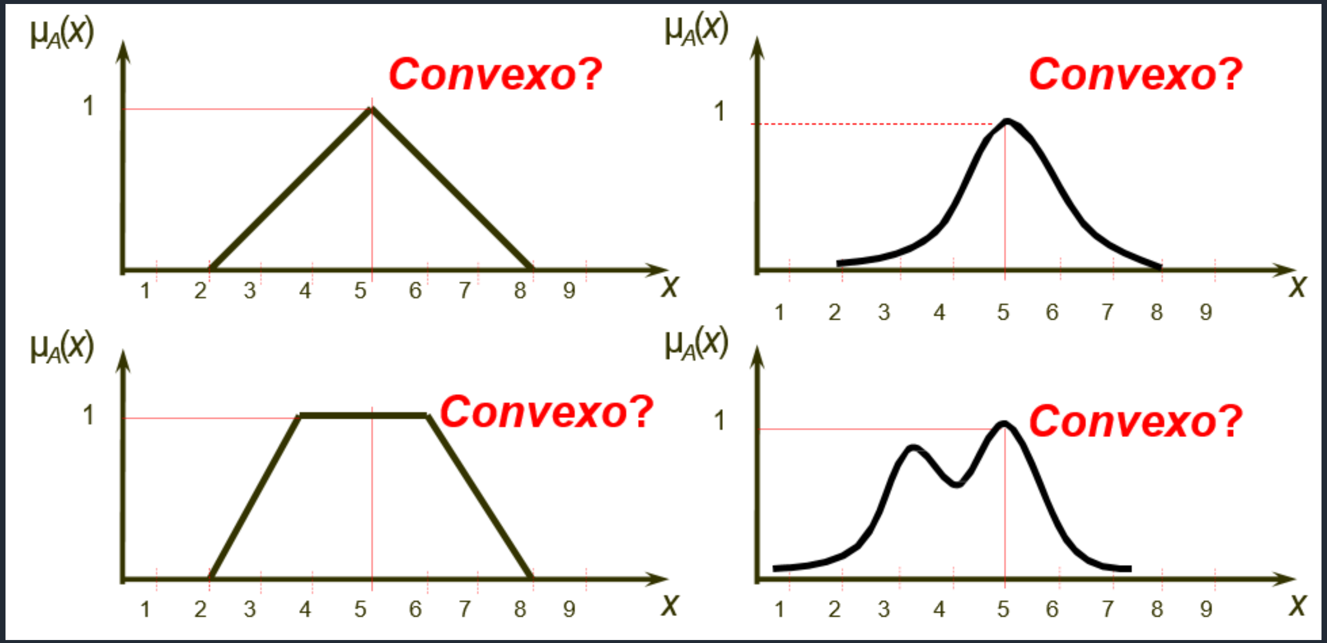
$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & se\ x \leq a \\ \dfrac{x-a}{m-a}, & se\ x \in [a, m] \\ 1, & se\ x \in [m, n] \\ \dfrac{b-x}{b-m}, & se\ x \in [n, b] \\ 0, & se\ x \geq b \end{cases}$$

Teoria dos conjuntos Fuzzy

- Todo número fuzzy deve satisfazer as condições de normalidade e convexidade:
  - **Convexidade**: Um conjunto *fuzzy* é convexo quando satisfaz a condição:

$\lambda \in [0,1]$ e $x_1, x_2 \in X$.

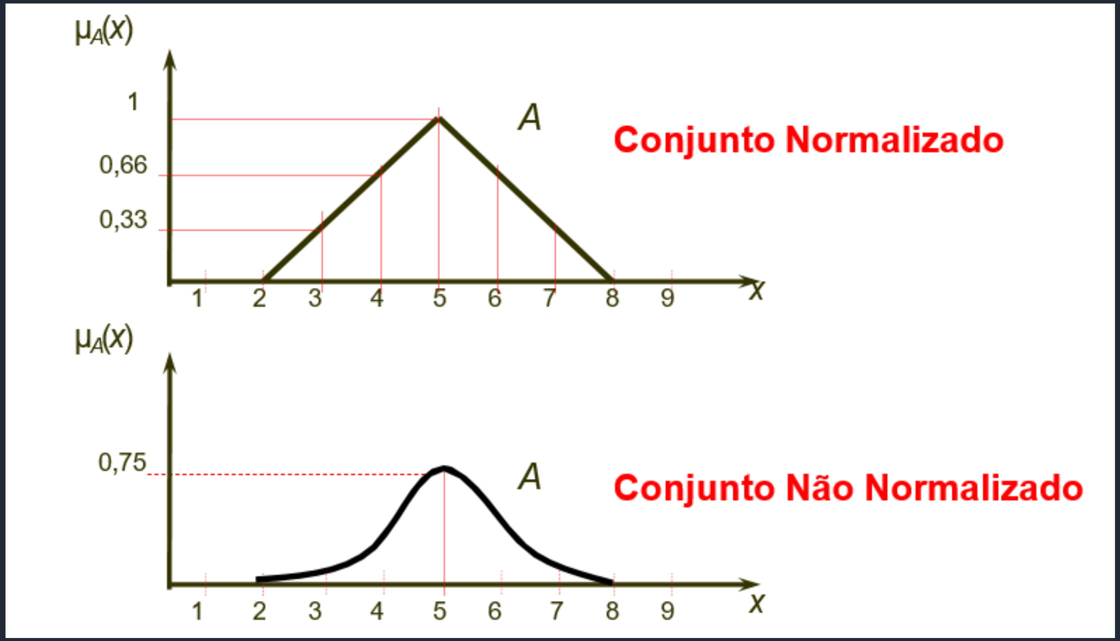
$$\mu_A\,[\lambda\, x_1 + (1-\lambda)x_2] \geq \min\,[\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)]$$



