ORGANIZANDO AS INFORMAÇÕES SOBRE $Y' = A \cdot Y$

Estamos tentando resolver o sistema linear $Y' = A \cdot Y$, onde A é uma matriz real quadrada, 2×2 no nosso caso.

Vimos que, se assumimos os resultados que discutiremos mais tarde, a solução é

$$Y(t) = e^{tA} \cdot Y_0$$

onde $Y_0 = \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$ é um vetor dado ($= Y(0)$, de "condições iniciais") e

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n .$$

O que tem nos ocupado há algumas semanas é como calcular e^{tA}.

O que já sabemos:

- Se $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{bmatrix}$, então $e^A = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & \\ & e^{\lambda_2} \end{bmatrix}$. <u>Prova</u>: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

x um número.

- Se $A = S \begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{bmatrix} S^{-1}$, então $e^A = S \cdot \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & \\ & e^{\lambda_2} \end{bmatrix} \cdot S^{-1}$.

- Os dois itens acima valem tanto para λ_1, λ_2 reais quanto para λ_1, λ_2 complexos.

Isso porque a série
$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$
também define e^z para z complexo, como vimos. E vimos ainda que essa definição é a mesma que

$$e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib} = e^a (\cos b + i \operatorname{sen} b)$$

- Encontrar uma matriz S inversível e uma matriz Λ diagonal tais que

$$A = S \cdot \Lambda \cdot S^{-1}$$

é chamado DIAGONALIZAR a matriz A.

- Nem toda matriz é diagonalizável: vide P1.

- Para (tentar) diagonalizar A, precisamos encontrar S e Λ tais que

$$A \cdot S = S \cdot \Lambda.$$

que nos leva ao problema de encontrar autovalores e autovetores para A:

$$A \cdot \begin{bmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{bmatrix} \iff A v_i = \lambda_i v_i \quad , \; i = 1,2.$$

- Procuramos então resolver a equação $Av = \lambda v$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ são incógnitas e $v \neq 0$.

• Para que seja possível resolver $Av = \lambda v \iff (A - \lambda I) \cdot v = 0$ com $v \neq 0$ é necessário que o determinante

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0,$$

isto é, precisamos que λ seja raiz do polinômio característico de A

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - (\mathrm{tr} A)\lambda + \det A$$

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \mathrm{tr} A = a + d \\ \det A = ad - bc \end{matrix}$

• Raízes de $p_A(\lambda)$ são os AUTOVALORES de A.

• Se λ é um autovalor de A, qualquer solução $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ de

$$(A - \lambda I)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} (a-\lambda)x + by = 0 \\ cx + (d-\lambda)y = 0 \end{cases}$$

é um AUTOVETOR de A associado ao autovalor λ.

• Se o polinômio característico $p_A(\lambda)$ tem duas raízes distintas (reais ou complexas) λ_1, λ_2 e se v_1 e v_2 são autovetores associados a λ_1, λ_2, respectivamente, então a matriz

$$S = \begin{bmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{bmatrix}$$

é inversível. Isso requer demonstração: vide P1.

• Nesse caso, ganhamos: $A \cdot S = S \cdot \Lambda \implies A = S \cdot \Lambda \cdot S^{-1} \implies$

$$e^A = S \cdot \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & \\ & e^{\lambda_2} \end{bmatrix} \cdot S^{-1}$$

e

$$\boxed{Y(t) = S \cdot \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \\ & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \cdot S^{-1} \cdot Y_0}$$

é a solução de $Y' = A \cdot Y$, que agora pode ser escrita explicitamente.

- Temos ainda dois problemas para resolver:

  (i) o que acontece quando A não é diagonalizável?

  (ii) que sentido tem começarmos com um sistema real e encontrarmos uma solução que envolve números complexos?

- Vejamos (ii) primeiro, pois já começamos a fazê-lo.

- Se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, onde $a, b \in \mathbb{R}$, então

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 2a\lambda + (a^2+b^2)$$

- Portanto, os autovalores de A são (as raízes de $p_A(\lambda)$) $\lambda = a \pm ib$.

