PEF2603

Estruturas na Arquitetura III -
Sistemas Reticulados e Laminares

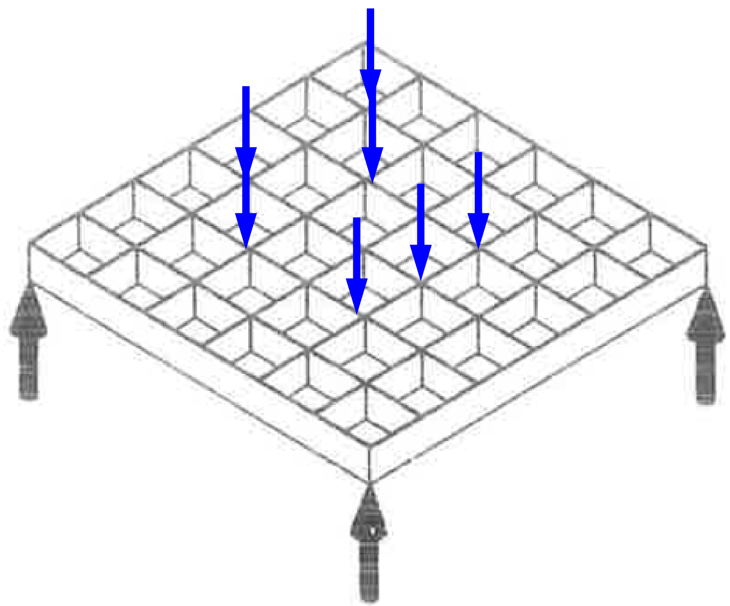
Grelhas

(15/05/2023)

Professores
Ruy Marcelo O. Pauletti , Leila Meneghetti Valverdes, Luís A. Bitencourt Jr

Comportamento Estrutural

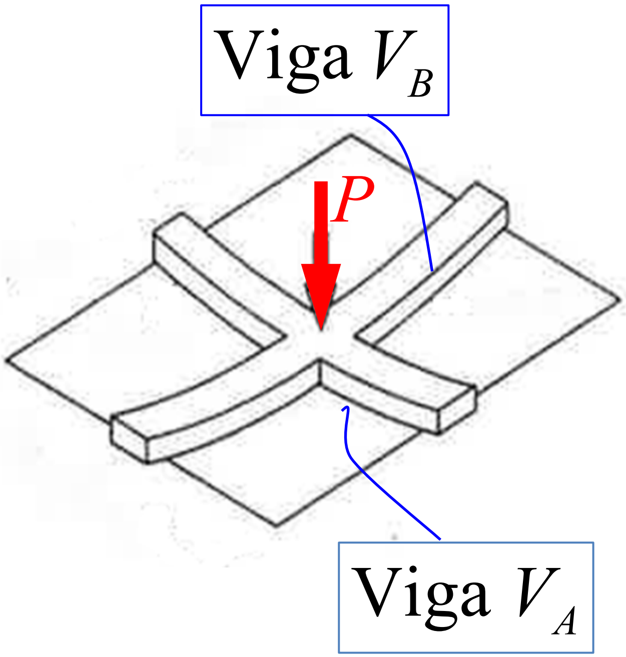
- Tridimensional, combinando esforços cortantes (V), momentos fletores (M) e momentos torsores (T)

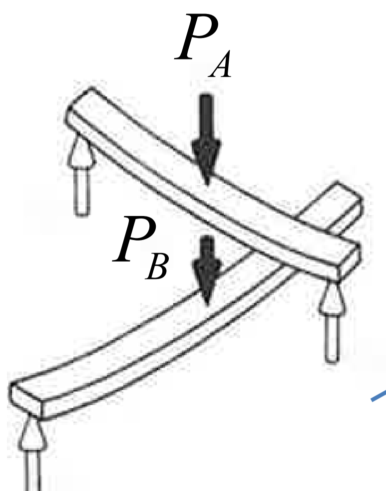


'Casa Grelha' (FGMF Arquitetos, 2007)

Comportamento Estrutural

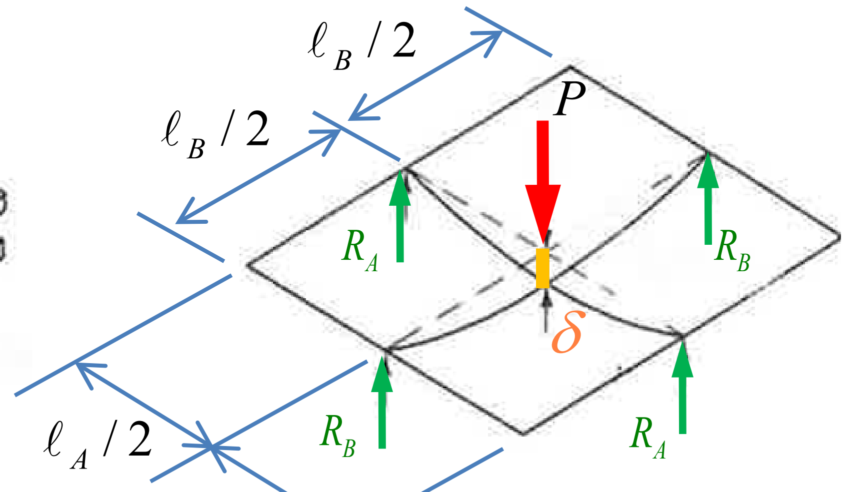
- *Modelo simplificado para entender o comportamento das grelhas*
- *(baseado no livro 'Structures' (Shodek, 1998)*





$$P = P_A + P_B$$

- *Equação de EQUILÍBRIO*

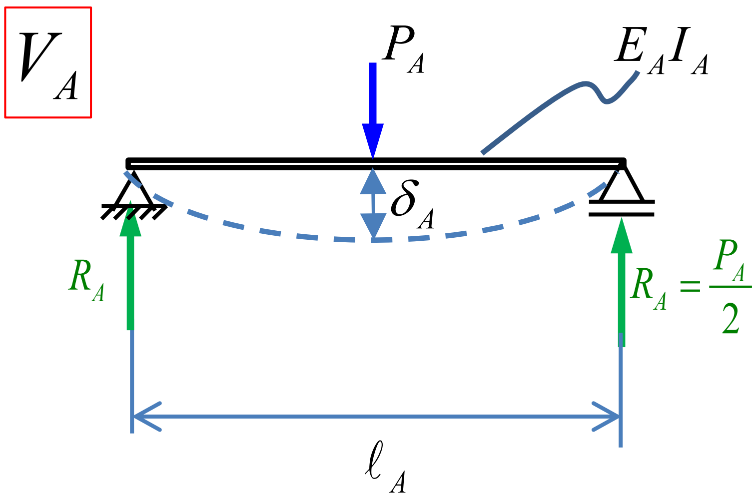


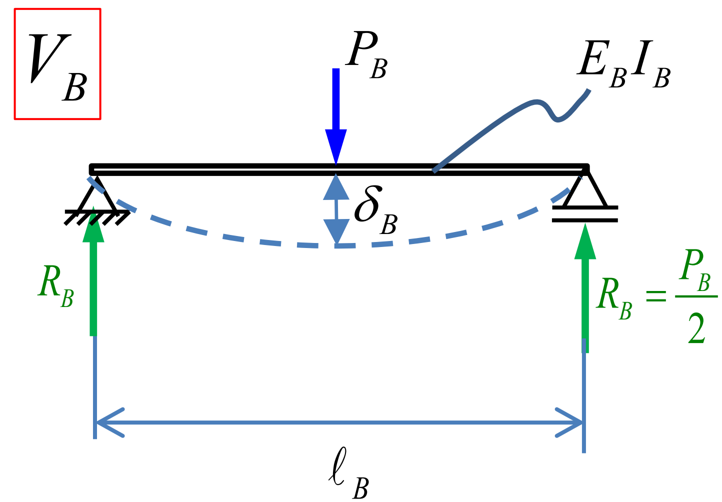
$$\delta_A = \delta_B$$

Sistema Intrinsecamente Hiperestático!

