UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Cálculo para Funções de uma Variavel Real I

8 de maio de 2023

Lista de Exercícios N° 3

Derivadas e Taxas de Variação

1. Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

   a) $y = 4x - 3x^2$, no ponto $(2, -4)$

   b) $y = x^3 - 3x + 1$, no ponto $(2, 3)$

   c) $y = \sqrt{x}$, no ponto $(1, 1)$

   d) $y = \dfrac{2x+1}{x+2}$, no ponto $(1, 1)$

2. a) Encontre a inclinação da tangente à curva $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ no ponto $x = a$.

   b) Encontre as equações das retas tangentes nos pontos $(1, 1)$ e $(4, \frac{1}{2})$.

   c) Faça o gráfico da curva e de ambas as tangentes em uma mesma tela.

3. Se uma bola for atirada ao ar com velocidade de 10 m/s, sua altura (em metros) depois de t segundos é dada por $y = 10t - 4,9t^2$. Encontre a velocidade quando $t = 2$.

4. Se uma pedra for lançada para cima no planeta Marte com velocidade de 10 m/s, sua altura (em metros) após t segundos é dada por $H = 10t - 1,86t^2$.

   a) Encontre a velocidade da pedra após um segundo.

   b) Encontre a velocidade da pedra quando $t = a$.

   c) Quando a pedra atinge a superfície?

   d) Com que velocidade a pedra atinge a superfície?

5. O deslocamento (em metros) de uma partícula movendo-se ao longo de uma reta é dado pela equação do movimento $s = \frac{1}{t^2}$, onde t é medido em segundos. Encontre a velocidade da partícula nos instantes $t = a$, $t = 1$, $t = 2$ e $t = 3$.

6. Encontre $f'(a)$ das seguintes funções

   a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$

   b) $f(t) = 2t^3 + t$

   c) $f(t) = \dfrac{2t+1}{t+3}$

   d) $f(x) = x^{-2}$

   e) $f(x) = \sqrt{1-2x}$

   f) $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{1-x}}$

7. Uma partícula se move ao longo de uma reta com equação de movimento $s = f(t)$, onde s é medido em metros e t em segundos. Encontre a velocidade e a velocidade escalar quando $t = 5$.

   a) $f(t) = 100 + 50t - 4,9t^2$.

   b) $f(t) = t^{-1} - t$.

8. Determine se existe ou não $f'(0)$.

   a) $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$

   b) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$

Regras de Derivação

1. Derive as funções.

   a) $f(x) = \sqrt{30}$

   b) $f(x) = 5x - 3$

   c) $f(t) = 1,4t^5 - 2,5t^2 + 6,7$

   d) $h(x) = (x-2)(2x+3)$

   e) $y = x^{-\frac{2}{5}}$

   f) $B(y) = cy^{-6}$

   g) $y = 3e^x + \dfrac{4}{\sqrt[3]{x}}$

   h) $S(R) = 4\pi R^2$

   i) $y = \dfrac{\sqrt{x} + x}{x^2}$

   j) $y = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x}}$

   k) $j(x) = x^{2,4} + e^{2,4}$

   l) $k(r) = e^r + r^e$

   m) $h(v) = ae^v + \dfrac{b}{v} + \dfrac{c}{v^2}$

   n) $y = e^{x+1} + 1$

   o) $f(t) = \dfrac{2t}{2 + \sqrt{t}}$

   p) $f(x) = \dfrac{A}{B + Ce^x}$

q) $f(x) = \dfrac{1 - xe^x}{x + e^x}$

r) $f(x) = \dfrac{x}{x + \frac{c}{x}}$

2. Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

   a) $y = \sqrt[4]{x}$ no ponto $(1, 1)$.

   b) $y = x^4 + 2x^2 - x$ no ponto $(1, 2)$.

3. Encontre equações para a reta tangente e para a reta normal à curva no ponto dado.

   a) $y = x^4 + 2e^x$ no ponto $(0, 2)$.

   b) $y = x^2 - x^4$ no ponto $(1, 0)$.

