DE VOLTA AO CÁLCULO: SEQUÊNCIAS E SÉRIES

Uma sequência é uma função $f : \mathbb{N} \to \left\{\begin{matrix}\mathbb{C}\\ \mathbb{R}\end{matrix}\right.$. Os valores $f(n)$ são, com frequência, denotados por a_n ou x_n e a sequência, ela própria, denotada por $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ou $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ou $\{f(n)\}$.

Ex: $f(n) = 1/n \rightsquigarrow \{1/n\} \rightsquigarrow 1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$

$\{1/2^n\} \rightsquigarrow \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

$\{(-1)^n\} \rightsquigarrow -1, +1, -1, +1, \ldots$

$\{e^{\frac{n\pi i}{2}}\} \rightsquigarrow$?? (Exercício.)

Ex: $a_0 = a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$: Sequência de Fibonacci.

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

Dizemos que a sequência $\{f(n)\}$ converge para o limite $L \in \left\{\begin{matrix}\mathbb{R}\\ \mathbb{C}\end{matrix}\right.$ se

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \text{tal que } \forall n \geq N \Rightarrow |f(n) - L| < \varepsilon.}$$

Nesse caso, escrevemos

$$\lim_{n \to \infty} f(n) = L \quad \text{ou} \quad f(n) \xrightarrow[n \to \infty]{} L \quad \text{ou}$$

$$f(n) \longrightarrow L \text{ quando } n \to \infty.$$

Exemplo: $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Dado $\varepsilon>0$, tomamos $N\in\mathbb{N}$, $N>1/\varepsilon$. Assim, se $n\geq N$, então

$$0<1/n\leq 1/N<\varepsilon \implies |1/n-0|<\varepsilon.$$

Exercício: Mostre que $e^{i\pi/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

Exemplo: $\{(-1)^n\}$ não converge.

Prova: Suponha que $\lim_{n\to\infty}(-1)^n = L$. Então $L\neq 0$, já que

$$|(-1)^n-0|>1/2 \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Suponha então que $L > 0$ e tome novamente $\varepsilon = 1/2$. Neste caso, para todo n ímpar, $(-1)^n = -1$, isto é, se $n = 2k+1$, para $k \in \mathbb{N}$, então

$$|(-1)^{2k+1} - L| = |-1-L| = L+1 > 1/2 .$$

Portanto, existem valores de n arbitrariamente grandes (ímpares arbitrariamente grandes) tais que $|f(n) - L| > 1/2$. Isto mostra que $L > 0$ também não pode ser o limite da sequência $f(n) = (-1)^n$.

<u>Exercício</u>: Mostre que $L < 0$ também não pode ser o limite. $\blacksquare$

<u>Exercício</u>: Mostre que as sequências a seguir não convergem:

(i) $(-1)^n + 1/n$ (ii) $\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}$ (iii) $e^{in\pi/4}$ (iv) n^2.

Lembremos do seguinte "fato": se $x > 1$ então, $\forall M \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$x^n > M.$$

Prova: Se não fosse esse o caso, o conjunto $\{x^n : n \in \mathbb{N}\}$ seria limitado superiormente e, portanto, teria uma cota superior mínima, digamos c. Isto é, $x^n \leq c \ \forall n$, mas $\forall d < c$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x^m > d$. Como $x > 1$, por hipótese, $c/x < c$ e, portanto, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$x^m > \frac{c}{x} \Rightarrow x^{m+1} > c \quad \text{CONTRADIÇÃO!}$$

Exemplo: Se $x > 1$ então $\lim_{n \to \infty} x^{-n} = 0$. Dado $\varepsilon > 0$, tome N tal que $x^n > \frac{1}{\varepsilon}$ $\forall n \geq N$. Isso implica $0 < \frac{1}{x^n} < \varepsilon$, $\forall n \geq N$.

<u>Exemplo</u>: $\lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^a}{n^b} = 0$, se $a, b > 0$.

Para todo $x > 1$ e para todo $c > 0$, vale

$$0 < \ln x = \int_1^x \frac{ds}{s} \leq \int_1^x s^{c-1}\, ds = \frac{x^c - 1}{c} < \frac{x^c}{c}$$

Portanto,

$$0 < \frac{(\ln x)^a}{x^b} < \frac{x^{ca-b}}{c^a}$$

Tomando $c > 0$ tal que $ca - b < 0$, (isto é, $0 < c < b/a$), segue que $x^{ca-b} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \Rightarrow$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^a}{x^b} = 0.$$

Isso implica, em particular, que, se n é natural, vale o limite do enunciado.

