DIAGRAMAS DE MINKOWSKI

1. A Geometrização da Relatividade

Podemos dizer que a maior descoberta com relação ao tempo físico foi feita pela Teoria da Relatividade Restrita, consolidada a partir do trabalho de Albert Einstein em 1905. Três anos depois, o professor de Einstein em Zurique, o matemático judeu lituano-alemão Hermann Minkowski, empreendeu a geometrização do espaço-tempo da TRR. Obteve uma estrutura matemática nunca imaginada antes: uma variedade (*manifold*) de 4 dimensões em que um dos eixos é representado pelos números imaginários *i*. Em seu texto, escreveu:[7]

> Doravante, o espaço por si só e o tempo por si só estão fadados a desvanecer em meras sombras, e apenas uma espécie de união entre os dois preservará uma realidade independente. (MINKOWSKI, 1958, p. 93)

2. O Cone de Luz

Uma das primeiras ideias de impacto da TRR foi a constatação de que há eventos que não estão nem no nosso passado, nem no presente, nem no nosso futuro. Nas palavras do físico pernambucano Luiz Freire (1924): “além do presente, passado e futuro, há alguma coisa, distinta destas, mas participando da mesma categoria física daquelas três divisões”.[8]

Essa ideia aparece claramente no diagrama de espaço-tempo chamado “cone de luz”, em que se representam 2 dimensões espaciais e 1 temporal. Na Fig. III.1, em relação a um evento *O*, que pode ser nossa presença “aqui e agora”, define-se o cone de luz passado como a coleção de eventos que podem exercer um efeito causal sobre nós, e o cone de luz futuro como a coleção de eventos que podemos afetar causalmente. Fora destes cones, devido ao fato de que nenhuma propagação causal é mais rápida do que a luz, define-se uma região que se diz com “separação tipo espaço” em relação a *O*, e que em linguagem coloquial pode ser referido como “alhures e outrora”. O intervalo entre *O* e um evento dentro dos cones de luz é de “separação tipo tempo”, ao passo que o intervalo com um evento na superfície do cone é uma separação tipo luz”.

3. Diagramas de Minkowski

A figura espaço-temporal do cone de luz já se dá em um diagrama conhecido como “diagrama de Minkowski”. Na Fig. III.2 representamos a trajetória da luz com 1 dimensão espacial e 1 temporal, rumando para a direita. A unidade de tempo é escolhida de tal forma que a trajetória da luz aparece em um ângulo de 45°: se as posições são medidas em metros,

---

7 MINKOWSKI, H. (1958), “Espaço e tempo”, in LORENTZ, EINSTEIN & MINKOWSKI (1958), op. cit. (nota 1), pp. 93-114. Original em alemão: 1908. Tradução em inglês disponível no Wikisource: https://en.wikisource.org/wiki/Translation:Space_and_Time .

8 FREIRE, L.B. (2014), “Um interessante aspecto da teoria da relatividade”, *Boletim de Engenharia* (Club de Engenharia de Pernambuco), v. II, n. 2, dezembro, p. 6 , apud ALBUQUERQUE, I.F.M. & HAMBURGER, A.I. (1988), “Retratos de Luiz de Barros Freire como pioneiro da ciência no Brasil”, *Ciência e Cultura 40*: 875-881, ver p. 877.

os tempos serão medidos em "metros-luz", que é o tempo que a luz demora para percorrer um metro no vácuo.

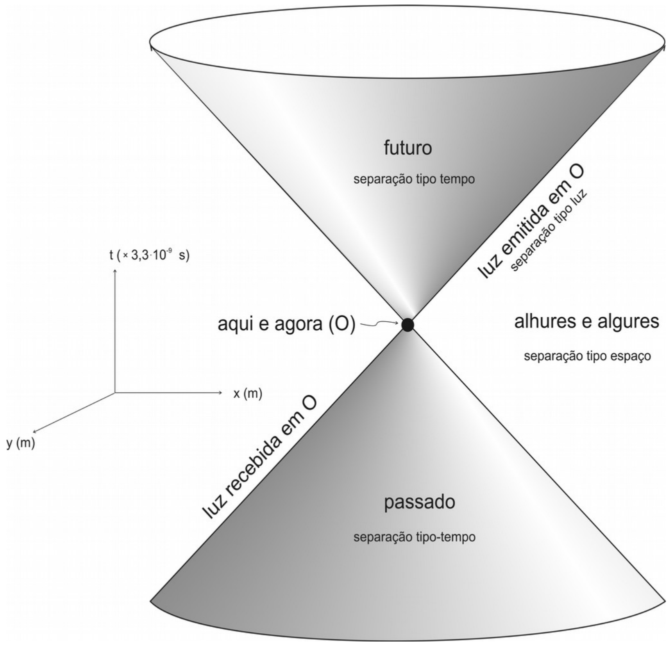

Figura III.1. Cone de luz em relação ao evento O.