Teoria dos conjuntos Fuzzy

- **Normalidade**: Ao menos um dos elementos deve ter grau de pertinência igual a 1, conforme

$$\sup \tilde{A}\,(\mathrm{x})_{x \in X} = 1$$



Operações algébricas com números fuzzy triangulares

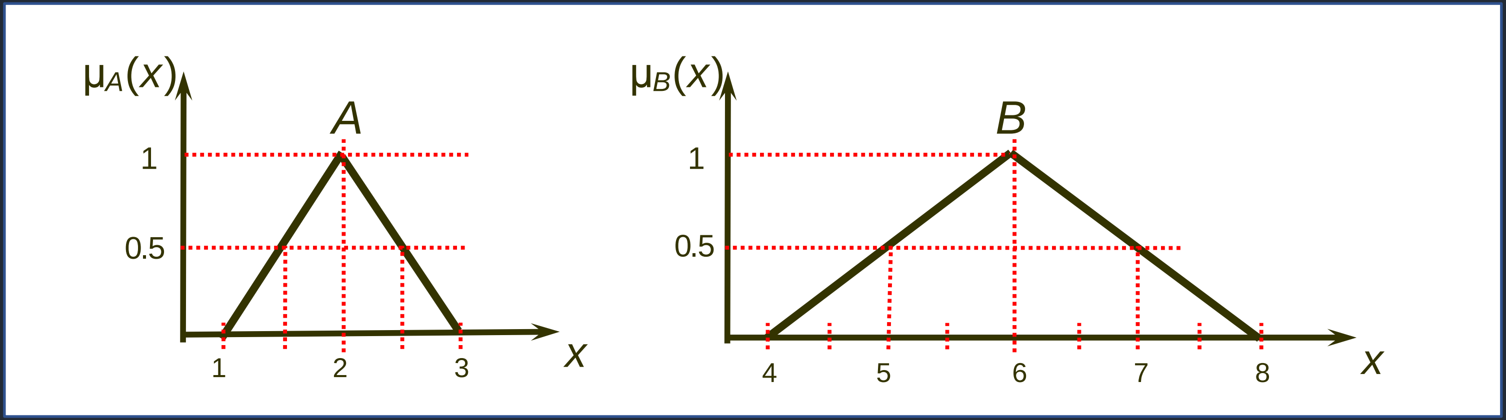
Para: $\tilde{A}=(l_1, m_1, u_1)$ e $\tilde{B}=(l_2, m_2, u_2)$,

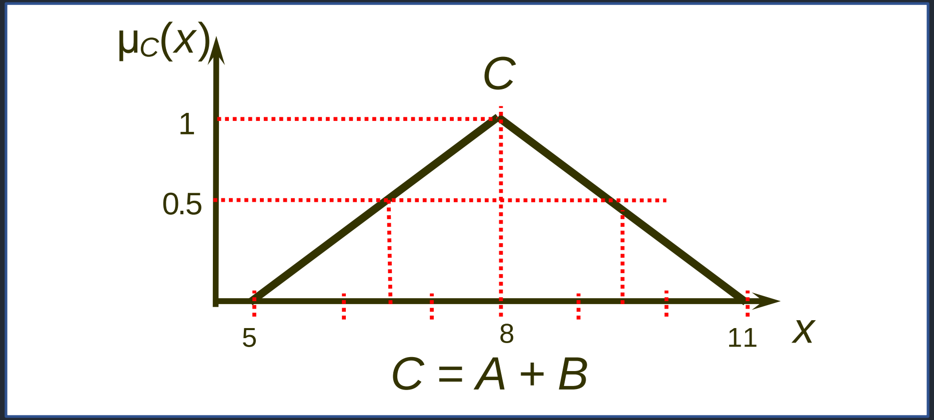
1. Adição: $\tilde{A}(+)\tilde{B} = (l_1+l_2, m_1+m_2, u_1+u_2)$
2. Subtração: $\tilde{A}(-)\tilde{B} = (l_1-u_2, m_1-m_2, u_1-l_2)$
3. Multiplicação: $\tilde{A}(*)\tilde{B} = (l_1*l_2, m_1*m_2, u_1*u_2)$
4. Divisão: $\tilde{A}(\div)\tilde{B} = (l_1\div u_2, m_1\div m_2, u_1\div l_2)$

