Teoria dos Grupos - SFI 5823

Trabalho I - 08/05/2023

Entrega: 15/05/2023

1. **(0,5)** Considere of grupo $G = S_3$ (permutações de 3 elementos) e seu subgrupo $H = Z_3$ formado pelas permutações cíclicas.
   (a) Calcule os cosets de G/H.
   (b) O subrupo H é invariante?
   (c) Se for, qual a estrutura do grupo quociente?

2. **(0.5)** Considere um grupo finito de ordem 5.
   (a) Ele possue subgrupos próprios?
   (b) Qual a estrutura deste grupo?
   (c) Quantas representações irredutíveis ele possue? Quais são elas e quais suas dimensões?

3. **(0,5)** O grupo $U(N)$ das matrizes complexas $N \times N$, unitárias, é um grupo simples? E o grupo $SU(N)$ das matrizes complexas $N \times N$, unitárias e determinante igual a 1, é um grupo simples? Justifique suas respostas.

4. **(0,5)** A álgebra de $sl(4)$ é formada pelas matrizes 4×4 reais e traço nulo. Verifique se o subspaço gerado pelas matrizes

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   constitue uma subálgebra de Cartan de $sl(4)$.

5. **(0,5)** Se a e x são elementos de um grupo G, que satisfazem

$$a^2 = \mathbb{1} \qquad\qquad a\,x\,a = x^n$$

   com n inteiro, mostre que $x^{n^2-1} = \mathbb{1}$.

6. **(0,5)** Considere a seguinte tabela de multiplicação entre os 6 elementos de um conjunto

$*$	e	g_1	g_2	g_3	g_3	g_5
e	e	g_1	g_2	g_3	g_3	g_5
g_1	g_1	e	g_3	g_4	g_5	g_2
g_2	g_2	g_3	e	g_5	g_1	g_4
g_3	g_3	g_4	g_5	e	g_2	g_1
g_4	g_4	g_5	g_1	g_2	e	g_3
g_5	g_5	g_2	g_4	g_1	g_3	e

Este conjunto de elementos constitui um grupo com tal lei de produto? Argumente.

7. **(0,5)** Considere uma álgebra de dimensão 6, definida pelas relações de comutação

$$\begin{aligned} [\,T_i\,,\,T_j\,] &= i\,\varepsilon_{ijk}\,T_k \\ [\,T_i\,,\,P_j\,] &= i\,\varepsilon_{ijk}\,P_k \\ [\,P_i\,,\,P_j\,] &= 0 \end{aligned}$$

onde $i, j, k = 1, 2, 3$, ε_{ijk} é totalmente anti-simétrico e $\varepsilon_{123} = 1$. Verifique se esta é uma álgebra de Lie e se ela é semisimples.

8. **(0,5)** Considere a álgebra de Lie com uma base R, P_1 e P_2 satisfazendo as relações de comutação

$$[R\,,\,P_1] = P_2\;; \qquad [R\,,\,P_2] = -P_1\;; \qquad [P_1\,,\,P_2] = 0$$

(a) Encontre uma subálgebra de Cartan para esta álgebra de Lie.

(b) Construa as matrizes da representação adjunta desta álgebra.

(c) Calcule a forma de Killing desta álgebra.

(d) Pelo critério de Cartan esta álgebra é semisimples?

(e) Ela possui subálgebra invariante? Se sim, mostre os geradores dela, e diga se é abeliana ou não.

9. **(1,0)** Considere as matrizes

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad a = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Mostre que estas matrizes formam um grupo pela multiplicação de matrizes, i.e. satisfazem os postulados de grupo.

(b) Construa a tabela de multiplicação deste grupo. Ele é abeliano ou não?

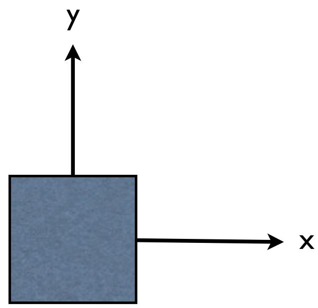
(c) Ele possui subgrupo invariante? Se, sim construa um exemplo.