Comportamento Estrutural

✓ Qual das duas vigas recebe mais carga?





$$\delta_A = \frac{P_A \ell^3_A}{48 E_A I_A}$$

$$\delta_B = \frac{P_B \ell^3_B}{48 E_B I_B}$$

Comportamento Estrutural

- Qual das duas vigas recebe mais carga?

- Equação de COMPATIBILIDADE: $\boxed{\delta_A = \delta_B}$

$$\frac{P_A \ell_A^3}{48 E_A I_A} = \frac{P_B \ell_B^3}{48 E_B I_B}$$

$$\boxed{\frac{P_A}{P_B} = \left(\frac{\ell_B}{\ell_A}\right)^3 \cdot \left(\frac{E_A I_A}{E_B I_B}\right)}$$

Comportamento Estrutural

- Qual das duas vigas recebe mais carga?

  - 1º CASO PARTICULAR:

    – mesmo material: $\boxed{E_A = E_B}$

    – mesma seção transversal: $\boxed{I_A = I_B}$

$$\frac{P_A}{P_B} = \left(\frac{\ell_B}{\ell_A}\right)^3 = \alpha \quad \therefore \quad \boxed{P_A = \alpha P_B}$$

– Inserindo na Equação de Equilíbrio:

$$\alpha P_B + P_B = P \quad \therefore \quad \boxed{P_B = \frac{P}{\alpha + 1}} \quad e \quad \boxed{P_A = \left(\frac{\alpha}{\alpha + 1}\right) P}$$

Comportamento Estrutural

- Qual das duas vigas recebe mais carga?

  - 2º CASO PARTICULAR:

    - mesmo material: $\boxed{E_A = E_B}$
    - mesma seção transversal: $\boxed{I_A = I_B}$
    - mesmo comprimento: $\boxed{\ell_A = \ell_B}$

$$\ell_A = \ell_B \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1 \qquad \therefore \qquad \boxed{P_A = P_B = \frac{P}{2}}$$

Comportamento Estrutural

- Qual das duas vigas recebe mais carga?

- 3º CASO PARTICULAR:

  - mesmo material: $\boxed{E_A = E_B}$

  - mesma seção transversal: $\boxed{I_A = I_B}$

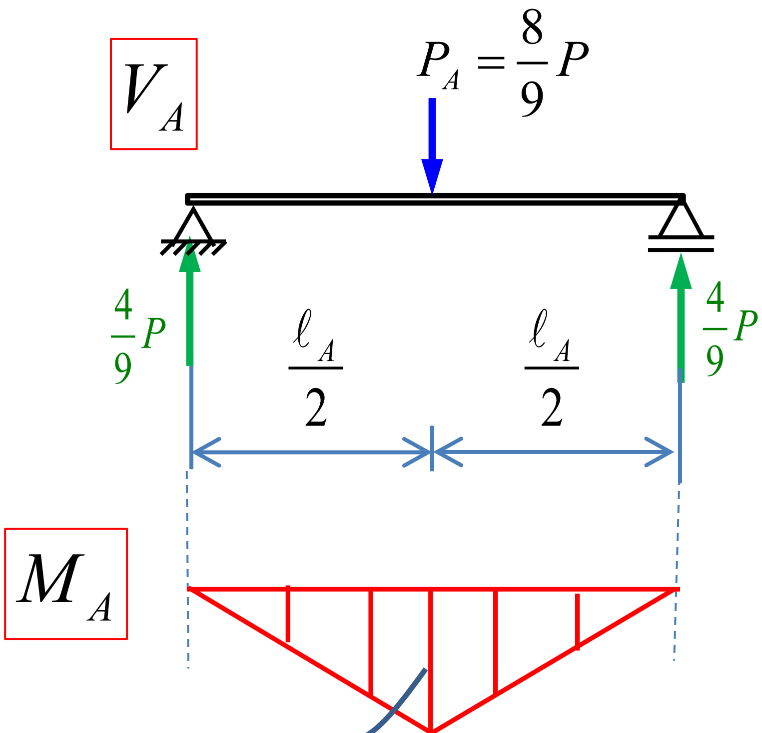
  - comprimento: $\boxed{\ell_B = 2\ell_A}$

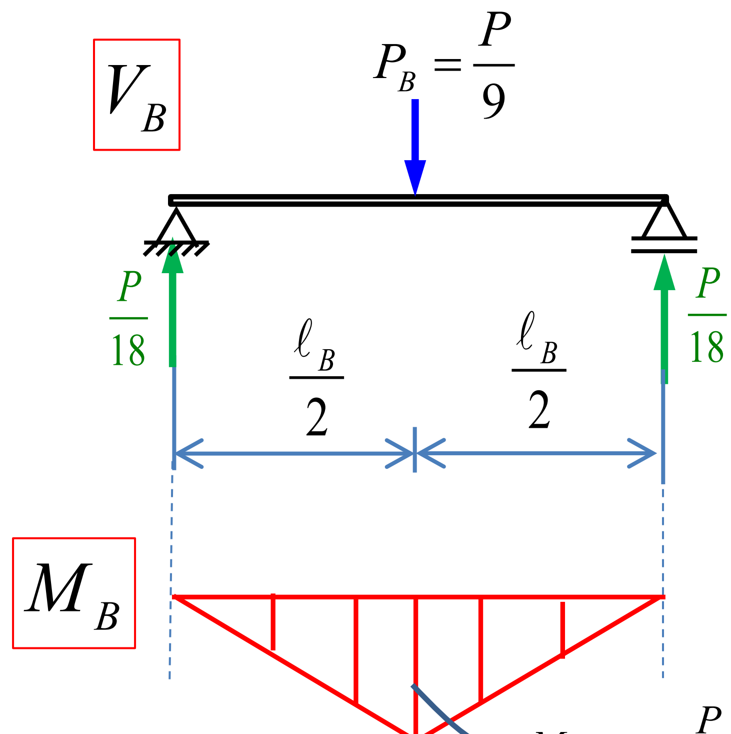
$$\therefore \qquad \alpha = \left(\frac{\ell_B}{\ell_A}\right)^3 = \left(\frac{2\ell_A}{\ell_A}\right)^3 = 8 \;\therefore\; \begin{cases} \boxed{P_A = \dfrac{8}{9}P} \\ \boxed{P_B = \dfrac{1}{9}P} \end{cases}$$

- CONCLUSÃO: as vigas curtas são mais rígidas, logo "absorvem" mais carga. Ou seja, são mais solicitadas.

