LIMITES E DERIVADAS

RICARDO BIANCONI

1. Introdução

Calculamos diversos limites. Lembramos os seguintes limites fundamentais:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1;\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to -\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2,71828\ldots$$

$$\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{1/x} = \lim_{x\to 0^-}(1+x)^{1/x} = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$$

Lembramos as propriedades das exponenciais e dos logaritmos.

$$a^b = c \Leftrightarrow \log_a c = b;\ a^{\log_a b} = b; \log_a(a^b) = b$$

$$a^{b+c} = a^b a^c;\ (a^b)^c = a^{bc};\ a^{-b} = \frac{1}{a^b};$$

$$\log_a b + \log_a c = \log_a bc;\ \log_a b - \log_a c = \log_a\left(\frac{b}{c}\right); \log_a b^c = c\log_a b$$

Quando a base do logaritmo for o número e, denotamos $\log_e x = \ln x$. Observe que $a^x = e^{x\ln a}$.

Por fim, algumas igualdades trigonométricas úteis.

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a\cos b + \cos a\operatorname{sen} b;\ \operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a\cos b - \cos a\operatorname{sen} b;$$

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \operatorname{sen} a\operatorname{sen} b;\ \cos(a-b) = \cos a\cos b + \operatorname{sen} a\operatorname{sen} b$$

Date: 2023.

2. Exemplos Diversos

Exemplo 1. Para calcular $\lim_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{x}$, como envolve um limite parecido com $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{\boldsymbol{x}}-1}{\boldsymbol{x}}$ (a mesma expressão que aparece no expoente de e, tem que aparecer no denominador da fração), vamos tentar modificar a expressão para fazer aparecer este limite. Observe que $2^x = e^{x\ln 2}$. Daí,

$$\frac{2^x-1}{x} = \frac{e^{x\ln 2}-1}{x} = \frac{\ln 2}{\ln 2}\left(\frac{e^{x\ln 2}-1}{x}\right) = (\ln 2)\left(\frac{e^{x\ln 2}-1}{x\ln 2}\right)$$

Fazemos $t = x\ln 2$, e se $x\to 0$, então $t\to 0$ e, assim, podemos calcular o limite desta forma:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x} = (\ln 2)\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln 2}-1}{x\ln 2} = (\ln 2)\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t} = \ln 2.$$

Exemplo 2. Calcular $\lim_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{5^x-1}$. Observe que tanto o numerador "3^x-1", quanto o denominador "5^x-1" tendem a zero, se $x\to 0$. Vamos fazer aparecer o limite fundamental com as seguintes transformações. Primeiro fazemos aparecer o termo "x" que está faltando:

$$\frac{3^x-1}{5^x-1} = \frac{x}{x}\left(\frac{3^x-1}{5^x-1}\right) = \left(\frac{3^x-1}{x}\right)\left(\frac{x}{5^x-1}\right) = \left(\frac{3^x-1}{x}\right)\left(\frac{5^x-1}{x}\right)^{-1} =$$

$$= \left(\frac{e^{x\ln 3}-1}{x}\right)\left(\frac{e^{x\ln 5}-1}{x}\right)^{-1} = \left((\ln 3)\frac{e^{x\ln 3}-1}{x\ln 3}\right)\left((\ln 5)\frac{e^{x\ln 5}-1}{x\ln 5}\right)^{-1} =$$

$$= (\ln 3)(\ln 5)^{-1}\left(\frac{e^{x\ln 3}-1}{x\ln 3}\right)\left(\frac{e^{x\ln 5}-1}{x\ln 5}\right)^{-1} = \frac{\ln 3}{\ln 5}\left(\frac{e^{x\ln 3}-1}{x\ln 3}\right)\left(\frac{e^{x\ln 5}-1}{x\ln 5}\right)^{-1}$$

Fazemos como no exemplo anterior e obtemos

$$\left(\frac{e^{x\ln 3}-1}{x}\right) = \ln 3;\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x\ln 5}-1}{x}\right)^{-1} = \left(\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln 5}-1}{x}\right)^{-1} = (\ln 5)^{-1}$$

Portanto, o resultado final é

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{5^x-1} = \frac{\ln 3}{\ln 5}.$$