4. Encontre uma equação para a reta normal à parábola $y = x^2 - 5x + 4$ que seja paralela à reta $x - 3y = 5$.

5. Esboce as parábolas $y = x^2$ e $y = x^2 - 2x + 2$. Você acha que existe uma reta que seja tangente a ambas as curvas? Em caso afirmativo, encontre sua equação. Em caso negativo, explique por que não.

Derivadas de Funções Trigonométricas e Logarítmicas

1. Derive

   a) $f(x) = 3x^2 - 2\cos x$

   b) $f(x) = \sqrt{x}\sin x$

   c) $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\cot x$

   d) $y = 2\sec x + \csc x$

   e) $g(t) = t^3 \cos t$

   f) $f(x) = xe^x \csc x$

   g) $y = x^2 \sin x \tan x$

   h) $f(\theta) = \dfrac{\sec\theta}{1 + \sec x}$

2. Encontre o limite.

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}$

   b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\sin 6x}$

   c) $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\tan 6t}{\sin 2t}$

   d) $\displaystyle\lim_{\theta\to 0} \frac{\cos\theta - 1}{\sin\theta}$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{5x^3 - 4x}$

f) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x \sin 5x}{x^2}$

g) $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta + \tan\theta}$

h) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x}$

3. Encontre a derivada dada, encontrando as primeiras derivadas e observando o padrão que ocorre.

a) $\frac{d^{99}}{dx^{99}}(\sin x)$

b) $\frac{d^{35}}{dx^{35}}(x\sin x)$

4. Derive a função.

a) $f(x) = x\ln x - x$

b) $f(x) = \sin(\ln x)$

c) $f(x) = \ln(\sin^2 x)$

d) $f(x) = \sqrt[5]{\ln x}$

e) $f(x) = \log_{10}(x^3 + 1)$

f) $f(x) = \log_5(xe^x)$

g) $f(x) = \sin x \ln(5x)$

h) $f(u) = \frac{u}{1 + \ln u}$

i) $H(z) = \ln\sqrt{\frac{a^2 - z^2}{a^2 + z^2}}$

j) $y = \log_2(e^{-x}\cos \pi x)$

5. Derive f e encontre o domínio de f.

a) $f(x) = \frac{x}{1 - \ln(x - 1)}$

b) $f(x) = \sqrt{2 + \ln x}$

c) $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$

d) $f(x) = \ln\ln\ln x$

A Regra da Cadeia

1. Escreva a função composta na forma $f(g(x))$. [Identifique a função de dentro $u = g(x)$ e a de fora y $y = f(u)$.] Então, encontre a derivada dy/dx.

a) $y = \sin 4x$

b) $y = \sqrt{4 + 3x}$

c) $y = (1 - x^2)^{10}$

d) $y = (\tan(\sin x))$

e) $y = e^{\sqrt{x}}$

f) $y = \sqrt{2 - e^x}$

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Cálculo para Funções de uma Variavel Real I

8 de maio de 2023

Lista de Exercícios N° 3

2. Encontre a derivada da função.

a) $f(t) = \tan(e^t) + e^{\tan t}$

b) $y = \sin(\sin(\sin x))$

c) $f(t) = \sin^2(e^{\sin^2(t)})$

d) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

e) $g(x) = (2rax^{rx} + n)^p$

f) $y = 2^{3^{x^2}}$

g) $y = \cos(\sqrt{\sin(\tan \pi x)})$

h) $y = (x + (x + \sin^2 x)^3)^4$

3. Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

a) $y = (1 + 2x)^{10}$ no ponto $(0, 1)$.

b) $y = \sqrt{1 + x^3}$ no ponto $(2, 3)$.

c) $y = \sin(\sin x)$ no ponto $(\pi, 0)$.

d) $y = \sin x + \sin^2 x$ no ponto $(0, 0)$.

4. Se $F(x) = f(3f(4f(x)))$, onde $f(0) = 0$ e $f'(0) = 2$, encontre $F'(0)$.