   $l_1 \geq 0, l_2 \geq 0$

Adição

$$\tilde{A}(+)\tilde{B} = \quad (l_1+l_2,\ m_1+m_2,\ u_1+u_2)$$

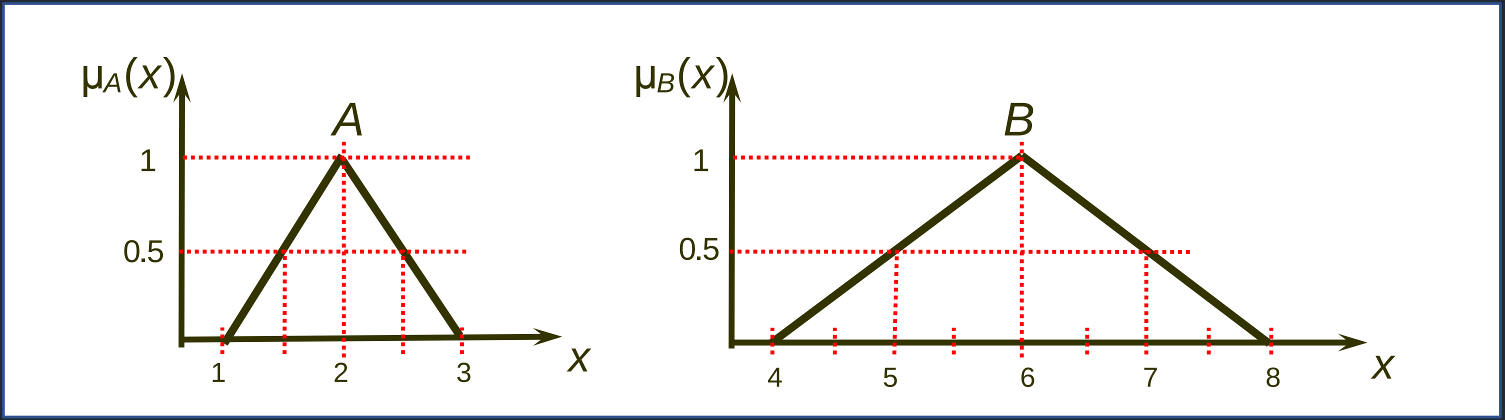


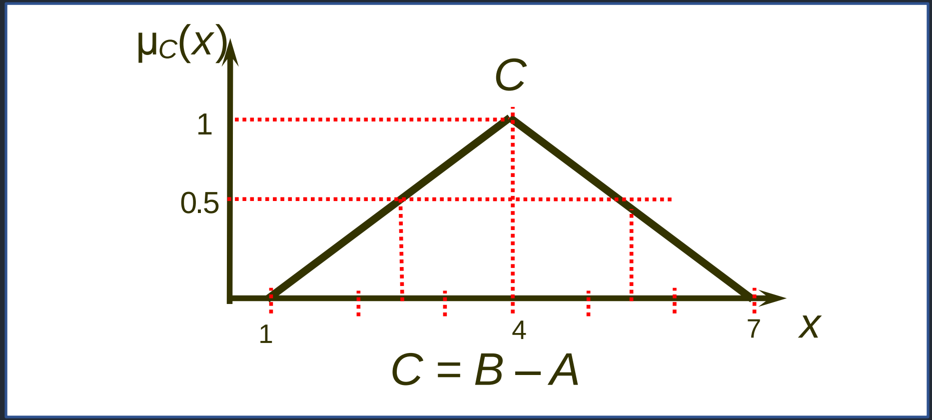


α	$a_1^{(\alpha)}$	$a_2^{(\alpha)}$	$b_1^{(\alpha)}$	$b_2^{(\alpha)}$	$c_1^{(\alpha)}$	$c_2^{(\alpha)}$
0.0	1.0	3.0	4.0	8.0	5.0	11.0
0.1	1.1	2.9	4.2	7.8	5.3	10.7
0.2	1.2	2.8	4.4	7.6	5.6	10.4
0.3	1.3	2.7	4.6	7.4	5.9	10.1
0.4	1.4	2.6	4.8	7.2	6.2	9.8
0.5	1.5	2.5	5.0	7.0	6.5	9.5
0.6	1.6	2.4	5.2	6.8	6.8	9.2
0.7	1.7	2.3	5.4	6.6	7.1	8.9
0.8	1.8	2.2	5.6	6.4	7.4	8.6
0.9	1.9	2.1	5.8	6.2	7.7	8.3
1.0	2.0	2.0	6.0	6.0	8.0	8.0