(d) Calcule os caráters dos elementos na representação matricial bi-dimensional dada acima.

(e) Esta representação é irredutível? Argumente.

10. **(1,0)** Considere o grupo cristalográfico D_4 (dihedral group) que descreve as simetrias de um quadrado (veja figura). Este grupo tem 8 elementos e pode ser gerado por dois elementos definidos da seguinte maneira:

   - $c \equiv$ rotação de um ângulo $\frac{\pi}{2}$ no sentido anti-horário em torno do eixo z (perpendicular à página).
   - $b \equiv$ rotação de um ângulo π em torno do eixo x.



Os elementos do grupo são c, c^2, c^3, $c^4 \equiv e$, b, $b\,c$, $b\,c^2$ e $b\,c^3$. Qualquer outro produto destes elementos pode ser reduzido a um deles, ou seja o grupo fecha com estes oito elementos. Como é um grupo de rotações (discretas) em tres dimensões podemos construir uma representação tri-dimensional da seguinte maneira.

$$D(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad D(c) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Questões:

(a) Calcule os caráters desta representação

(b) Mostre que ela é uma representação redutível.

(c) Calcule os subespaços invariantes.

(d) Calcule as matrizes das representações irredutíveis contidas nela.

(e) Quantas representações irredutíveis tem D_4? Quais são elas e quais suas dimensões?

11. **(1,0)** Considere um sistema físico que possua uma simetria descrita por um grupo G. Com isto queremos dizer que existem transformações nos estados

$$T_g \quad : \qquad | \, \psi\rangle \to T_g \, | \, \psi\rangle$$

tal que a composição das tranformações satisfaz

$$T_{g_1} T_{g_2} = T_{g_1 \cdot g_2}$$

com $g_1, g_2 \in G$.

Por simetria queremos dizer que existe um Hamiltoniano H tal que se

$$H \, | \, \psi\rangle = E \, | \, \psi\rangle$$

então

$$HT_g \, | \, \psi\rangle = ET_g \, | \, \psi\rangle$$

Seja V_E o conjunto dos estados com energia E (autovalor de H), e suponha que G atue transitivamente em V_E. Mostre que

(a) se K é o subgrupo das transformações de G que deixam um dado estado de V_E invariante, i.e.

$$T_h \, | \, \psi_0\rangle = | \, \psi_0\rangle \qquad\qquad h \in K$$

então mostre que o subgrupo de simetria de qualquer outro estado de V_E é necessariamente isomórfico a K.

(b) Mostre que V_E é isomórfico ao espaço coset G/K.

Obviamente V_E constitute uma representação de G. Então:

- O fato de G atuar em V_E transitivamente implica que V_E é irredutível?
- O fato de V_E ser irredutível implica que G age transitivamente em V_E?

12. **(1,5)** O grupo dihedral D_6 é o grupo de simetria do hexágono. Ele tem 12 elements que são a identidade, 5 rotações de ângulos $\frac{2\pi k}{6}$, com $k = 1, 2, 3, 4, 5$, e 6 reflexões através da retas mostradas na figura abaixo.

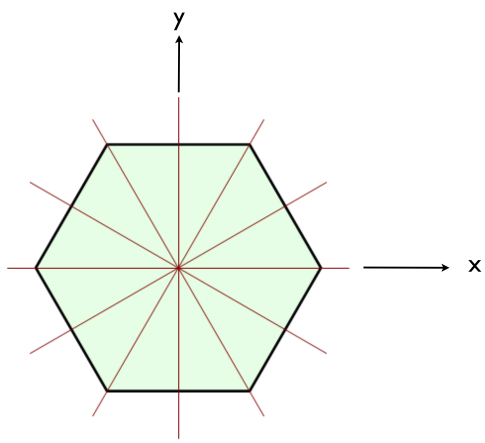


Figure 1: Reflexões que deixam hexágono invariante

Os elementos de D_6 podem ser representados pelas matrizes ($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$)

