Análise de Rede de Micro-ondas

SEL 369 Micro-ondas

Tania Regina Tronco
Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação
EESC-USP

Introdução

- A análise de circuitos de micro-ondas através da equação de onda nos fornece o campo elétrico e o campo magnético mas, em geral, estamos buscando componentes como a voltagem, corrente e a impedância.
- Para isso, a teoria da análise de circuitos tradicional pode ser uma ferramenta útil, se considerarmos somente o modo dominante de propagação.

Introdução

- A medida de voltagem nas frequências de micro-ondas somente é possível quando existem dois pares de condutores, como é o caso das linhas de transmissão. No caso de guias de onda é impossível.
- Voltagem num condutor (+ é o início e – é o final do condutor)

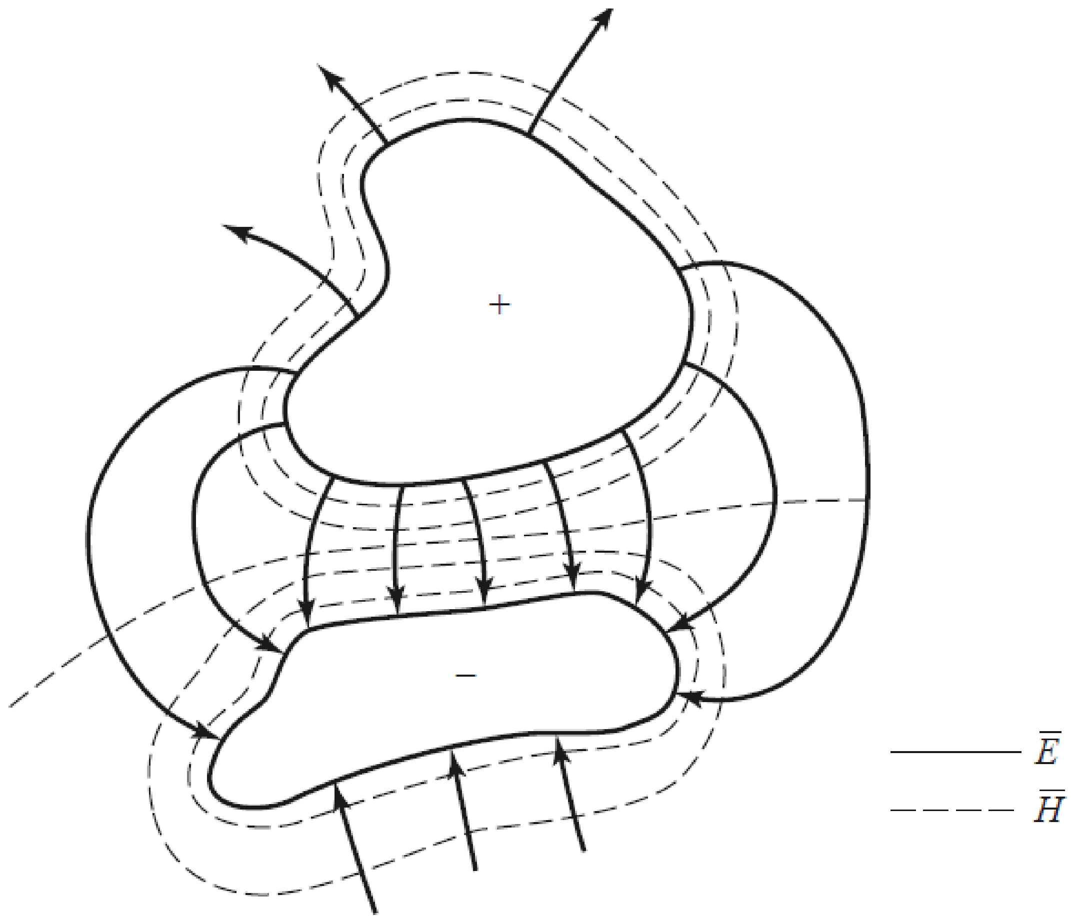
$$V = \int_{+}^{-} \bar{E} \cdot d\bar{\ell}$$

- Corrente fluindo no condutor (Lei de Ampére)

$$I = \oint_{C+} \bar{H} \cdot d\bar{\ell}$$

$$Z_0 = \frac{V}{I}$$

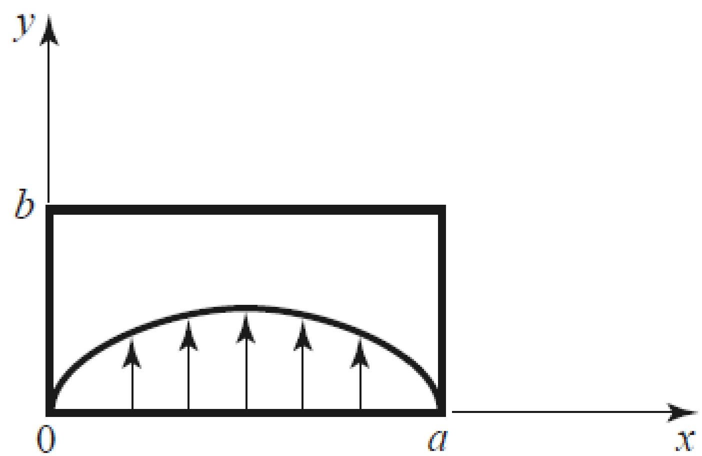
Campo Elétrico e Campo Magnético para dois condutores em uma linha de transmissão