Exemplo 3. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\operatorname{sen} x}$. Aqui misturamos dois dos limites fundamentais. Observe que se $x \to 0$, $(e^x - 1) \to 0$ e $\operatorname{sen} x \to 0$. Fazemos aparecer o termo "x" que está faltando do mesmo modo de sempre

$$\frac{e^x - 1}{\operatorname{sen} x} = \frac{x}{x}\left(\frac{e^x - 1}{\operatorname{sen} x}\right) = \left(\frac{e^x - 1}{x}\right)\left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right) = \left(\frac{e^x - 1}{x}\right)\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{-1}$$

Com isso temos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\operatorname{sen} x} = \left(\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{-1} = 1$$

Exemplo 4. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{7^x - 1}{\operatorname{sen}(2\pi x)}$. Fazemos aparecer o termo "x" que falta, e também as constantes "$\ln 7$" (pois $7^x = e^{x\ln 7}$) e "2π":

$$\frac{7^x - 1}{\operatorname{sen}(2\pi x)} = (\ln 7)\left(\frac{e^{x\ln 7} - 1}{x\ln 7}\right)(2\pi)^{-1}\left(\frac{\operatorname{sen}(2\pi x)}{2\pi x}\right)^{-1},$$

que tende a $(\ln 7)(2\pi)^{-1} = \dfrac{\ln 7}{2\pi}$, quando $x \to 0$.

Exemplo 5. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x - 5^x}{x}$. Observe que se $x \to 0$, então $(3^x - 5^x) \to 0$ também. Vamos fazer aparecer o limite fundamental com um pequeno truque (ou estratégia, se preferir):

$$\frac{3^x - 5^x}{x} = \frac{3^x - 1 + 1 - 5^x}{x} = \left(\frac{3^x - 1}{x}\right) + \left(\frac{1 - 5^x}{x}\right) = \left(\frac{3^x - 1}{x}\right) - \left(\frac{5^x - 1}{x}\right)$$

Exemplo 6. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(12x)}{\pi^x - 2^{-x}}$. Procedemos como acima.

$$\frac{\operatorname{sen}(12x)}{\pi^x - 2^{-x}} = \left(\frac{\operatorname{sen}(12x)}{x}\right)\left(\frac{\pi^x - 2^{-x}}{x}\right)^{-1} =$$

$$12\left(\frac{\operatorname{sen}(12x)}{12x}\right)\left(\frac{e^{\ln\pi}x - 1 + 1 - e^{-x\ln 2}}{x}\right)^{-1} =$$

$$= 12\left(\frac{\operatorname{sen}(12x)}{12x}\right)\left[(\ln\pi)\left(\frac{e^{\ln\pi}x - 1}{x\ln\pi}\right) + (-\ln 2)\left(\frac{1 - e^{-x\ln 2}}{-x\ln 2}\right)\right]^{-1} =$$

$$= 12\left(\frac{\mathrm{sen}(12x)}{12x}\right)\left[(\ln\pi)\left(\frac{e^{\ln\pi}x - 1}{x\ln\pi}\right) + (\ln 2)\left(\frac{e^{-x\ln 2} - 1}{-x\ln 2}\right)\right]^{-1}$$

Essa expressão tende a $12[(\ln\pi) + (\ln 2)]^{-1} = 12[\ln(2\pi)]^{-1} = \dfrac{12}{\ln(2\pi)}$, se $x \to 0$.

Exemplo 7. Calcular $\lim\limits_{x\to 0}(1 + 3x)^{1/x}$. Neste caso, temos que obter o limite fundamental $\lim_{t\to 0}(1 + t)^{1/t} = e$. Isso é simples, fazemos $t = 3x$, $x = t/3$, e como $t \to 0$ se $x \to 0$, e obtemos

$$\lim_{x\to 0}(1 + 3x)^{1/x} = \lim_{t\to 0}(1 + t)^{3/t} = \lim_{t\to 0}[(1 + t)^{1/t}]^3 = \left[\lim_{t\to 0}(1 + t)^{1/t}\right]^3 = e^3$$

---

3. Derivadas

Definição 1. A derivada de uma função f em um ponto $\in \mathrm{Dom}(f)$ é o limite

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x + t) - f(x)}{t}.$$

As duas notações são usadas (dependendo do livro que você consultar), $f'(x)$ e $\dfrac{df}{dx}(x)$: use a que você preferir. Se existir esse limite, então dizemos que a função é derivável em x (ou simplesmente, derivável).