Subtração

$\tilde{A}(-)\tilde{B} = \quad (l_2\text{-}u_1,\ m_2\text{-}m_1,\ u_2\text{-}l_1)$

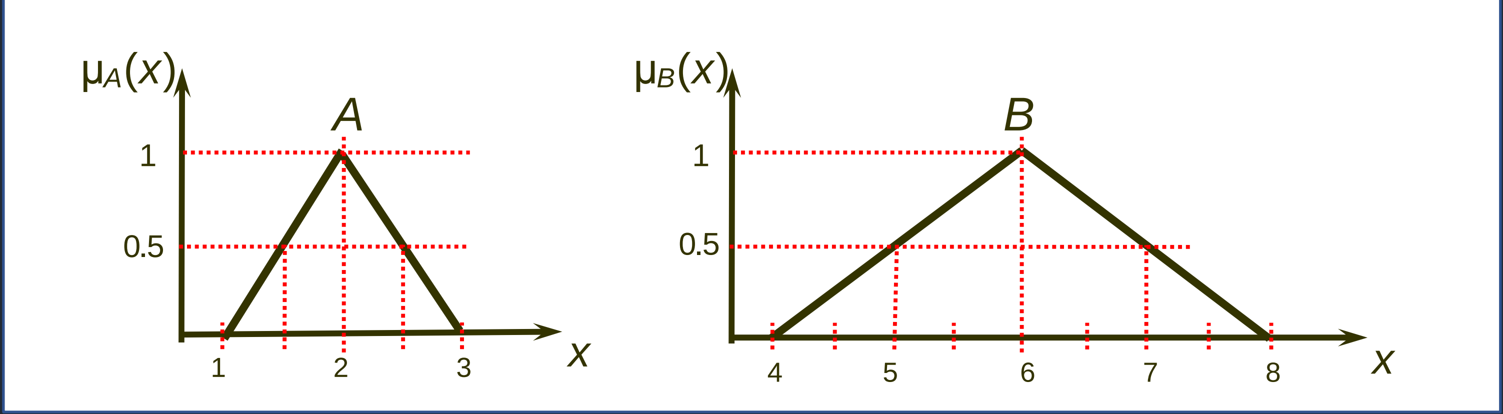


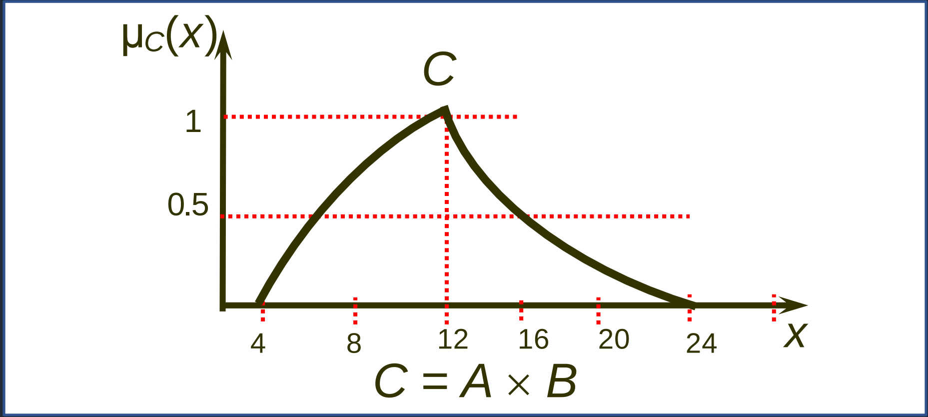


α	$a_1^{(\alpha)}$	$a_2^{(\alpha)}$	$b_1^{(\alpha)}$	$b_2^{(\alpha)}$	$c_1^{(\alpha)}$	$c_2^{(\alpha)}$
0.0	1.0	3.0	4.0	8.0	1.0	7.0
0.1	1.1	2.9	4.2	7.8	1.3	6.7
0.2	1.2	2.8	4.4	7.6	1.6	6.4
0.3	1.3	2.7	4.6	7.4	1.9	6.1
0.4	1.4	2.6	4.8	7.2	2.2	5.8
0.5	1.5	2.5	5.0	7.0	2.5	5.5
0.6	1.6	2.4	5.2	6.8	2.8	5.2
0.7	1.7	2.3	5.4	6.6	3.1	4.9
0.8	1.8	2.2	5.6	6.4	3.4	4.6
0.9	1.9	2.1	5.8	6.2	3.7	4.3
1.0	2.0	2.0	6.0	6.0	4.0	4.0