Um metro-luz equivale assim a t = 1 m / c (ou seja, um metro dividido pela velocidade da luz), que dá 1 metro-luz = $3{,}3 \cdot 10^{-9}$ s. Assim, uma numeração no eixo do tempo, por exemplo 200, corresponde a $200 \cdot 3{,}3 \cdot 10^{-9}$ s. Outra maneira de exprimir isso é considerar 200 como o valor do tempo (em segundos) multiplicado pela velocidade da luz *c*, ou seja, o eixo da ordenada (vertical) designa o valor de *ct* (em unidades de metro). Veremos o uso desta convenção na seção III.4.

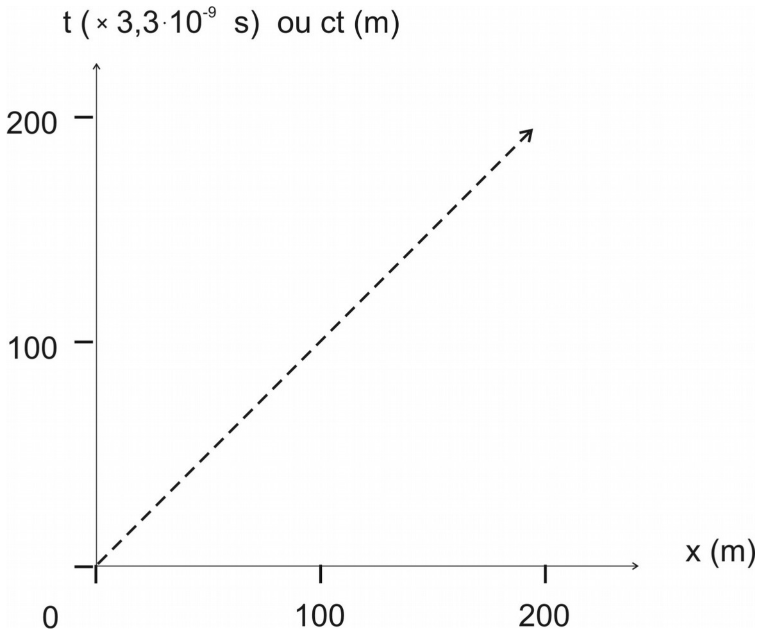

Figura III.2. Diagrama de Minkowski para a emissão de luz em uma dimensão espacial, rumando para a direita.

Vamos agora representar o "trem de Einstein", da seção I.4, no diagrama de Minkowski, a partir do ponto de vista do observador na estação.[9] Na Fig. III.3, o eixo *x'*=0 indica a posição da traseira do trem, ao longo do tempo. A velocidade do trem é 0,6*c*, portanto o eixo *x'* fica "acima" do eixo marcando a velocidade da luz. Por exemplo, a partir da origem, a luz atinge a distância de 200 m no tempo de 200 metros-luz, mas depois deste tempo a traseira do trem atinge apenas 120 m.