Electric and magnetic field lines for an arbitrary two-conductor TEM line.

$$E_y(x, y, z) = \frac{j\omega\mu a}{\pi} A \sin\frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z} = A e_y(x, y) e^{-j\beta z},$$

$$H_x(x, y, z) = \frac{j\beta a}{\pi} A \sin\frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z} = A h_x(x, y) e^{-j\beta z}.$$



Electric field lines for the TE_{10} mode of a rectangular waveguide.

Voltagem num guia de onda

- Cálculo da Voltagem

$$V = \frac{-j\omega\mu a}{\pi} A \sin\frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z} \int_y dy.$$

  - a voltagem depende da posição x, bem como do comprimento do contorno de integração ao longo de y
  - Por exemplo, a integração de y=0 até b para x=a/2 fornece uma voltagem diferente da obtida para y=0 até b para x=0

- Qual a voltagem correta?

Considerações

- Existem muitas maneiras de se definir a voltagem, corrente e impedância para guias de onda, mas as seguintes considerações levam a resultados mais úteis:
  - A voltagens e a corrente são definidas para um guia de onda particular e a voltagem é proporcional ao campo elétrico transversal e a corrente ao campo magnético transversal;
  - as voltagens e correntes equivalentes devem ser definidas de modo que seu produto resulte no fluxo de potência no guia de onda;
  - A razão entre a voltagem e a corrente no guia de onda deve ser igual à impedância característica da linha.

✓ Para ondas positivas e negativas atravessando o guia de onda:

$$\bar{E}_t(x, y, z) = \bar{e}(x, y)(A^+e^{-j\beta z} + A^-e^{j\beta z}) = \frac{\bar{e}(x, y)}{C_1}\left(V^+e^{-j\beta z} + V^-e^{j\beta z}\right),$$

$$\bar{H}_t(x, y, z) = \bar{h}(x, y)\left(A^+e^{-j\beta z} - A^-e^{j\beta z}\right) = \frac{\bar{h}(x, y)}{C_2}\left(I^+e^{-j\beta z} - I^-e^{j\beta z}\right),$$

$$V(z) = V^+e^{-j\beta z} + V^-e^{j\beta z},$$

$$I(z) = I^+e^{-j\beta z} - I^-e^{j\beta z},$$

$$V^+/I^+ = V^-/I^- = Z_0.$$

$$C_1 = V^+/A^+ = V^-/A^-$$

Voltagens e Correntes Equivalentes nos Guias de onda

$$\bar{E}_t(x, y, z) = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{V_n^+}{C_{1n}} e^{-j\beta_n z} + \frac{V_n^-}{C_{1n}} e^{j\beta_n z} \right) \bar{e}_n(x, y),$$

$$\bar{H}_t(x, y, z) = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{I_n^+}{C_{2n}} e^{-j\beta_n z} - \frac{I_n^-}{C_{2n}} e^{j\beta_n z} \right) \bar{h}_n(x, y),$$

where $V_n^{\pm}$ and $I_n^{\pm}$ are the equivalent voltages and currents for the nth mode, and C_{1n} and C_{2n} are the proportionality constants for each mode.

Exemplo

- ✓ Encontre as voltagens e correntes equivalentes para o modo TE10 de um guia de onda retangular

Waveguide Fields	Transmission Line Model
$E_y = \left(A^+e^{-j\beta z} + A^-e^{j\beta z}\right)\sin\frac{\pi x}{a}$	$V(z) = V^+e^{-j\beta z} + V^-e^{j\beta z}$
$H_x = \frac{-1}{Z_{\text{TE}}}\left(A^+e^{-j\beta z} - A^-e^{j\beta z}\right)\sin\frac{\pi x}{a}$	$I(z) = I^+e^{-j\beta z} - I^-e^{j\beta z} = \frac{1}{Z_0}\left(V^+e^{-j\beta z} - V^-e^{j\beta z}\right)$
$P^+ = \frac{-1}{2}\int_S E_y H_x^* dx dy = \frac{ab}{4Z_{\text{TE}}}\lvert A^+\rvert^2$	$P^+ = \frac{1}{2}V^+I^{+*}$