Observação 1. Funções deriváveis em x_0 são contínuas em x_0, pois

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{t\to 0} f(x_0 + t) = \lim_{t\to 0}\left[t\left(\frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}\right) + f(x_0)\right] = f(x_0).$$

Proposição 1 (Propriedades das Derivadas)**.** Sejam f e g duas funções deriváveis em x. Então $f + g$, fg e, se $g(x) \neq 0$, f/g, são deriváveis em x e valem as igualdades

(a) $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$;

(b) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;

(c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$.

Demonstração. A primeira propriedade é a do limite de uma soma de funções.

A segunda decorre de

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+t)g(x+t) - f(x)g(x)}{t} =$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t)g(x+t) - f(x)g(x+t) + f(x)g(x+t) - f(x)g(x)}{t} =$$
$$= \lim_{t\to 0} \left[g(x+t) \left(\frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right) + f(x) \left(\frac{g(x+t) - g(t)}{t} \right) \right],$$

e do fato que g é contínua em x.

O terceiro caso é parecido com o segundo. □

Exemplo 8 (Funções Constantes)**.** Se $f(x) = a \in \mathbb{R}$, constante, então

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{a-a}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0.$$

Exemplo 9 (A Função Identidade)**.** A derivada de $f(x) = x$ é $f'(x) = 1$. Faça as contas.

Exemplo 10 (Potências de Expoentes Inteiros)**.** Começamos com $n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$, e $\boxed{f(x) = x^n}$. Já sabemos que

$$(x+t)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} t^k = x^n + nx^{n-1}t + t^2\text{etc.}$$

Assim, temos

$$\frac{(x+t)^n - x^n}{t} = \frac{x^n + nx^{n-1}t + t^2\text{etc} - x^n}{t} = nx^{n-1} + t\,\text{etc},$$

que tende a nx^{n-1}, quando $t \to 0$, ou seja, $\boxed{f'(x) = nx^{n-1}}$.

Para $\boxed{g(x) = x^{-n} = 1/x^n}$, com $n > 0$, a propriedade da derivada da divisão fornece $\boxed{g'(x) = (-n)x^{-n-1}.}$

Exemplo 11 (Exponencial)**.** Seja $f(x) = e^x$. Como $e^{x+t} = e^x e^t$, sua derivada é

$$f'(x) = \lim_{t\to 0} \frac{e^{x+t} - e^x}{t} = e^x \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = e^x.$$

Exemplo 12 (Logaritmo)**.** Seja $f(x) = \ln x$. Como $\ln(x+t) - \ln x = \ln(1 + (t/x))$, $(1/t)\ln(1+(t/x)) = \ln(1+(t/x))^{1/t}$, e $\lim_{t\to 0}(1+(t/x))^{1/t} = e^{1/x}$,

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(x+t) - \ln x}{t} = \lim_{t\to 0} \ln\left(1 + \frac{t}{x}\right)^{1/t} = \ln\left[\lim_{t\to 0}\left(1+\frac{t}{x}\right)^{1/t}\right] = \ln(e^{1/x}) = \frac{1}{x},$$

ou seja, a derivada de $f(x) = \ln x$ é $f'(x) = 1/x$.

Exemplo 13 (Potências com Expoentes Reais)**.** Sejam $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, e $f(x) = x^a$ $(x > 0)$.

$$\lim_{t\to 0} \frac{(x+t)^a - x^a}{t} = x^a \lim_{t\to 0} \frac{[(x+t)/x]^a - 1}{t} = x^a \lim_{t\to 0} \frac{[1+(t/x)]^a - 1}{t}.$$

Como o expoente $a \in \mathbb{R}$ não precisa ser inteiro, usamos uma técnica diferente para resolver esse limite. Escrevemos $(1+(t/x))^a = \exp[a\ln(1+(t/x))]$ (onde $\exp Y = e^Y$, para a expressão $Y = a\ln(1+(t/x))$), e fazemos as transformações necessárias para chegar no limite fundamental $\displaystyle\lim_{Y\to 0}\frac{e^Y - 1}{Y} = 1$; observe que se $t \to 0$, então $Y = a\ln(1+(t/x)) \to 0$. Multiplicamos e dividimos pela expressão Y e obtemos

$$\lim_{t\to 0} \frac{[1+(t/x)]^a - 1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{a\ln(1+(t/x))} - 1}{t} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{e^{a\ln(1+(t/x))} - 1}{a\ln(1+(t/x))}\right) \times$$

$$\times \lim_{t\to 0}\left(\frac{a\ln(1+t/x))}{t}\right) = \lim_{Y\to 0}\frac{e^Y - 1}{Y} \times \lim_{t\to 0} a\ln\left(1+\frac{t}{x}\right)^{1/t} = \frac{a}{x}$$

Com isso, obtemos a derivada de $f(x) = x^a$, $\boxed{f'(x) = ax^a/x = ax^{a-1}}$.