Comportamento Estrutural

✓ Qual das duas vigas recebe mais carga?





$$M_{A,MAX} = \frac{4}{9}P \times \frac{\ell_A}{2} = \frac{2}{9}P\ell_A$$

$$M_{B,MAX} = \frac{P}{18} \times \frac{\ell_B}{2} = \frac{P\ell_B}{36}$$

$$\ell_B = 2\ell_A \Rightarrow M_{B,MAX} = \frac{P\ell_A}{18}$$

$$\frac{M_{A,MAX}}{M_{B,MAX}} = \frac{2}{9}P\ell_A \times \frac{18}{P\ell_A} \quad \therefore \quad \boxed{M_{A,MAX} = 4M_{B,MAX}}$$

Comportamento Estrutural

- ✓ Conclusões / observações:

a) A maior parcela de carga é transferida para viga de menor vão;

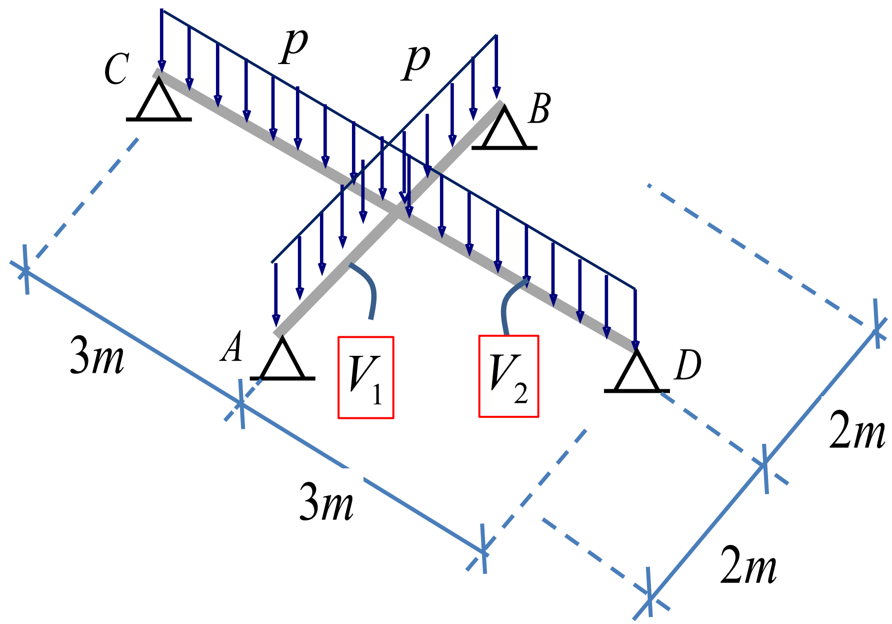
b) A viga mais rígida (curta) será mais solicitada em comparação com a viga mais flexível (longa);

c) A interligação das vigas pode introduzir um giro na seção transversal (exceto nos eixos de simetria);

d) Quando uma das vigas sofre flexão, a viga interligada sofre um efeito de torção (exceto nos eixos de simetria);

Exercício 1

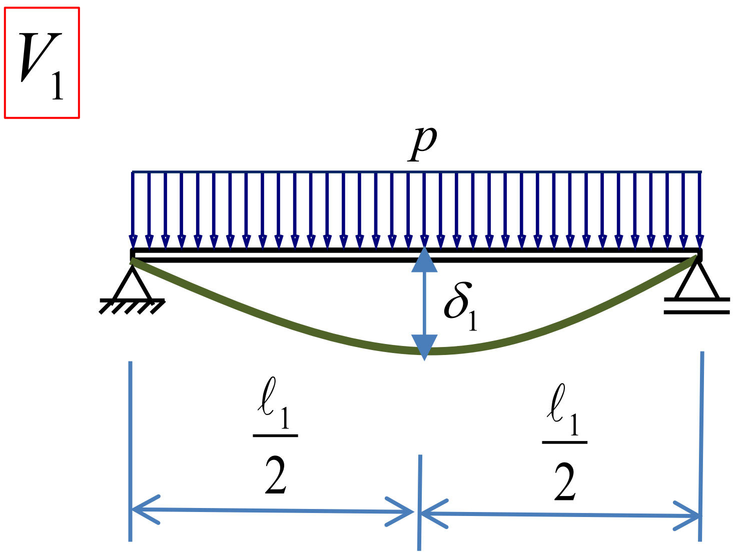
- ✓ As duas vigas da figura abaixo têm a mesma seção transversal (b=20cm e h=50cm) e o mesmo material (γ_c=25kN/m³). Determinar os diagramas de esforços solicitantes quando sobre elas atuar apenas o peso próprio.

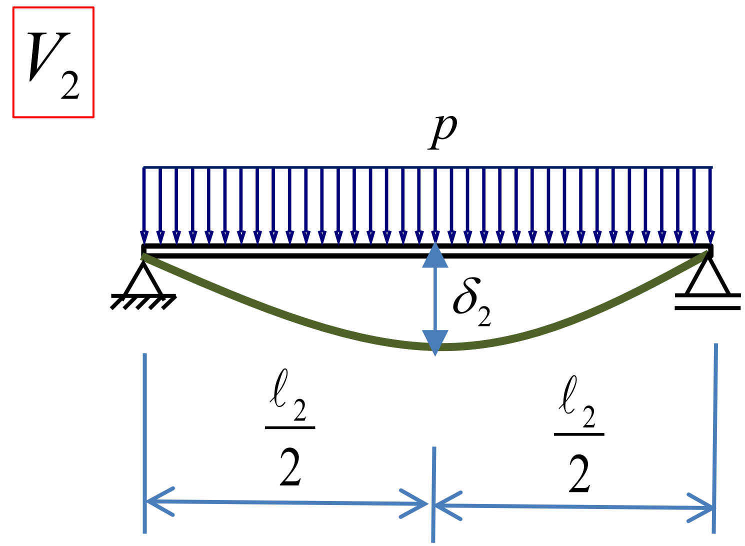


- Peso próprio: $p = b.h.\gamma_c = 0,2m \times 0,5m \times 25kN/m^3 = 2,5kN/m$
- Comprimento de V1: $\ell_1 = 4m$
- Comprimento de V2: $\ell_2 = 6m$

Exercício 1 - Resolução

a) Se as vigas fossem independentes, V1 teria uma deflexão no ponto médio menor que V2 ($\delta_1 < \delta_2$):