Exemplo

We now find the constants $C_1 = V^+/A^+ = V^-/A^-$ and $C_2 = I^+/A^+ = I^-/A^-$ that relate the equivalent voltages $V^\pm$ and currents $I^\pm$ to the field amplitudes, $A^\pm$. Equating incident powers gives

$$\frac{ab\left|A^+\right|^2}{4Z_{\mathrm{TE}}} = \frac{1}{2}V^+I^{+*} = \frac{1}{2}\left|A^+\right|^2 C_1C_2^*.$$

If we choose $Z_0 = Z_{\mathrm{TE}}$, then we also have that

$$\frac{V^+}{I^+} = \frac{C_1}{C_2} = Z_{\mathrm{TE}}.$$

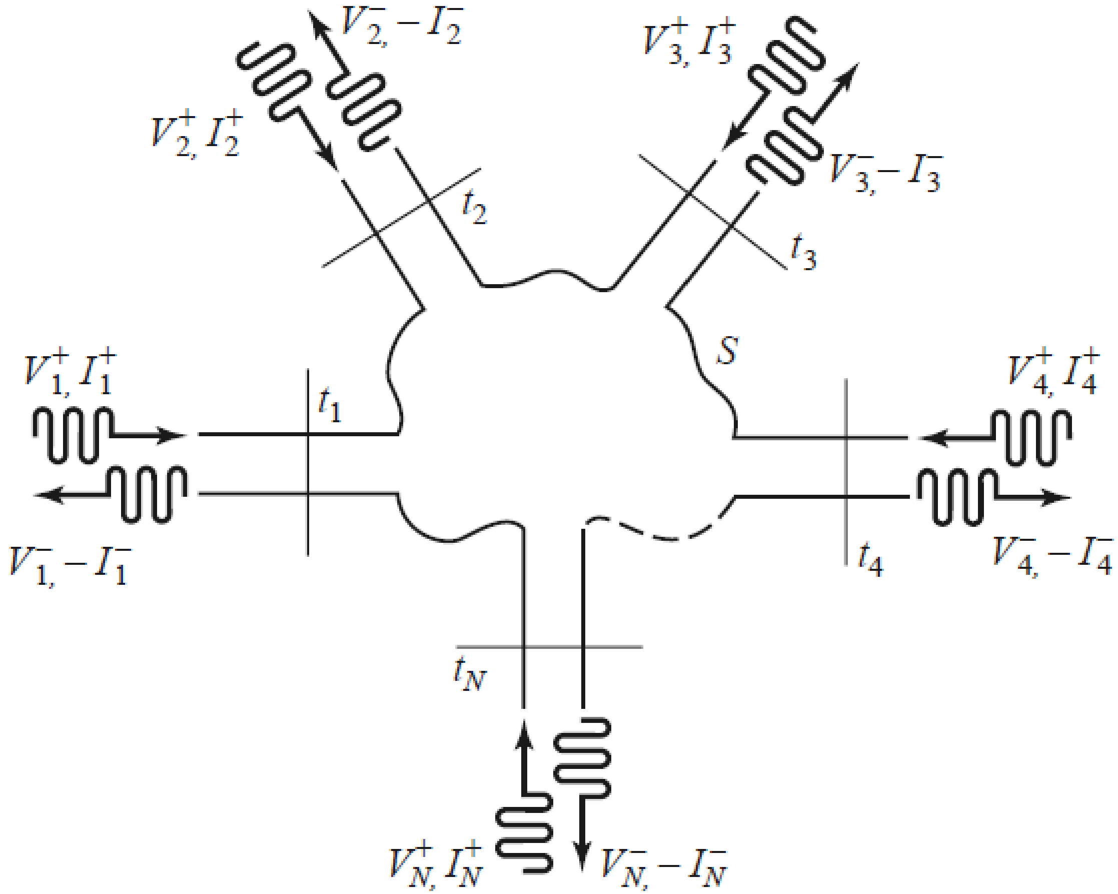
Solving for $C_1,\ C_2$ gives

$$C_1 = \sqrt{\frac{ab}{2}},$$

$$C_2 = \frac{1}{Z_{\mathrm{TE}}}\sqrt{\frac{ab}{2}},$$

which completes the transmission line equivalence for the TE_{10} mode. ■

Rede de micro-ondas N-portas



An arbitrary N-port microwave network.