Exemplo 14 (Derivada do Seno)**.** Se $f(x) = \operatorname{sen} x$, então $f'(x) = \cos x$, pois

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+t) - \operatorname{sen} x}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos t + \cos x \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} x}{t} =$$

$$= (\operatorname{sen} x) \lim_{t\to 0} \left(\frac{\cos t - 1}{t}\right) + (\cos x) \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = \cos x.$$

Lembramos que $\lim_{t\to 0} \frac{\cos t - 1}{t} = 0$, e $\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$.

Exemplo 15 (Derivada do Cosseno)**.** Se $f(x) = \cos x$, então sua derivada é $f'(x) = -\operatorname{sen} x$, pois

$$\lim_{t\to 0} \frac{\cos(x+t) - \cos x}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos x \cos t - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} t - \cos x}{t} =$$

$$= (\cos x) \lim_{t\to 0} \left(\frac{\cos t - 1}{t}\right) - (\operatorname{sen} x) \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = -\operatorname{sen} x.$$

---

4. Exercícios

Q 1 (Limites)**.** Mostre que (ou seja, calcule e verifique se bate com a resposta):

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x}{x} = 1$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{5^x - (x+1)e^x}{\operatorname{sen}(3x)} = \frac{(\ln 5) - 2}{3}$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{(\ln 6)^x - 1}{x} = \ln(\ln 6)$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x} = 0$

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

(f) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{1 - \cos x} = 2$

(g) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 9^x}{\operatorname{sen}(4x)} = -\frac{\ln 9}{4}$

(h) $\lim_{x\to 0} e^{2x} - 1x^2 + 5x = \dfrac{2}{5}$

(i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{xe^x + \operatorname{sen} x}{x^4 + 6x^3 - 3x^2 + x} = 2$

(j) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x \cos x - 1}{3x^2 - 2x} = -\dfrac{1}{2}$

Q 2 (Limites)**.** Mostre que (aqui basta usar as propriedades das derivadas das somas, produtos e divisões):

(a) $\dfrac{d}{dx}(4x^5 - 3x^2 + 2x - 8) = 20x^3 - 6x + 2$

(b) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2 + x + 1}{x^3 + 6x^2 + 8x - 1}\right) = -\left(\dfrac{x^4 + 2x^3 + x^2 + 14x + 9}{(x^3 + 6x^2 + 8x - 1)^2}\right)$

(c) $\dfrac{d}{dx}(xe^x) = (x+1)e^x$

(d) $\dfrac{d}{dx}(x^2 e^x) = (x^2 + 2x)e^x$

(e) $\dfrac{d}{dx}(x^a e^x) = (x^a + ax^{a-1})e^x$

(f) $\dfrac{d}{dx}(x \ln x) = 1 + \ln x$

(g) $\dfrac{d}{dx}(x^a \ln x) = x^{a-1}(1 + a \ln x)$

(h) $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \sec^2 x$; $(\operatorname{tg} x = \operatorname{sen} x / \cos x,\ \sec x = 1/\cos x)$

(i) $\dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \operatorname{tg} x$

(j) $\dfrac{d}{dx}(x \operatorname{sen} x + 3x \cos x) = (1 - 3x)\operatorname{sen} x + (x+3)\cos x$

(k) $\dfrac{d}{dx}(e^{-x}) = -e^{-x}$; $(e^{-x} = 1/e^x)$

(l) $\dfrac{d}{dx}(e^x \operatorname{sen} x) = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)$

(m) $\dfrac{d}{dx}(e^x \cos x) = e^x(\cos x - \operatorname{sen} x)$

(n) $\dfrac{d}{dx}(xe^x \operatorname{sen} x) = e^x[(x+1)\operatorname{sen} x + x \cos x]$