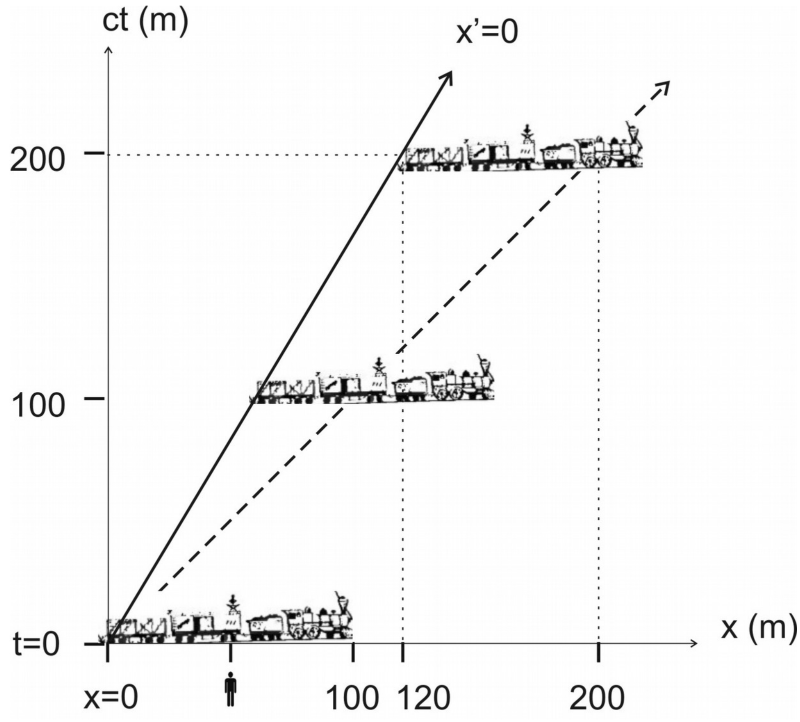

Figura III.3. Diagrama de Minkowski para o trem de Einstein, marcando o eixo no qual x'=0 no referencial do trem.

Na Fig. III.4 representamos as três explosões no trem. No referencial da estação, as explosões ① e ② são simultâneas, e a luz emitida encontra o observador *O* após 50 metros-luz (notar que nesta figura representa-se também a luz rumando para a esquerda). Já o observador *O'* no trem só receberá o sinal de ① no tempo t = 125 metros-luz (medido no referencial da estação), e a partir deste ponto podemos encontrar no desenho o evento da terceira explosão ③, na intersecção do raio de luz com a parte da frente do trem. Como ① e ③ são simultâneos no referencial do trem, podemos traçar entre eles uma reta que representa a linha de simultaneidade t' = 0.

Com isso terminamos a análise diagramática do trem de Einstein, mas podemos destacar que encontramos o procedimento para desenhar, no diagrama de Minkowski, os eixos coordenados do sistema em movimento (em relação ao sistema cartesiano usual). Isso é mostrado na Fig. III.5. Se no referencial da estação temos os eixos x, t, no sistema em movimento relativo os eixos são x', t'. Na Fig. III.4 destacamos que os eixos do referencial em movimento correspondem a linhas em que x'=0 e t'=0. Mas a linha em que x'=0 corresponde aos eventos nesta posição ao longo do tempo t', por isso na Fig. III.5 ela é escrita como o eixo t'. E analogamente para a renomeação da linha de simultaneidade t'=0 simplesmente pelo eixo x'.

Na Fig. III.4 representa-se um evento arbitrário E, cujas coordenadas no referencial da estação são x_E = 200 e t_E = 150. A determinação gráfica das coordenadas no referencial em movimento relativo é direta, bastando puxar as paralelas aos eixos x' e t'. O que não é direto é

9 Inspiramo-nos na apresentação de SALMON (1980), op. cit. (nota 3), pp. 76-81.

o valor numérico das coordenadas x_E' e t_E', pois a escala numérica nos eixos x', t' é diferente da dos eixos x, t. Para calcular essas coordenadas, é preciso usar as equações da transformação de Lorentz, que veremos a seguir.