Multiplicação

$$\tilde{A}(*)\tilde{B} = (l_1*l_2,\ m_1*m_2,\ u_1*u_2)$$



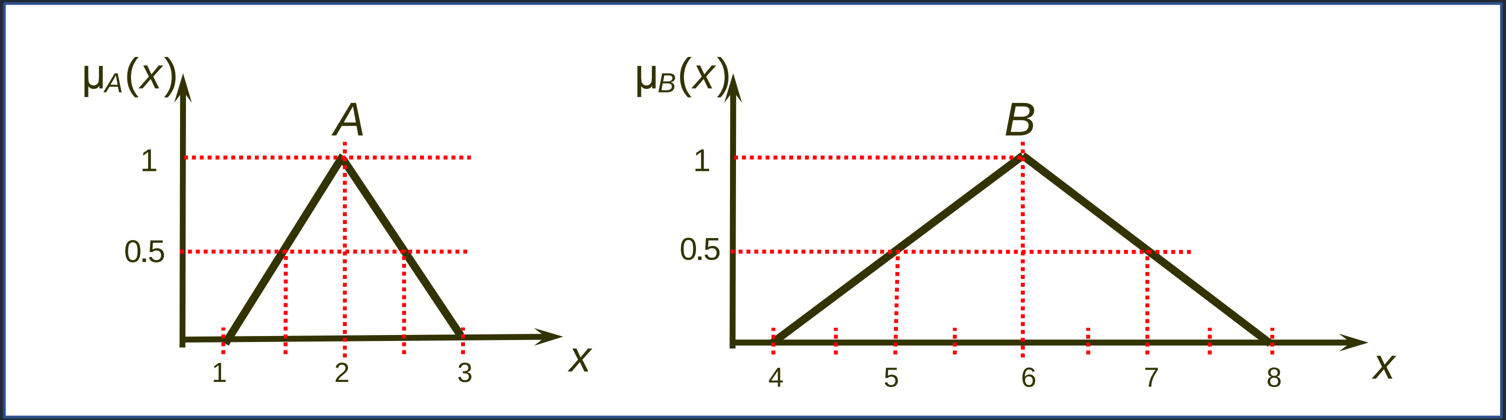


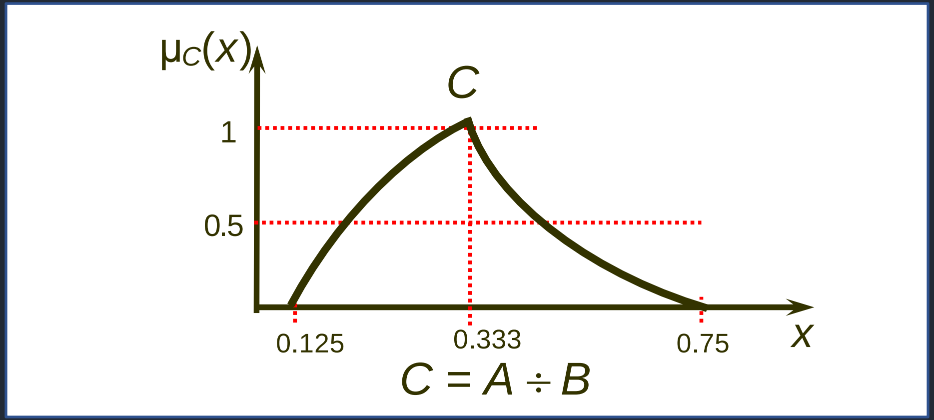
α	$a_1^{(\alpha)}$	$a_2^{(\alpha)}$	$b_1^{(\alpha)}$	$b_2^{(\alpha)}$	$c_1^{(\alpha)}$	$c_2^{(\alpha)}$
0.0	1.0	3.0	4.0	8.0	4.00	24.00
0.1	1.1	2.9	4.2	7.8	4.62	22.62
0.2	1.2	2.8	4.4	7.6	5.28	21.28
0.3	1.3	2.7	4.6	7.4	5.98	19.98
0.4	1.4	2.6	4.8	7.2	6.72	18.72
0.5	1.5	2.5	5.0	7.0	7.50	17.50
0.6	1.6	2.4	5.2	6.8	8.32	16.32
0.7	1.7	2.3	5.4	6.6	9.18	15.18
0.8	1.8	2.2	5.6	6.4	10.08	14.08
0.9	1.9	2.1	5.8	6.2	11.02	13.02
1.0	2.0	2.0	6.0	6.0	12.00	12.00