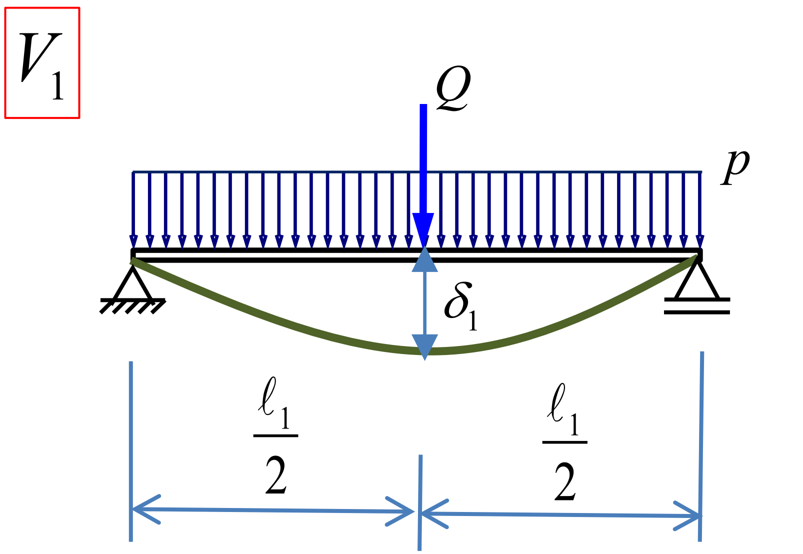


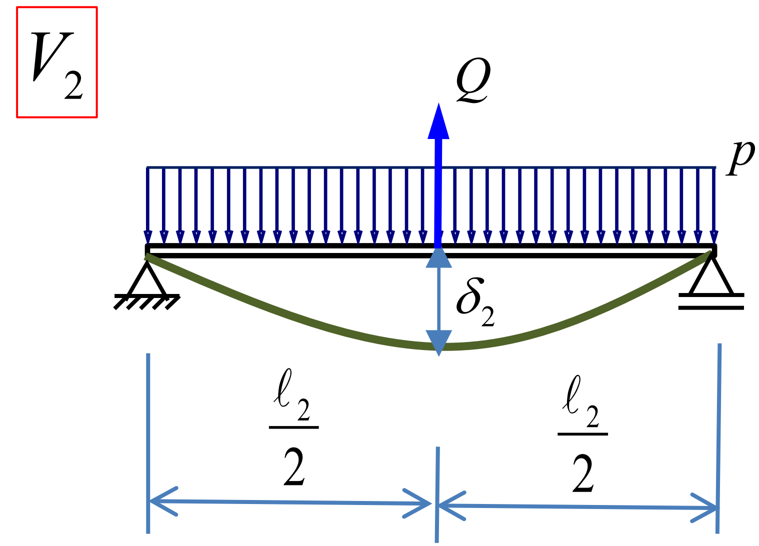
- Como a interligação é rígida, há compatibilidade das deformações:

$$\boxed{\delta_1 = \delta_2}$$

Exercício 1 - Resolução

- Desta maneira surge uma força de interação Q entre as vigas, sendo que V2 se apoia sobre V1:





$$\delta_1 = \delta_1^p + \delta_1^Q = \frac{5p\ell_1^4}{384EI} + \frac{Q\ell_1^3}{48EI}$$

$$\delta_2 = \delta_2^p - \delta_2^Q = \frac{5p\ell_2^4}{384EI} - \frac{Q\ell_2^3}{48EI}$$

Exercício 1 - Resolução

- COMPATIBILIDADE: $\delta_1 = \delta_2$

$$\frac{5p\ell_1^4}{384EI} + \frac{Q\ell_1^3}{48EI} = \frac{5p\ell_2^4}{384EI} - \frac{Q\ell_2^3}{48EI}$$

$$\frac{Q}{48}\left(\ell_1^3 + \ell_2^3\right) = \frac{5}{384}p\left(\ell_2^4 - \ell_1^4\right)$$

$$\boxed{Q = \frac{5}{8}\frac{\left(\ell_2^4 - \ell_1^4\right)}{\left(\ell_1^3 + \ell_2^3\right)}p}$$

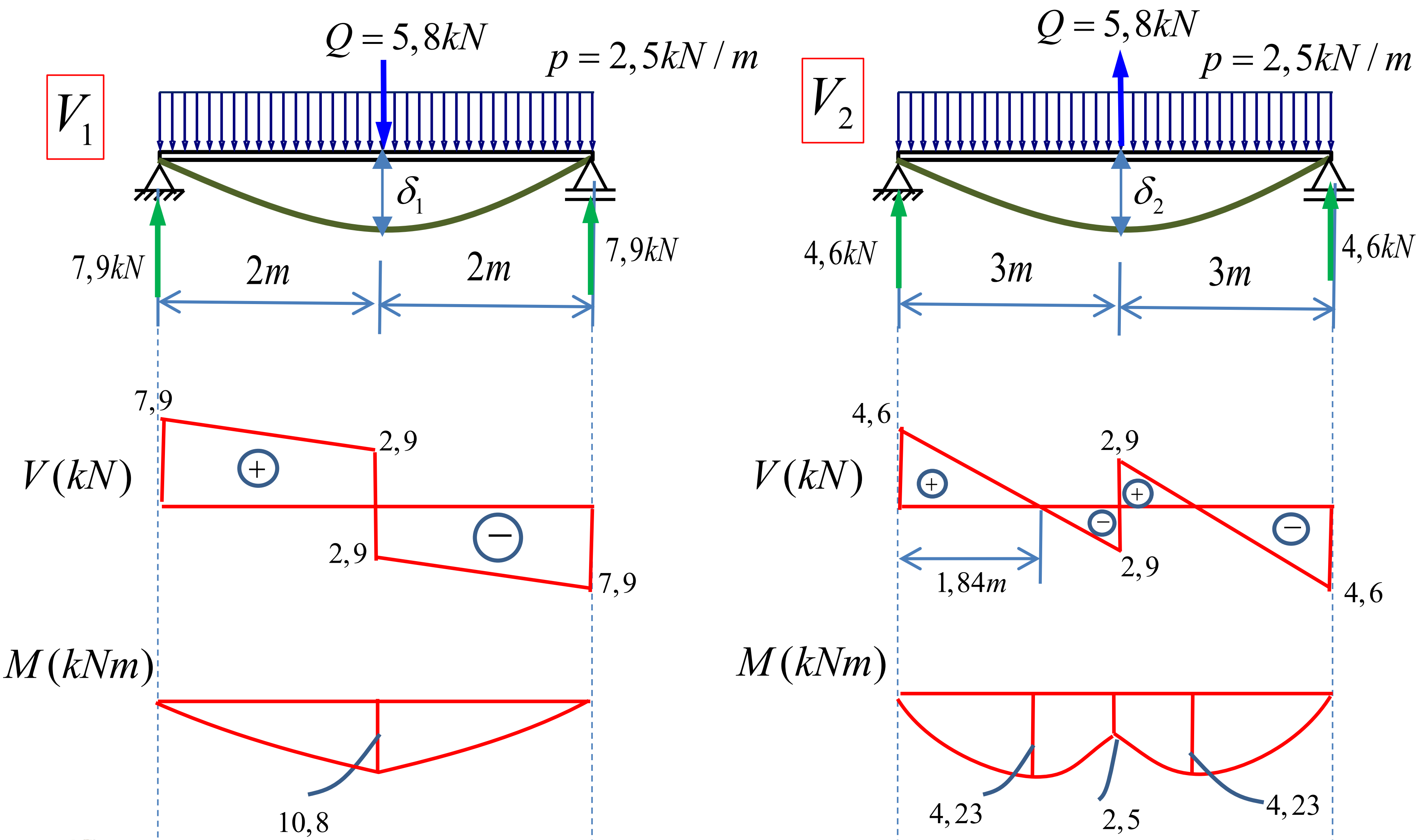
- obs: Note que se $(EI)_1 \neq (EI)_2$, haverá outra relação.