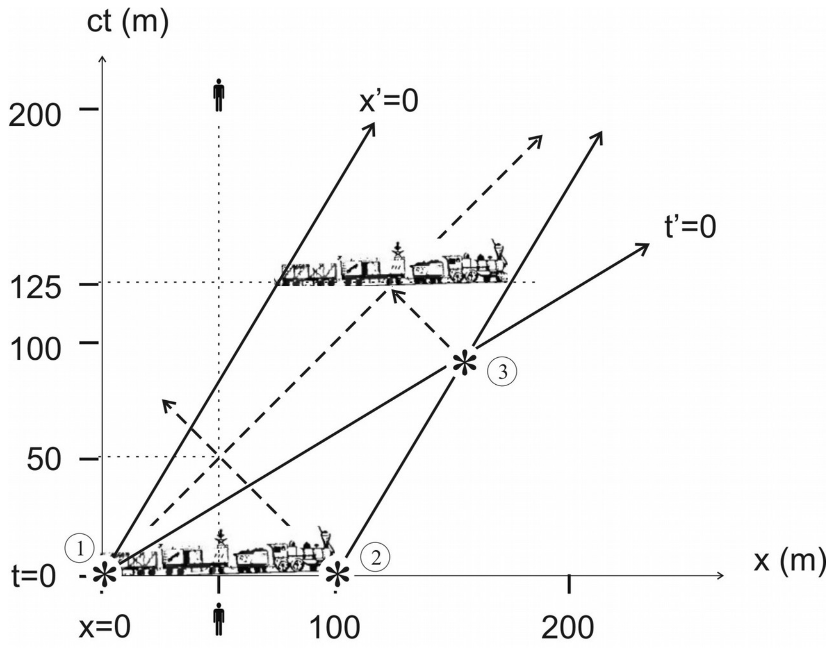

Figura III.4. Diagrama de Minkowski para o trem de Einstein, marcando agora o eixo no qual t'=0 no referencial do trem.

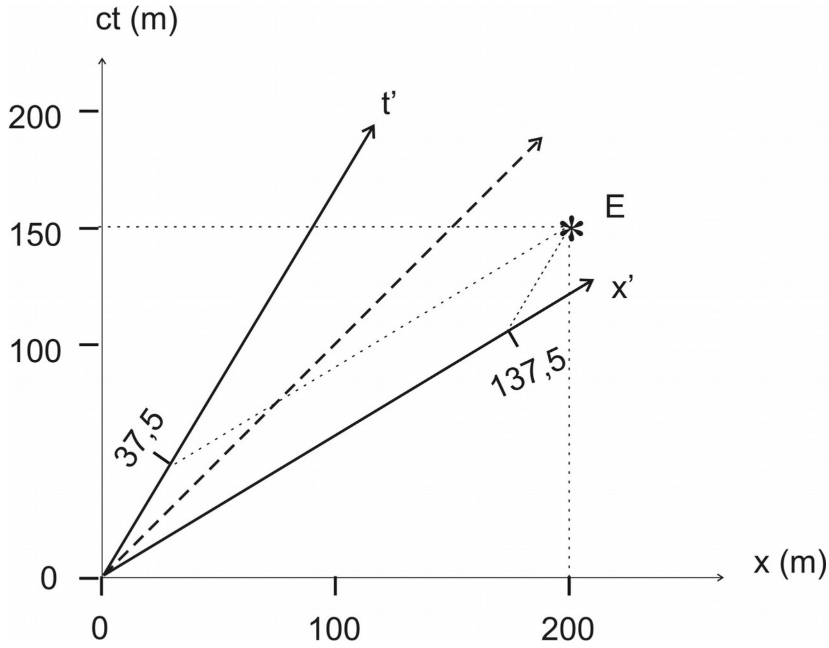

Figura III.5. Diagrama de Minkowski em que se representam dois sistemas em movimento relativo mútuo.

4. Transformações de Lorentz

O problema é representar as coordenadas x', y', z', t' de um corpo em relação a um sistema com movimento retilíneo uniforme a uma velocidade u ao longo do eixo $+x$, a partir das coordenadas x, y, z, t descrevendo o corpo em relação ao sistema considerado em repouso. As transformações de Galileo, válidas na Mecânica Clássica, se escrevem da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
x &= x' + ut & \qquad x' &= x - ut \\
y &= y' & y' &= y \\
z &= z' & z' &= z \\
t &= t' & t' &= t
\end{aligned}
\qquad \text{(III.1)}
$$

As transformações de Lorentz introduzem a constante c (a velocidade da luz no vácuo), e utilizam também o fator de Lorentz (eq. II.1), $\gamma = 1/\sqrt{1-u^2/c^2}$:

$$
\begin{aligned}
x' &= \gamma\,(x - ut) \\
y' &= y \\
z' &= z \\
t' &= \gamma\,(t - \frac{u}{c^2}\,x)
\end{aligned}
\qquad \text{(III.2)}
$$

As equações de Maxwell, do Eletromagnetismo Clássico, são invariantes ante as transformações de Lorentz, ao passo que as equações de Newton da Mecânica Clássica são invariantes apenas ante as transformações de Galileo.

Com as eqs.(III.2) podemos calcular os valores indicados na Fig. III.5 para as coordenadas do evento E no sistema x', t'. Devido à escolha de unidades, os valores para o tempo indicados no gráfico correspondem a ct (ou seja, $ct = 150$).