Matriz de Impedância

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1N} \\ Z_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ Z_{N1} & \cdots & \cdots & Z_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix}$$

$$[V] = [Z][I].$$

Similarly, we can define an admittance matrix [Y] as

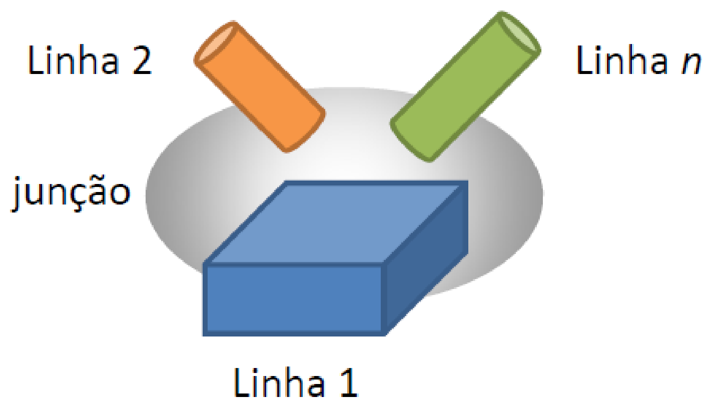
$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1N} \\ Y_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ Y_{N1} & \cdots & \cdots & Y_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix},$$

or in matrix form as

$$[I] = [Y][V].$$

Junção *n*-portas

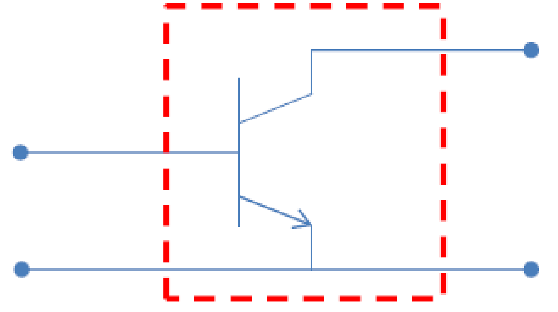
- Estruturas conectadas a N linhas de transmissão uniformes
  - guias, cabos coaxiais, microfitas, fibras ópticas
- Não há descontinuidades
- Descontinuidade
  - destrói a uniformidade e excita modos superiores
- Plano de referência
  - z_i: sistema de referência
  - $z(i = 0)$ (origem) : define o plano de referência
- Suposições
  - As linhas são sem perdas
  - somente o modo fundamental propaga-se pela linha
  - A cada modo superior associa-se uma porta adicional



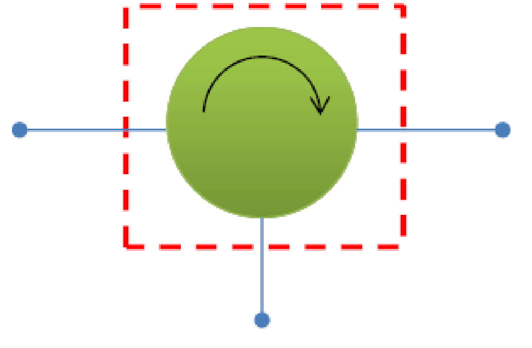
Exemplos

1 porta: carga casada

2 portas: transistor



3 portas: circulador

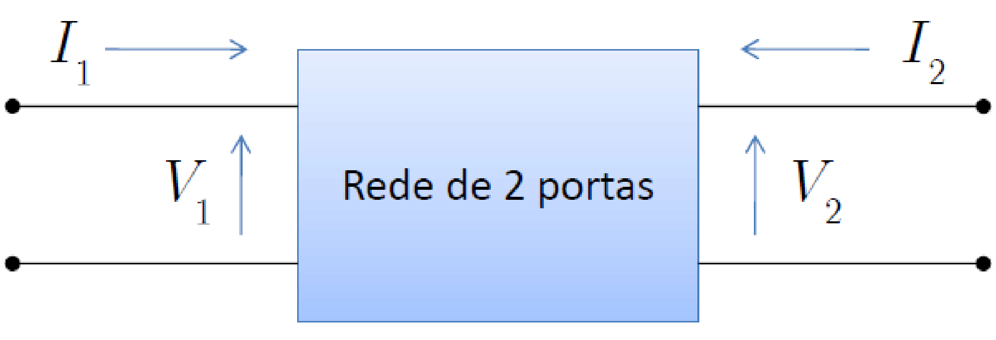


Matriz impedância

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0}$ impedância de entrada; $z_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0}$ transimpedância direta

$z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0}$ transimpedância reversa; $z_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0}$ impedância de saída