- Substituindo os valores:

$$\boxed{Q = \frac{5}{8}\frac{\left(6^4 - 4^4\right)}{\left(4^3 + 6^3\right)} \times 2,5 = 5,80kN}$$

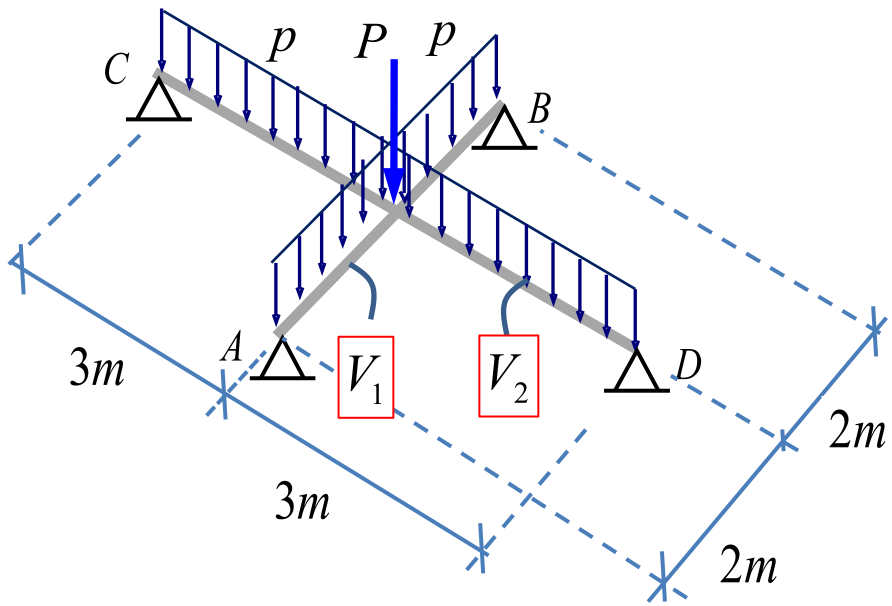
Exercício 1 - Resolução

- Diagrama de esforços solicitantes:



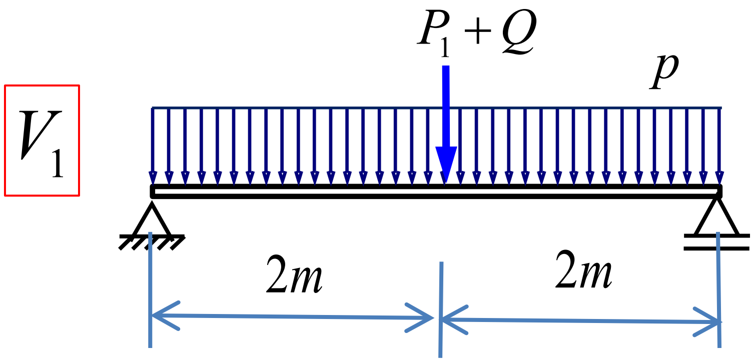
Exercício 1 - Resolução

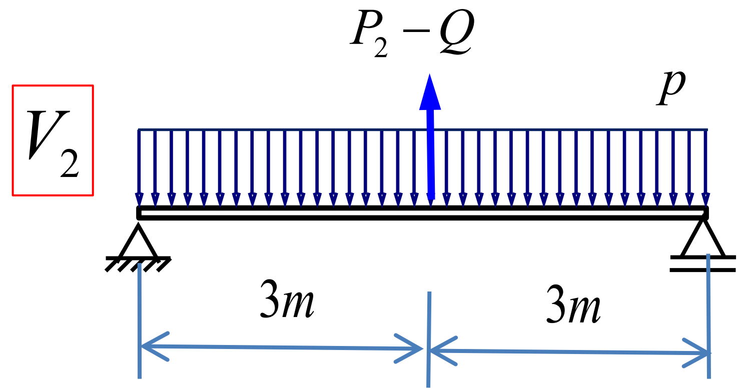
b) Supondo a existência de uma carga adicional P=20kN, aplicada ao ponto de cruzamento das vigas, conforme o que se viu no exemplo anterior



Exercício 1 - Resolução

Esta carga P=20kN se distribuirá entre as duas vigas, conforme o que se viu no exemplo anterior $(P=P_1+P_2)$





- Como visto:

$$\begin{cases} \dfrac{P_1}{P_2}=\left(\dfrac{\ell_2}{\ell_1}\right)^3=\alpha \\ P_1+P_2=P \end{cases}$$

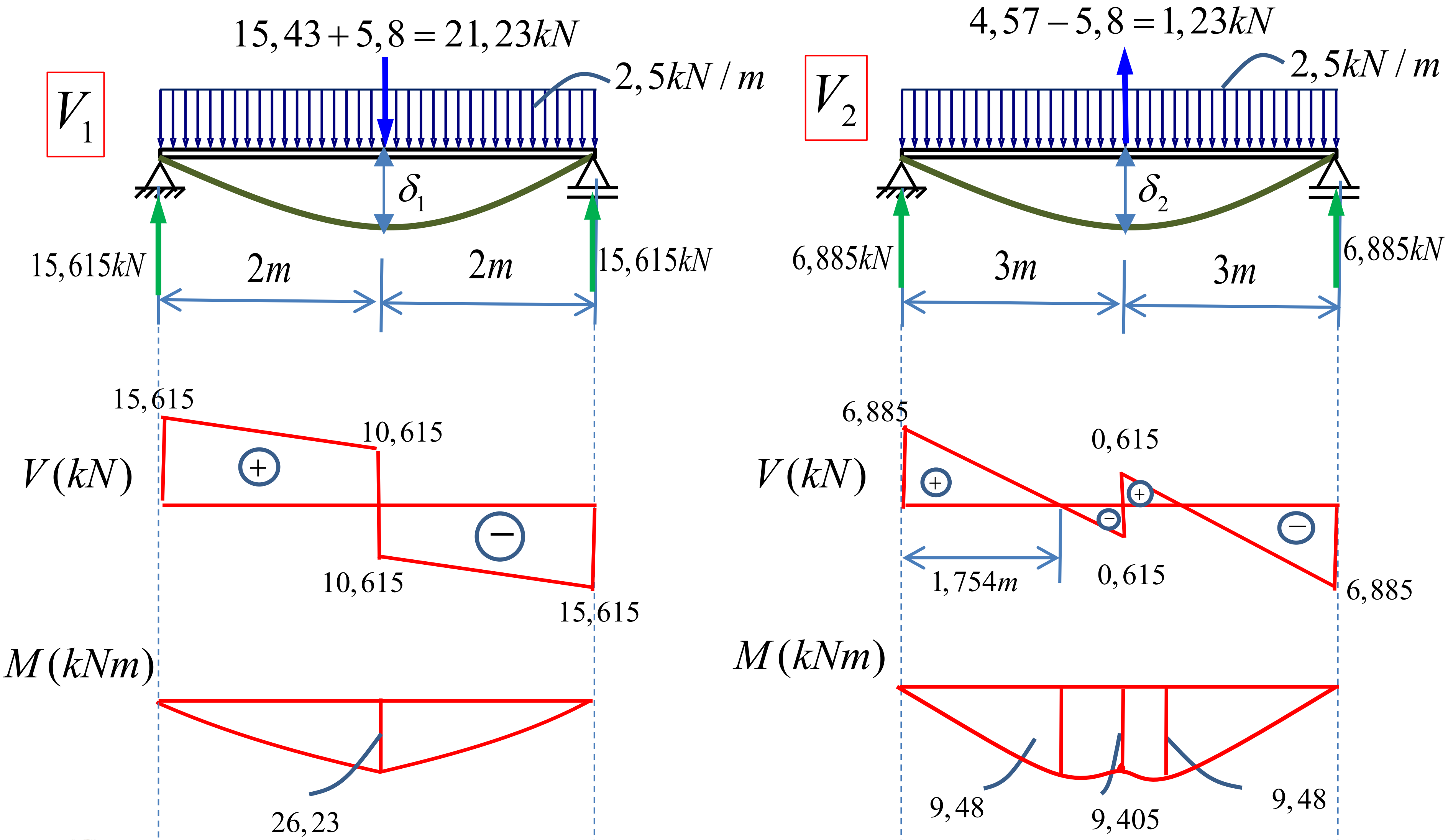
- Resulta em:

$$P_1=\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)P \qquad e \qquad P_2=\frac{P}{\alpha+1}$$

$$\alpha=\left(\frac{6}{4}\right)^3\cong 3{,}38 \qquad \boxed{\Rightarrow \quad P_1=\left(\frac{3{,}38}{3{,}38+1}\right)\times 20=15{,}43kN} \quad e \quad \boxed{P_2=\left(\frac{20}{3{,}38+1}\right)=4{,}57kN}$$