Divisão

$$\tilde{A}(\div)\tilde{B} = (l_1 \div u_2,\ m_1 \div m_2,\ u_1 \div l_2)$$

$$l_1 \geq 0\,,\ l_2 \geq 0$$





α	$a_1^{(\alpha)}$	$a_2^{(\alpha)}$	$b_1^{(\alpha)}$	$b_2^{(\alpha)}$	$c_1^{(\alpha)}$	$c_2^{(\alpha)}$
0.0	1.0	3.0	4.0	8.0	0.125	0.750
0.1	1.1	2.9	4.2	7.8	0.141	0.690
0.2	1.2	2.8	4.4	7.6	0.158	0.636
0.3	1.3	2.7	4.6	7.4	0.176	0.587
0.4	1.4	2.6	4.8	7.2	0.194	0.542
0.5	1.5	2.5	5.0	7.0	0.214	0.500
0.6	1.6	2.4	5.2	6.8	0.235	0.461
0.7	1.7	2.3	5.4	6.6	0.258	0.426
0.8	1.8	2.2	5.6	6.4	0.281	0.393
0.9	1.9	2.1	5.8	6.2	0.306	0.362
1.0	2.0	2.0	6.0	6.0	0.333	0.333

Outras operações algébricas com números fuzzy triangulares

5. Inverso: $\tilde{A}^{-1} = (1/u_1, 1/m_1, 1/l_1)$ $\quad l_1 \geq 0$

6. Multiplicação por constante: $k * \tilde{A} = (k*l_1, k*m_1, k*u_1)$ $\quad k \geq 0$

7. Divisão por constante: $\tilde{A}/k = (l_1/k, m_1/k, u_1/k)$ $\quad k \geq 0$

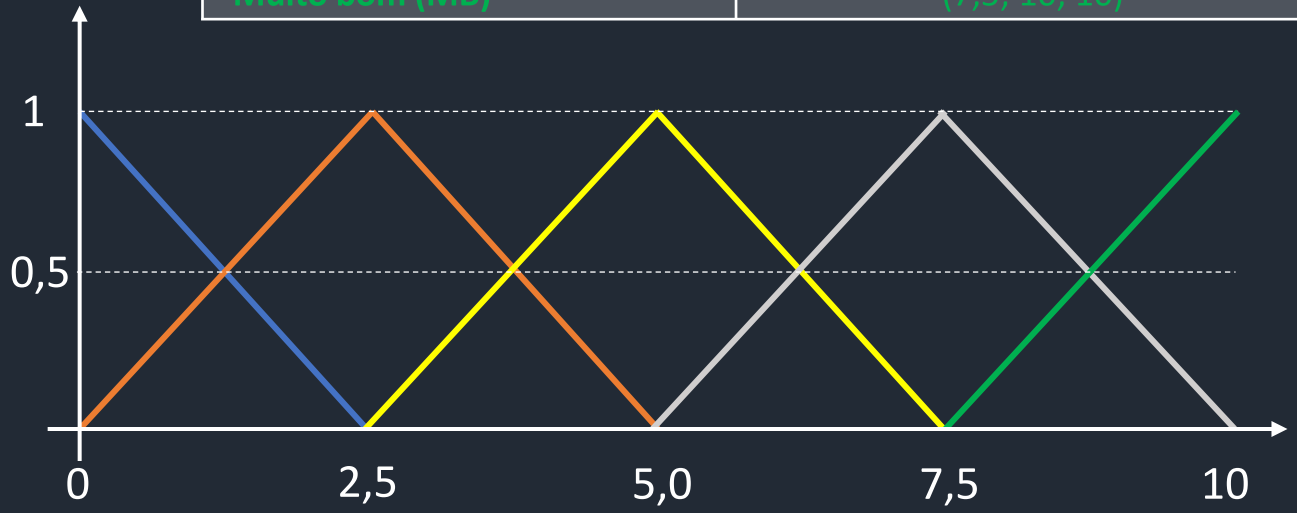
Sistemas Fuzzy – Variáveis Linguísticas

- Variáveis linguísticas são aquelas que permitem a descrição de informações que estão normalmente disponibilizadas de forma qualitativa.