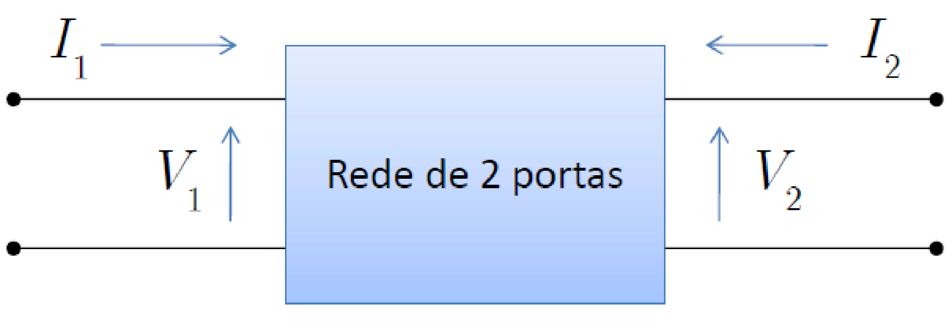


Matriz admitância

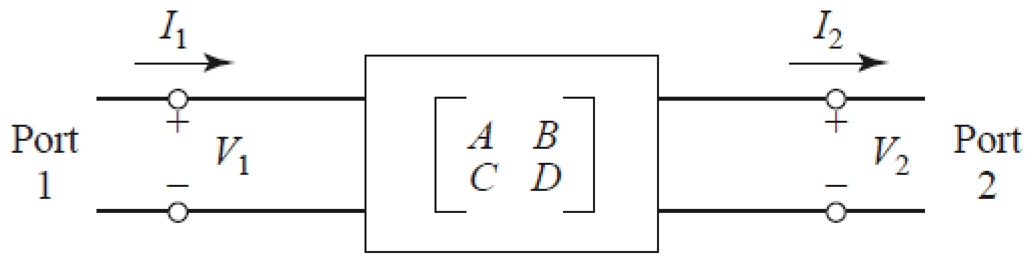
$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} y_{12} \\ y_{21} y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

$y_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0}$ admitância de entrada; $y_{21} = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0}$ transadmitância direta

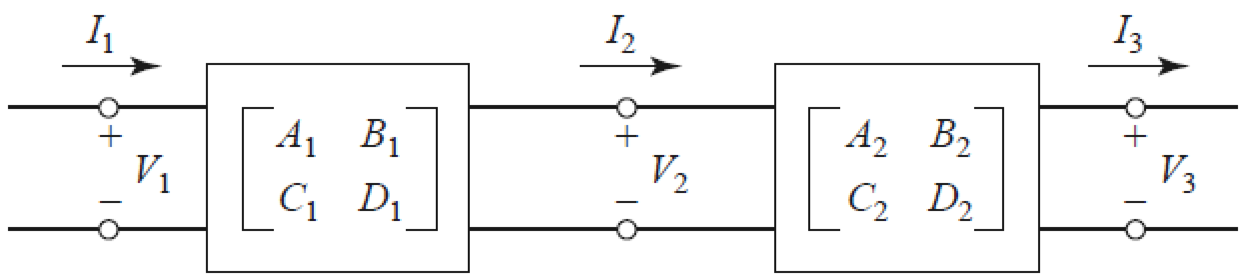
$y_{12} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{V_1=0}$ transadmitância reversa; $y_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1=0}$ admitância de saída



Matriz ABCD – Equivalente de 2 ou mais cascatas de 2 portas



(a)

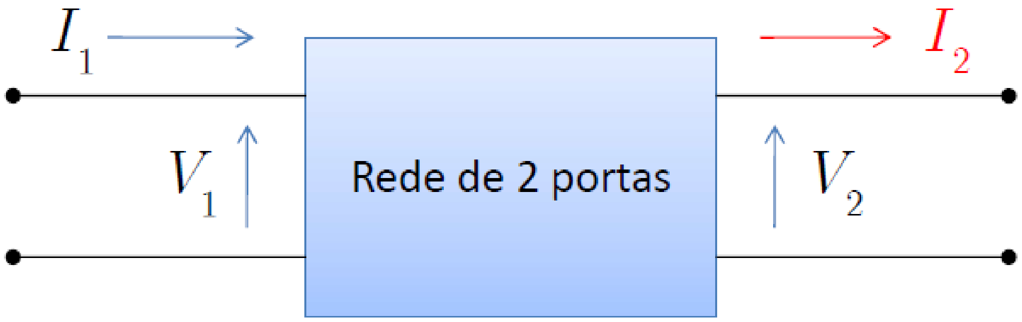


(b)

Matriz ABCD (1)

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$$V_1 = A\,V_2 + BI_2$$
$$I_1 = CV_2 + DI_2$$

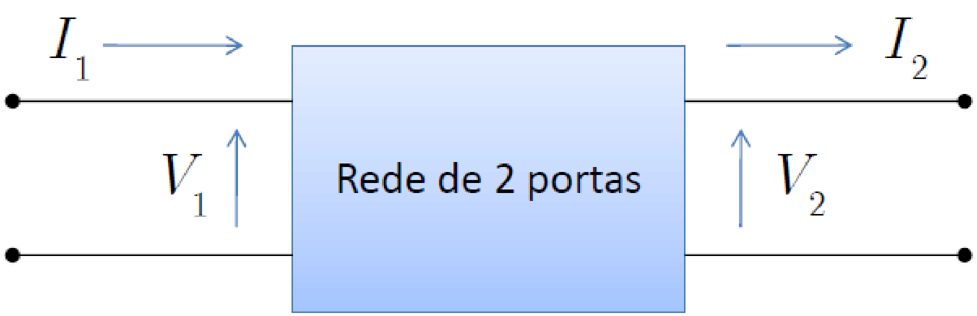


Matriz ABCD (4)