Exercício 1 – Resolução

– Diagrama de esforços solicitantes:

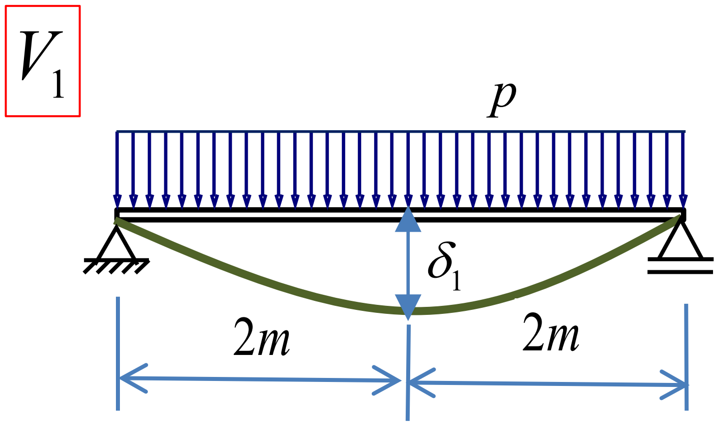


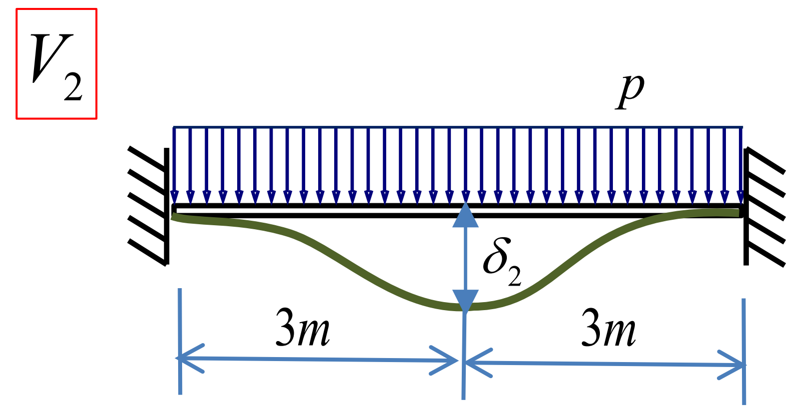
Exercício 1 – Resolução

c) Viga V2 é bi-engastada (mais rígida)

– Será que a viga V2 continua a se apoiar na viga V1, ou a situação se inverte?

– Se trabalhassem de forma independente:





$$\delta_1 = \frac{5p\ell_1^4}{384EI} = \frac{5\times 2,5\times 4^4}{384EI} = \frac{8,33}{EI}$$

$$\delta_2 = \frac{p\ell_2^4}{384EI} = \frac{2,5\times 6^4}{384EI} = \frac{8,44}{EI}$$

$\delta_1 < \delta_2 \quad \Rightarrow$ A viga V2 continua a se apoiar na viga V1, como no caso anterior, mas a força de interação Q é menor.

Exercício 1 - Resolução

c) - Ao trabalhar em conjunto (compatibilidade): $\boxed{\delta_1 = \delta_2}$

$$\delta_1^p + \delta_1^Q = \delta_2^p - \delta_2^Q$$

$$\frac{5p\ell_1^4}{384EI} + \frac{Q\ell_1^3}{48EI} = \frac{p\ell_2^4}{384EI} - \frac{Q\ell_2^3}{192EI}$$

$$\frac{Q}{192}\left(4\ell_1^3 + \ell_2^3\right) = \frac{1}{384}p\left(\ell_2^4 - 5\ell_1^4\right)$$

$$\boxed{Q = \frac{1}{384} \times 192 \times \frac{\left(\ell_2^4 - 5\ell_1^4\right)}{\left(4\ell_1^3 + \ell_2^3\right)}p}$$

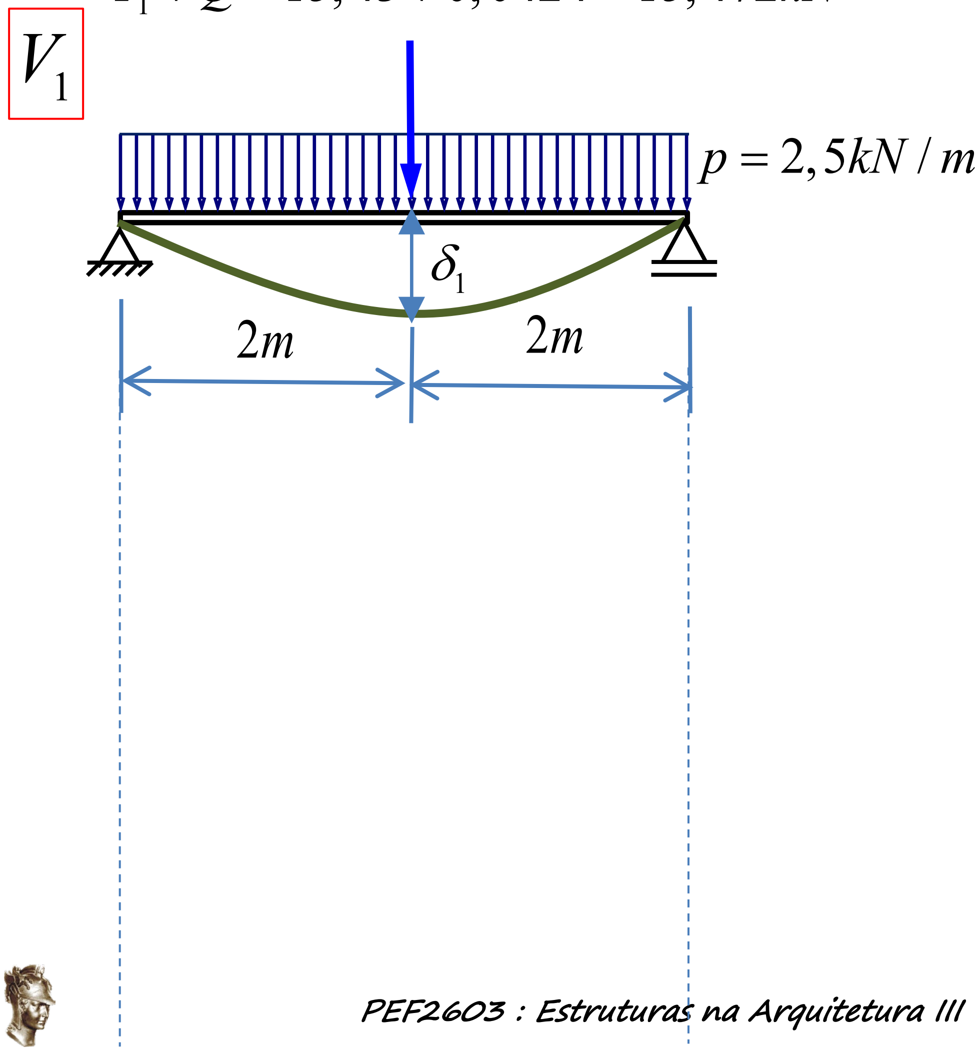
- Substituindo os valores:

$$\boxed{Q = \frac{2,5}{384} \times 192 \times \frac{\left(6^4 - 5 \times 4^4\right)}{\left(4 \times 4^3 + 6^3\right)} = 0,0424kN}$$