$$R_k = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi k}{6} & -\sin\frac{2\pi k}{6} \\ \sin\frac{2\pi k}{6} & \cos\frac{2\pi k}{6} \end{pmatrix} \qquad S_k = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi k}{6} & \sin\frac{2\pi k}{6} \\ \sin\frac{2\pi k}{6} & -\cos\frac{2\pi k}{6} \end{pmatrix} \tag{1}$$

onde R_k correspondem a rotações de uma ângulo de $\frac{2\pi k}{6}$, a partir do eixo-x (ver figura), e S_k correspondem a reflexões através de retas que fazem um ângulo de $\frac{\pi k}{6}$ com eixo-x.

(a) Considere o subconjunto formado por R_0, R_2, R_4, S_1, S_3 e S_5. Mostre que ele é um subgrupo de D_6 e é isomórfico a S_3. Ele é um subgrupo invariante?

(b) Construa os cosets D_6/S_3. Este coset tem estrutura de grupo?

(c) Considere o subconjunto formado pelas rotações R_k, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Mostre que ele é um subgrupo de D_6 e é isomórfico a Z_6. Ele é um subgrupo invariante?

(d) Construa os cosets D_6/Z_6. Este coset tem estrutura de grupo?

(e) A representação de D_6 dada por (1) é irredutível? Argumente.

(f) O grupo D_6 pode ter uma representação irredutível de dimensão 3?

(g) A representação do subgrupo S_3 obtida a partir de (1) é uma representação irredutível de S_3? Argumente.

(h) A representação do subgrupo Z_6 obtida a partir de (1) é uma representação irredutível de Z_6? Argumente.

13. **(1,5)** A chamada álgebra do momento angular é a álgebra de Lie do grupo de rotações $SO(3)$ em três dimensões Euclideanas. Denotando por J_i, $i = 1, 2, 3$, as três componentes do momento angular, as relações de comutação são

$$[J_i \, , \, J_j] = i \, \varepsilon_{ijk} \, J_k \; ; \qquad\qquad i \, , \, j \, , \, k = 1, 2, 3$$

onde $\varepsilon_{123} = 1$, e ε_{ijk} é totalmente anti-simétrico. Considere agora um sistema físico cuja energia é dada pelo quantidade

$$H = \mu^2 \left[J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 \right] + \lambda \, J_3$$

Sob rotações espacias as componentes do momento angular transformam pela representação adjunta de $SO(3)$, i.e. a representação tripleto

$$J_i \rightarrow \bar{J}_i = J_j \, d_{ji}(g) \; ; \qquad\qquad d(g) \, d(g') = d(g \, g')$$

onde $g \, , \, g' \in SO(3)$. Sabe-se que os estados deste sistema físico formam uma representação de $SO(3)$ infinita completamente redutível onde cada uma das infinitas representações irredutíveis finitas de $SO(3)$ aparece uma única vez. Responda:

(a) Qual o grupo de simetria de H para $\mu^2 \neq 0$, e $\lambda = 0$?

(b) Qual o grupo de simetria de H para $\mu^2 \neq 0$, e $\lambda \neq 0$?

(c) Determine as energias dos estados deste sistema físico para $\mu^2 \neq 0$, e $\lambda = 0$. Qual o estado de menor energia neste caso?

(d) Determine as energias dos estados deste sistema físico para $\mu^2 \neq 0$, e $\lambda \neq 0$.

(e) Para o caso $\mu^2 = \lambda = 1$, qual a energia do estado de menor energia? E a energia do estado com o segundo menor valor de energia (primeiro estado excitado)?

(f) Para o caso $\mu^2 = 1$ qual o menor valor positivo de λ para que o estado de menor energia seja duplamente degenerado?

(g) É possível existir degenerescência para algum valor de energia, no caso em que $\mu^2 \neq 0$, e $\lambda = 0$?