$$\begin{pmatrix} z_{11} z_{12} \\ z_{21} z_{22} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{z_{11}}{z_{12}}; B = \left(\frac{z_{11} z_{12} - z_{21}^{2}}{z_{12}} \right)$$

$$C = \frac{1}{z_{12}}; D = \frac{z_{22}}{z_{12}}$$

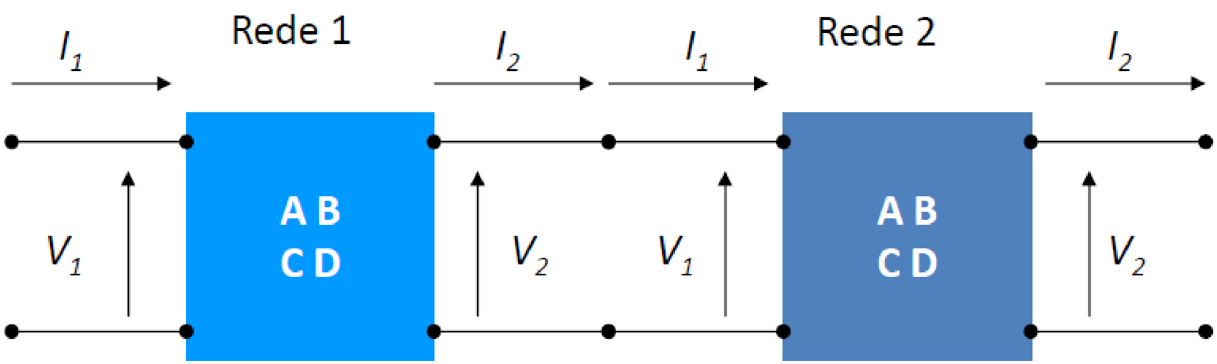


Associação em cascata (1)

Rede 1 $\begin{pmatrix} V_1^{(1)} \\ I_1^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2^{(1)} \\ I_2^{(1)} \end{pmatrix}$ Rede 2 $\begin{pmatrix} V_1^{(2)} \\ I_1^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2^{(2)} \\ I_2^{(2)} \end{pmatrix}$

mas, $I_2^{(1)} = I_1^{(2)} \; e \; V_2^{(1)} = V_1^{(2)}$

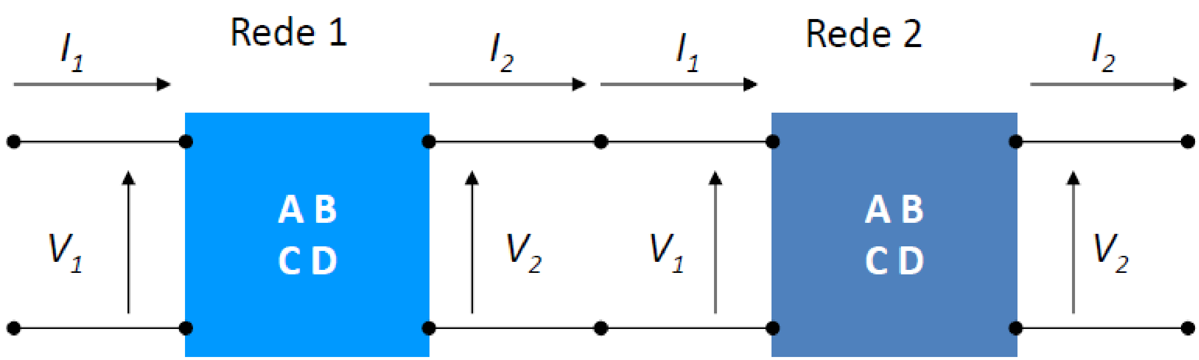
e $$\begin{pmatrix} V_1^{(1)} \\ I_1^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^{(2)} \\ I_1^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2^{(2)} \\ I_2^{(2)} \end{pmatrix}$$



Associação em cascata (2)

$$\begin{pmatrix} V_1^{(1)} \\ I_1^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2^{(2)} \\ I_2^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_{associação} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_{rede\ 1} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_{rede\ 2}$$