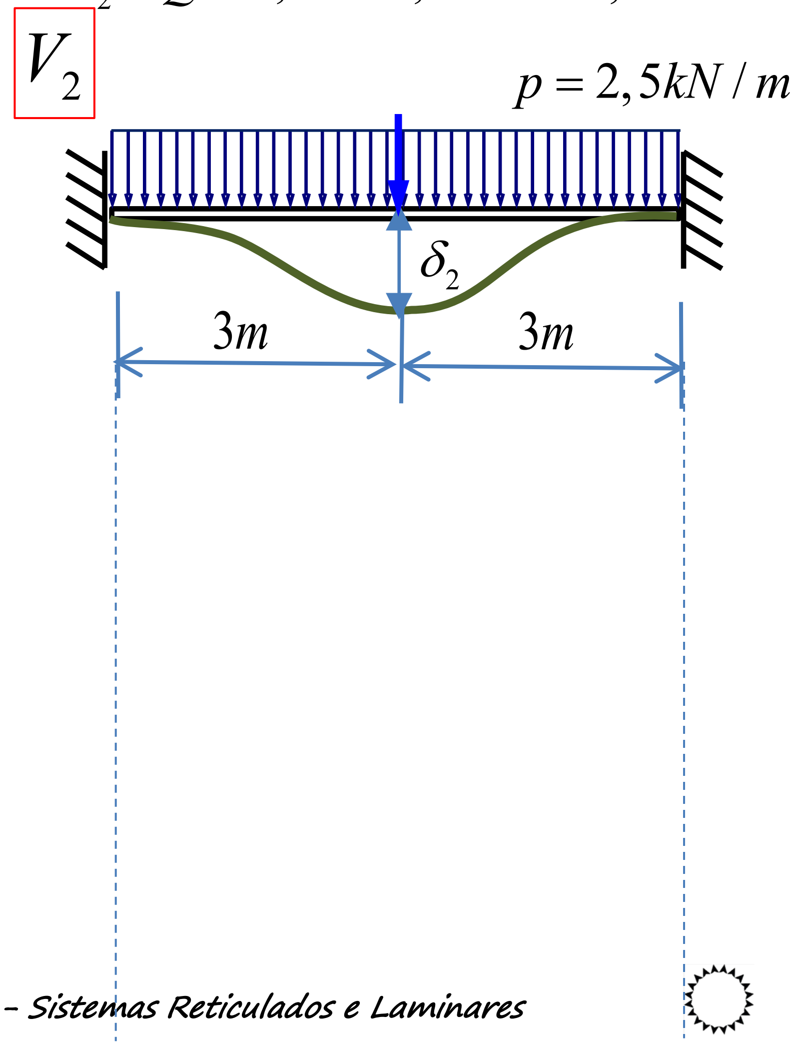
Exercício 1 - Resolução

- Diagrama de esforços solicitantes
(exercício para praticar - não precisa entregar!):

$$P_1 + Q = 15,43 + 0,0424 = 15,472kN$$



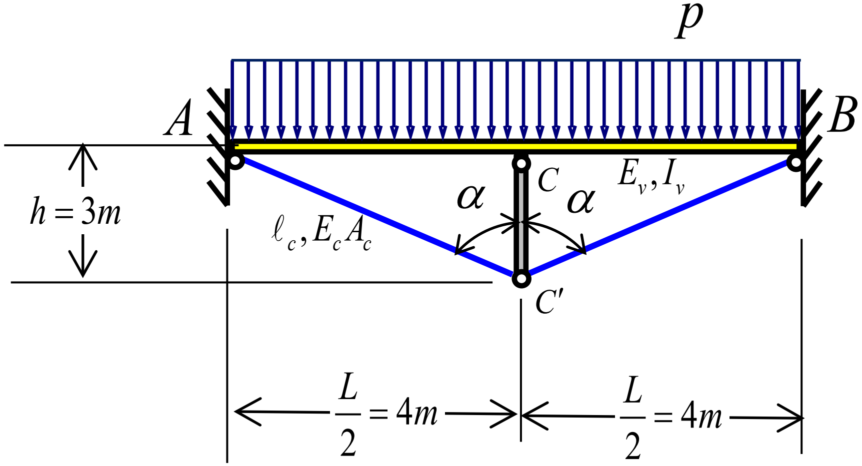
$$P_2 - Q = 4,57 - 0,0424 = 4,5276kN$$

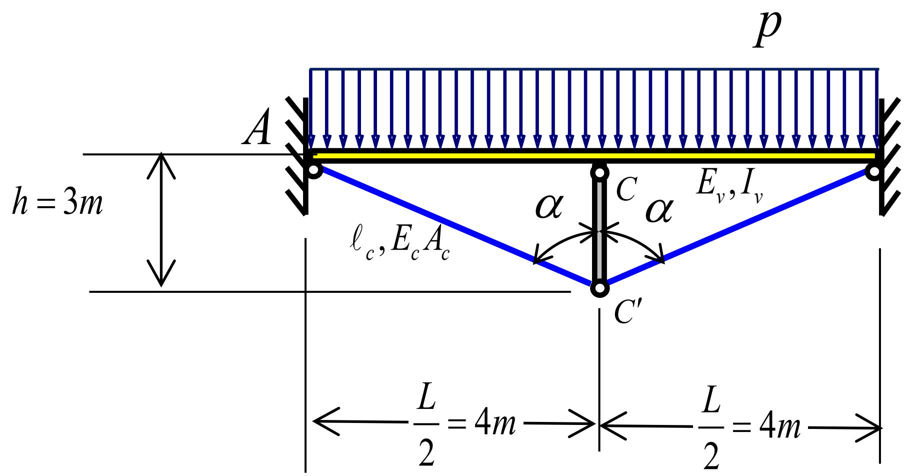


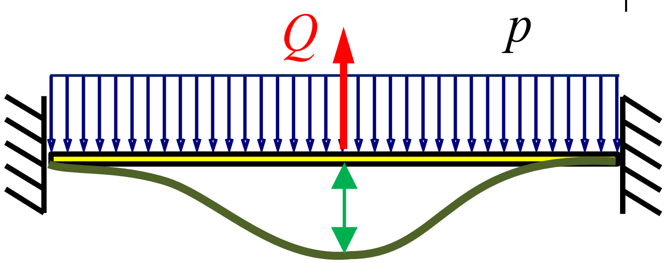
Exercício 2 - Viga vagonada

Viaducte d'Osomort, Bacelona (1994).