Exemplos: • $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln n} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1.$

e é função contínua

• $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)} = e^{\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)} = e^a.$

Mas, lembre-se que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+ax)}{x} = \frac{d}{dx}\ln(1+ax)\Big|_{x=0} = a .$$

Sequências monótonas (de números reais)

Uma sequência $\{f(n)\}$ é monótona $\begin{cases} \text{crescente} \\ \text{decrescente} \end{cases}$ se $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} f(n+1) \geq f(n) \\ f(n+1) \leq f(n) \end{cases}$$

Teorema: Uma sequência monótona é convergente se e somente se é limitada.

Prova: Suponha que $\{f(n)\}$ é crescente. Se existe $M > 0$ tal que $f(n) \leq M$ para todo $n \in N$, o conjunto

$$\{f(n) \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{Z}\}$$

é limitado superiormente e, portanto, tem uma cota superior mínima, L. Isto é, L é cota superior para o conjunto $\{f(n)\}$, mas $\forall \varepsilon > 0$, $L - \varepsilon$ não o é. Isto quer dizer que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$L - \varepsilon < f(N) \leq L.$$

Como $\{f(n)\}$ é crescente, $\forall n \geq N$, $f(n) \geq f(N)$ e portanto, vale

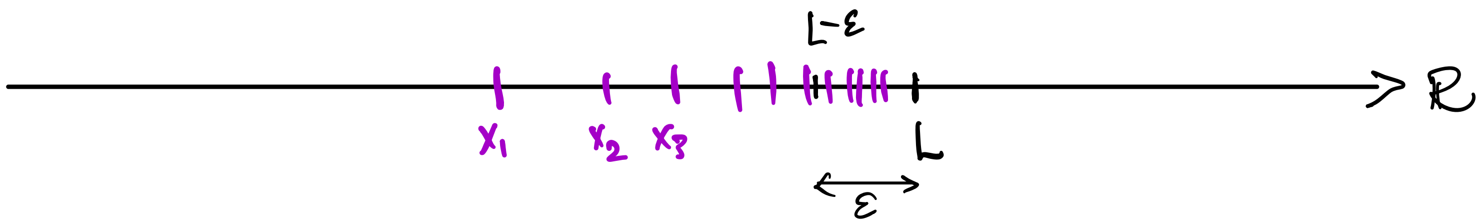
$$L - \varepsilon < f(n) \leq L, \quad \forall n \geq N.$$

Mas, isso implica que

$$-\varepsilon < f(n) - L \leq 0, \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq L - f(n) < \varepsilon, \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow \quad |f(n) - L| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N. \quad \blacksquare$$



$\boxed{\text{Apêndice: A Regra de L'Hôpital}}$

Como sequências são funções (definidas em $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$), técnicas que usamos para calcular limites de funções são, frequentemente, úteis para calcularmos limites de sequências.

$\boxed{\text{Regra de L'Hôpital:}}$ Suponha que f, g são funções reais diferenciáveis definidas em (a,b) e suponha que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

Assuma que $g'(x) \neq 0$ e que o limite $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe e é igual a $L \in \mathbb{R}$. Então o limite $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe e

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Ideia da Prova:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \overset{f(a)=g(a)=0}{=} \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\frac{x-a}{g(x)-g(a)} \overset{\text{T.V.M.}}{=} \lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\eta)} = L. \blacksquare$$

Obs: A prova mesmo pode ser encontrada no livro texto. É bem parecida com esta, mas torna mais preciso (e correto) o uso do Teorema do Valor Médio na penúltima igualdade acima.

Extensão da Regra de L'Hôpital: Se $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ e existe o limite

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

então

$$\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = L.$$

Prova: Definimos novas funções: $F(t) = f(1/t)$ e $G(t) = g(1/t)$.

Nesse caso

$$\lim_{t\to 0} F(t) = \lim_{t\to 0} f(1/t) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0 = \lim_{t\to 0} G(t)$$

Além disso

$$F'(t) = \frac{d}{dt} f(1/t) = -1/t^2 \, f'(1/t)$$

$$G'(t) = -1/t^2 \, g'(1/t)$$

Portanto

$$\lim_{t\to 0} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Mas, pela Regra de L'Hôpital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0} \frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \lim_{t\to 0} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{F'(t)}{G'(t)} = L. \quad \blacksquare$$

Exercícios: Seção 10.4, pp. 382-383 do Apostol.

1, 4, 5, 11, 14, 15, 26