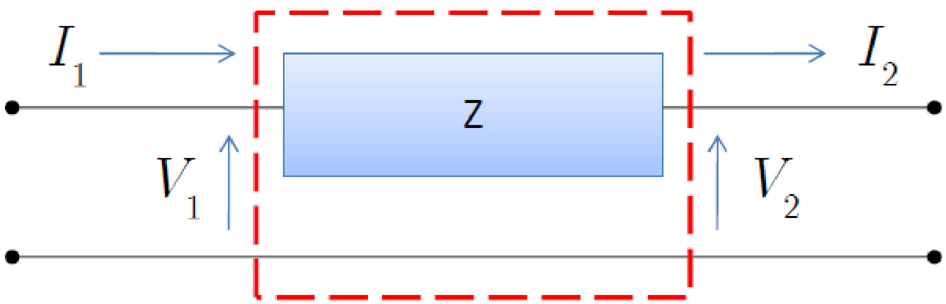


Exemplo: Impedância (1)

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$$V_1 = A V_2 + B I_2$$

$$I_1 = C V_2 + D I_2$$



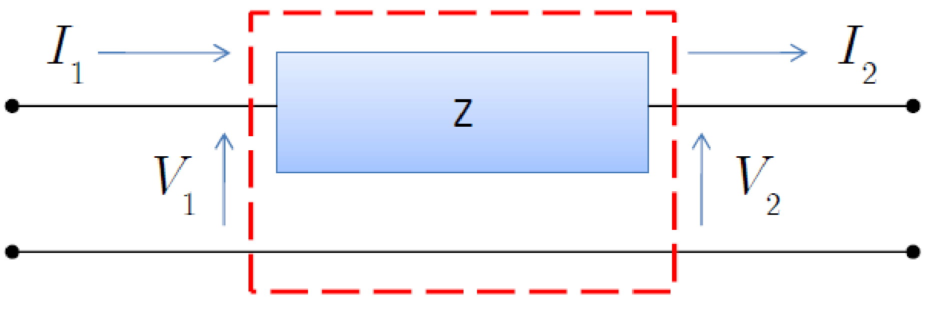
Exemplo: Impedância (2)

$$V_1 = AV_2 + BI_2$$

$$I_1 = CV_2 + DI_2$$

$$I_1 = I_2 \rightarrow C = 0 \text{ e } D = 1$$

$$V_1 = V_2 + ZI_2 \rightarrow A = 1 \text{ e } B = Z$$

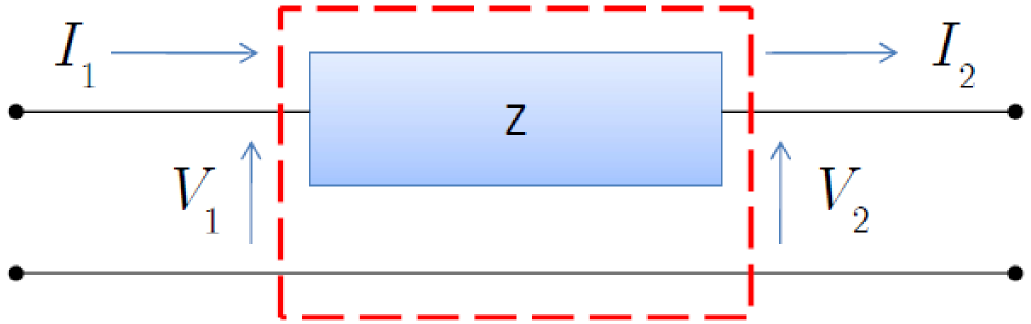


Exemplo: Impedância (3)

$$I_1 = I_2 \rightarrow C = 0 \text{ e } D = 1$$

$$V_1 = V_2 + ZI_2 \rightarrow A = 1 \text{ e } B = Z$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_{Z\ série} = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



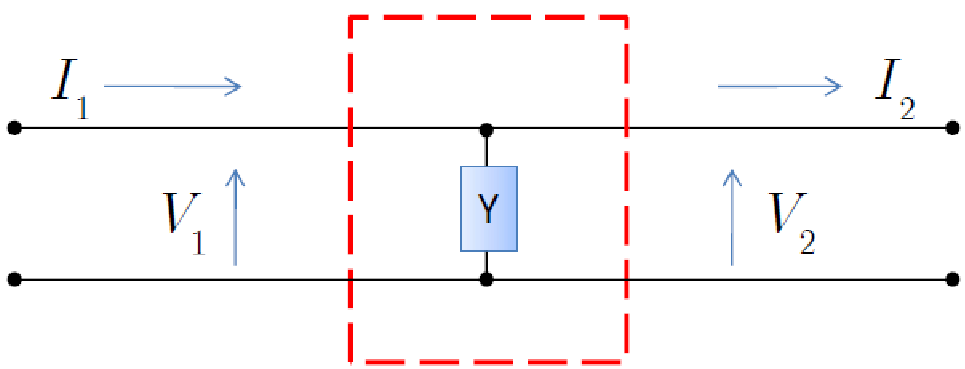
Exemplo: Admitância (2)