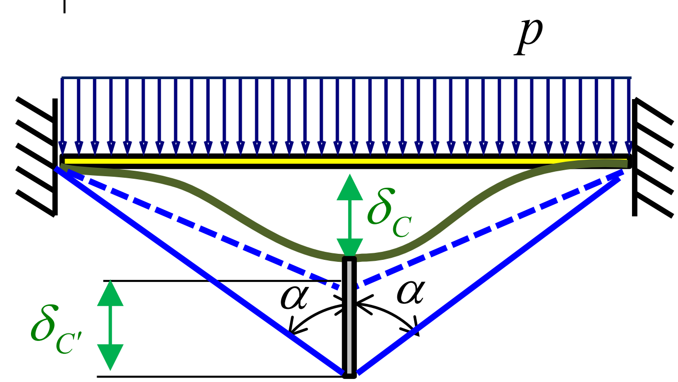

AGROMAN


p
A
B
C
C'
E_v, I_v
α
α
$\ell_c, E_c A_c$
$h = 3m$
$\frac{L}{2} = 4m$
$\frac{L}{2} = 4m$



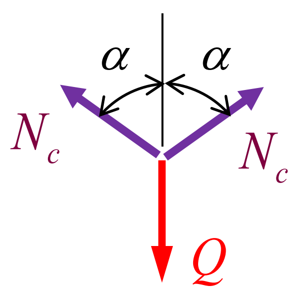


$$\delta_C = \delta_{C,p} - \delta_{C,Q}$$



$$\delta_C = \frac{pL^4}{384E_vI_v} - \frac{QL^3}{192E_vI_v}$$

$$\delta_{C'} = \frac{\Delta\ell_c}{\cos\alpha} = \frac{N_c\ell_c}{E_cA_c}\left(\frac{\ell_c}{h}\right) = \frac{N_c\ell_c^2}{E_cA_ch}$$



$$2N_c\cos\alpha - Q = 0$$

$$N_c = \frac{Q}{2\cos\alpha} = \frac{Q\ell_c}{2h}$$

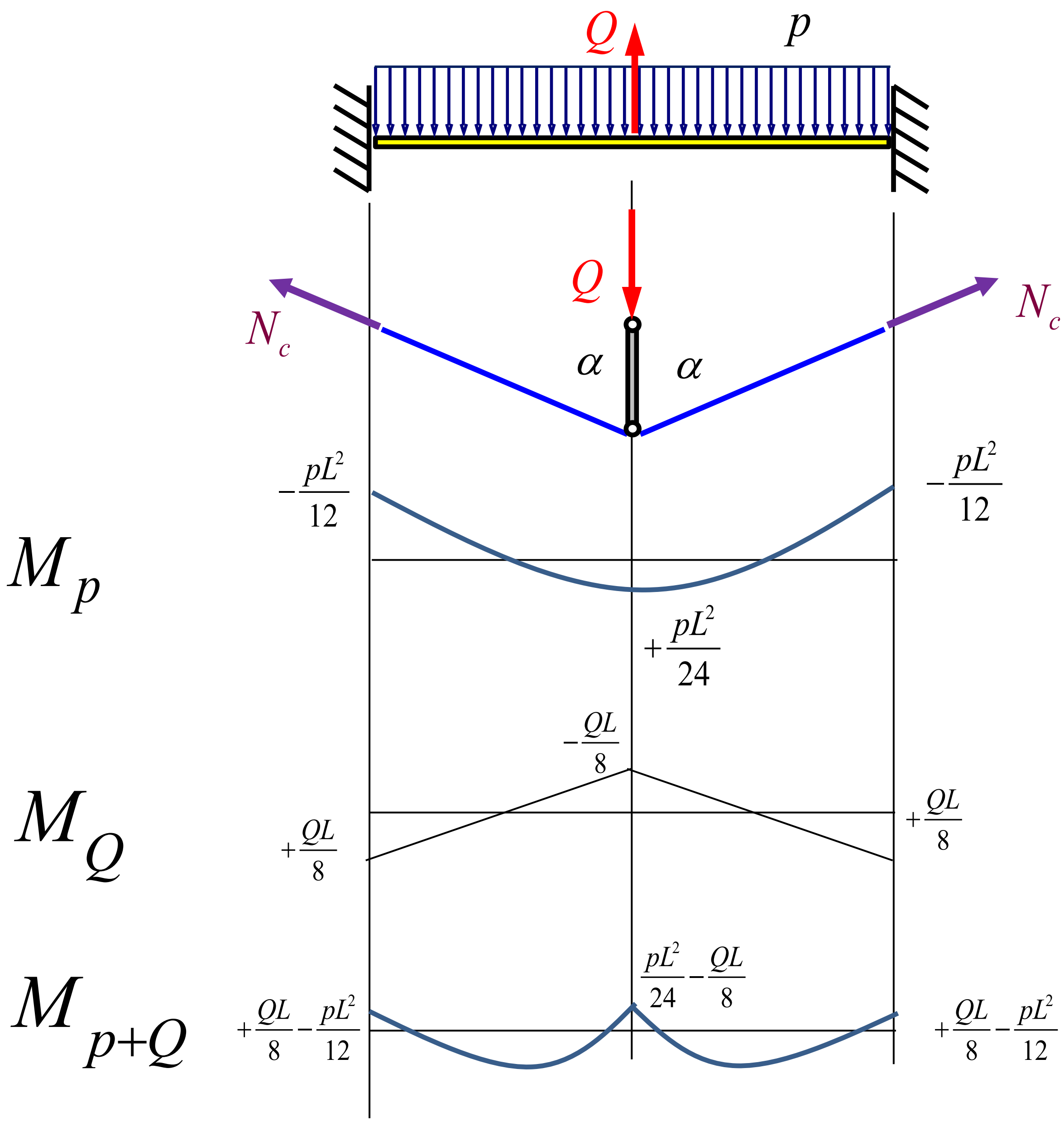
$$\delta_{C'} = \frac{Q\ell_c^3}{2E_cA_ch^2}$$

Barra CC’ rígida: $\boxed{\delta_C = \delta_{C'}}$

$$\frac{pL^4}{384E_vI_v} - \frac{QL^3}{192E_vI_v} = \frac{Q\ell_c^3}{2E_cA_ch^2}$$

$$Q\left(\frac{L^3}{192E_vI_v} + \frac{\ell_c^3}{2E_cA_ch^2}\right) = \frac{pL^4}{384E_vI_v}$$

$$\boxed{Q = \left(\frac{h^2E_cA_c}{h^2L^3E_cA_c + 96\ell_c^3E_vI_v}\right)\frac{pL^4}{2}}$$



Q
p
Q
N_c
N_c
α
α
$-\frac{pL^2}{12}$
$-\frac{pL^2}{12}$
M_p
$+\frac{pL^2}{24}$
$-\frac{QL}{8}$
M_Q
$+\frac{QL}{8}$
$+\frac{QL}{8}$
$\frac{pL^2}{24}-\frac{QL}{8}$
M_{p+Q}
$+\frac{QL}{8}-\frac{pL^2}{12}$
$+\frac{QL}{8}-\frac{pL^2}{12}$