Sistemas Fuzzy – Variáveis Linguísticas

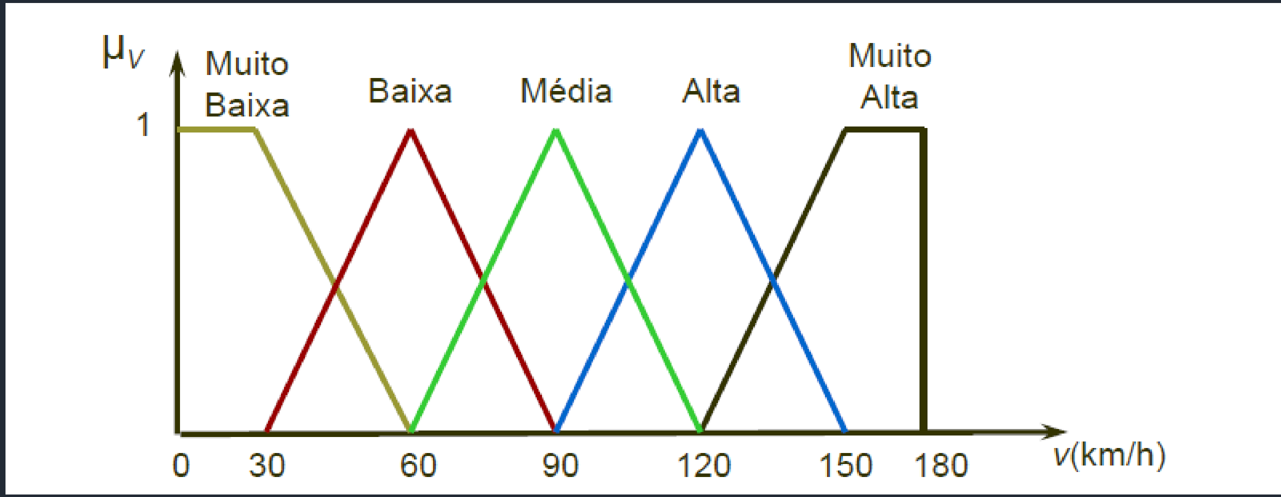
- Valores (ou termos linguísticos) da variável são definidos em linguagem natural:
  - Ex: {quente, morno, frio}; {muito baixo, baixo, médio, alto, muito alto}; {péssimo, ruim, médio, bom, excelente}.
- Os termos linguísticos são representados matematicamente por números fuzzy.
- Ex:

Termos Linguisticos	Números Fuzzy Triangular
Muito ruim (MR)	(0; 0; 2,5)
Ruim (R)	(0; 2,5; 5,0)
Médio (M)	(2,5; 5,0; 7,5)
Bom (B)	(5,0; 7,5; 10,0)
Muito bom (MB)	(7,5; 10; 10)



Sistemas Fuzzy – Variáveis Linguísticas

Seja a variável linguística representada por:



Para o exemplo mostrado no gráfico, tem-se:

Nome da variável → v = {velocidade}.
Conjunto de termos → Tv = {Muito Baixa, Baixa, Média, Alta, Muito Alta}.
Universo de Discurso → Uv ∈ [0;180]
Funções de Pertinência → São dadas pelas funções triangulares e trapezoidais mostradas nos gráficos da figura.

Sistemas Fuzzy – Defuzzificação

- Os tomadores de decisão conseguem avaliar mais facilmente o processo quando as informações de saída são fornecidas de forma precisa (pontual).

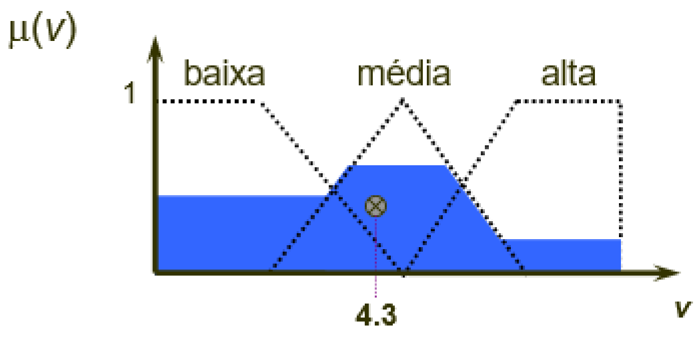
- Os operadores de defuzzificação permitem então obter um valor de saída pontual (crisp) a partir de valores fuzzy.

Sistemas Fuzzy – Defuzzificação

Método do Centro de Área (CDA)

$$CDA = \frac{\sum_{k=1}^{N} \mu(v_k) \cdot v_k}{\sum_{k=1}^{N} \mu(v_k)}$$

Onde N é o número de discretizações do universo de discurso.