$$V_1 = AV_2 + BI_2$$

$$I_1 = CV_2 + DI_2$$

$$V_1 = V_2 \rightarrow B = 0 \text{ e } A = 1$$

$$I_1 = YV_2 + I_2 \rightarrow C = Y \; e \; D = 1$$

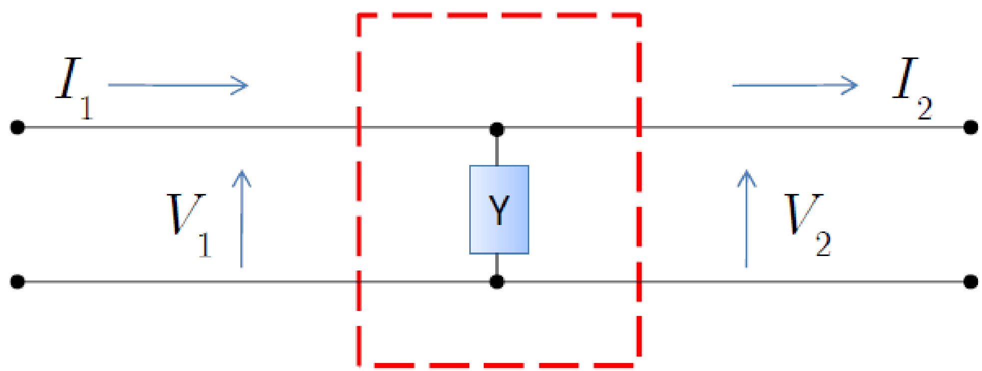


Exemplo: Admitância (3)

$$V_1 = V_2 \rightarrow B = 0 \text{ e } A = 1$$

$$I_1 = Y V_2 + I_2 \rightarrow C = Y \text{ e } D = 1$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_{y\ paralelo} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{pmatrix}$$



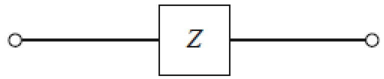
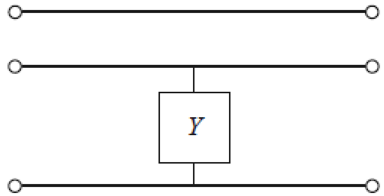
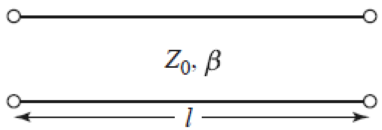
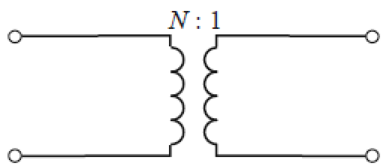
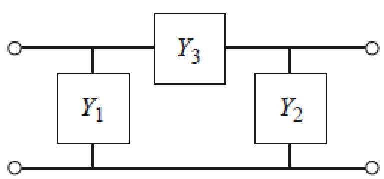
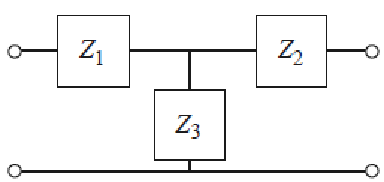
Reciprocidade, simetria, sem perdas

- **Simetria**
  - A relação tensão-corrente em uma porta deve ser igual à relação tensão –corrente na outra porta, com porta curto-circuitada
    - Uma rede é simétrica se a impedância de entrada é igual à impedância de saída
- **Reciprocidade**
  - Uma rede é recíproca se a tensão na porta 2 causada por corrente na porta 1 é a mesma tensão na porta 1 causada pela mesma corrente aplicada na porta 2
    - Se uma rede é recíproca, a matriz que a representa é simétrica
- **Sem perdas**
  - Não há elementos dissipativos

Condições de simetria e reciprocidade

Parâmetro	Cond. reciprocidade	Cond. simetria
Z	$z_{12} = z_{21}$	$z_{11} = z_{22}$
Y	$y_{12} = y_{21}$	$y_{11} = y_{22}$
$ABCD$	$AD - BC = 1$	$A = D$

TABLE 4.1 ***ABCD* Parameters of Some Useful Two-Port Circuits**

Circuit	*ABCD* Parameters	
	$A = 1$ $C = 0$	$B = Z$ $D = 1$
	$A = 1$ $C = Y$	$B = 0$ $D = 1$
	$A = \cos \beta\ell$ $C = jY_0 \sin \beta\ell$	$B = jZ_0 \sin \beta\ell$ $D = \cos \beta\ell$
	$A = N$ $C = 0$	$B = 0$ $D = \frac{1}{N}$
	$A = 1 + \frac{Y_2}{Y_3}$ $C = Y_1 + Y_2 + \frac{Y_1 Y_2}{Y_3}$	$B = \frac{1}{Y_3}$ $D = 1 + \frac{Y_1}{Y_3}$
	$A = 1 + \frac{Z_1}{Z_3}$ $C = \frac{1}{Z_3}$	$B = Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_3}$ $D = 1 + \frac{Z_2}{Z_3}$