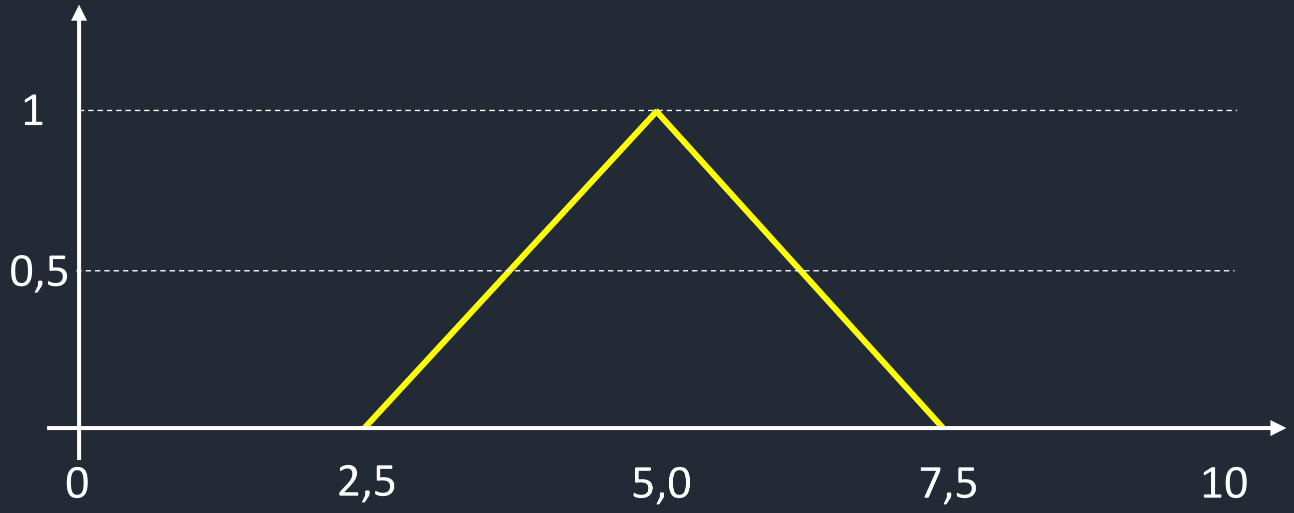


Para um número fuzzy triangular: $\tilde{A}=(L, M, U)$

$$CDA = \frac{(U-L)+(M-L)}{3} + L$$

Sistemas Fuzzy – Defuzzificação

Termo Linguistico	Número Fuzzy Triangular
Médio (M)	(2,5; 5,0; 7,5)



$$CDA = \frac{(U - L) + (M - L)}{3} + L$$

$$= \frac{(7{,}5-2{,}5)+(5-2{,}5)}{3} + 2{,}5 = 5$$

Sistemas Fuzzy – Defuzzificação

Podemos dar mais ênfase ao elemento central

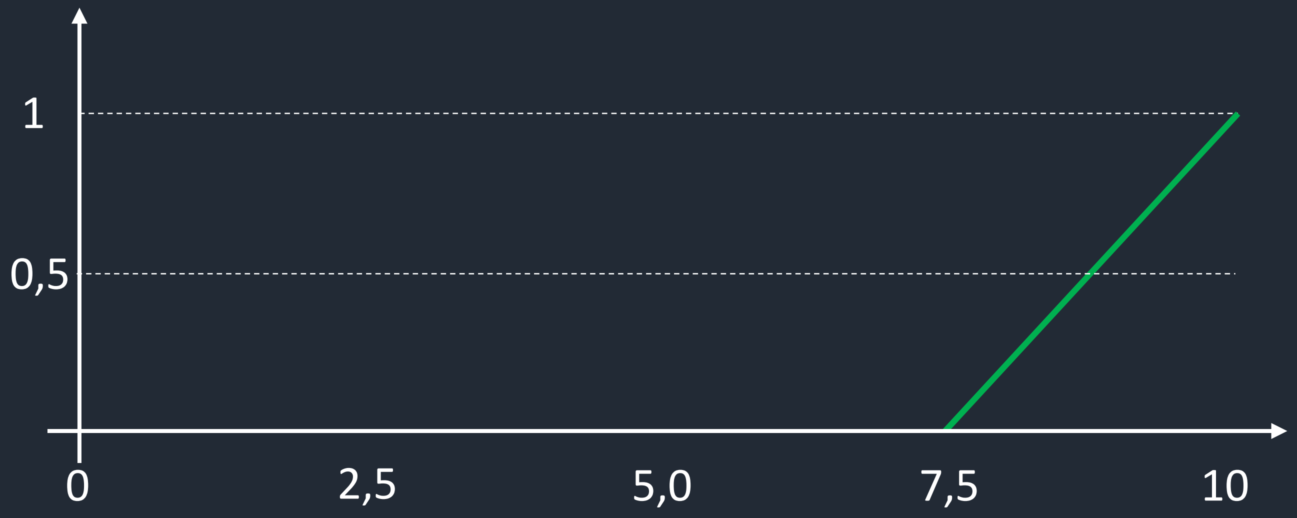
Para um número fuzzy triangular: $\tilde{A}=(L, M, U)$

$$A = \frac{L + 2M + U}{4}$$

Sistemas Fuzzy – Defuzzificação

$$A = \frac{L+2M+U}{4} = \frac{7{,}5+(2*10)+10}{4} = 9{,}375$$

Termos Linguisticos	Números Fuzzy Triangular
Muito bom (MB)	(7,5; 10; 10)



Quando Usar Sistemas Fuzzy em Apoio à Decisão

- Quando se dispõe de pouca informação quantitativa a respeito do processo a ser analisado.

- Quando as variáveis do processo estão imersas em ambientes de incerteza e imprecisão.

- Quando o processo é melhor definido pelo conhecimento de um especialista sobre o processo.

Referências

- ZIMMERMANN, H.-J. Fuzzy set theory. Wiley interdisciplinary reviews: computational statistics, v. 2, n. 3, p. 317-332, 2010.