- Os autovetores associados são obtidos de $(a-\lambda)x + by = 0 \iff$

$\Leftrightarrow \quad by = (\lambda - a)x$, que, como $\lambda = a \pm bi$, leva a

$$by = \pm bi\,x \Leftrightarrow y = \pm ix$$

- Isto é, os autovalores e autovetores associados são:

$$\begin{cases} \lambda_1 = a+bi \\ v_1 = \begin{bmatrix} x \\ ix \end{bmatrix} \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \lambda_2 = a-bi \\ v_2 = \begin{bmatrix} x \\ -ix \end{bmatrix} \end{cases}$$

escolhendo o mesmo $x \in \mathbb{R}$

- Note que tanto os autovalores quanto os autovetores são complexos conjugados:

$$\lambda_2 = \overline{\lambda_1} \quad e \quad v_2 = \overline{v_1}$$

aqui tomar o conjugado quer dizer tomar o conjugado de cada coordenada.

• Neste caso, fizemos as contas (veja a Provinha 2 com a resolução) e obtivemos:

$$A = \frac{i}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a+ib & \\ & a-ib \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i & 1 \\ i & -1 \end{bmatrix}$$

e

$$e^{tA} = \frac{i}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{(a+ib)t} & \\ & e^{(a-ib)t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 1 \\ i & -1 \end{bmatrix}$$

$$= e^{at} \begin{bmatrix} \cos bt & \operatorname{sen} bt \\ -\operatorname{sen} bt & \cos bt \end{bmatrix}$$

de modo que

$$Y(t) = e^{tA} \cdot \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = e^{at} \begin{bmatrix} y_0 \cos bt + z_0 \operatorname{sen} bt \\ z_0 \cos bt - y_0 \operatorname{sen} bt \end{bmatrix},$$

isto é,

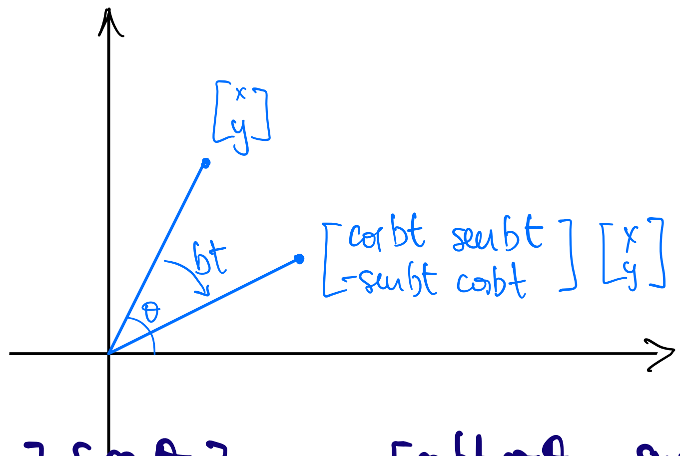
$$\begin{cases} y(t) = e^{at} \left(y_0 \cos bt + z_0 \operatorname{sen} bt \right) \\ z(t) = e^{at} \left(z_0 \cos bt - y_0 \operatorname{sen} bt \right) \end{cases}$$

Em particular, as soluções são REAIS apesar de termos usado números complexos para chegar a elas.

• O RETRATO DE FASE: as soluções de $Y' = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \cdot Y$ são da forma

$$\boxed{Y(t) = e^{at} \begin{bmatrix} \cos bt & \operatorname{sen} bt \\ -\operatorname{sen} bt & \cos bt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}}$$

A matriz $\begin{bmatrix} \cos bt & \operatorname{sen} bt \\ -\operatorname{sen} bt & \cos bt \end{bmatrix}$ é responsável por rodar o plano $\mathbb{R}^2$ por ângulo bt no sentido $\begin{cases} \text{anti-horário} & \text{se } b > 0 \\ \text{horário} & \text{se } b < 0 \end{cases}$.



Podemos escrever

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$$

Portanto

$$\begin{bmatrix} \cos bt & \operatorname{sen} bt \\ -\operatorname{sen} bt & \cos bt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos bt & \operatorname{sen} bt \\ -\operatorname{sen} bt & \cos bt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos bt \cos\theta + \operatorname{sen} bt \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen} bt \cos\theta + \cos bt \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$$

$$= r \begin{bmatrix} \cos(\theta - bt) \\ \operatorname{sen}(\theta - bt) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\theta - bt) \\ r\operatorname{sen}(\theta - bt) \end{bmatrix}.$$

O fator e^{at} cresce ou decresce (ou é constante $=1$) com t dependendo do sinal de a:

- se $a>0$, $e^{at} \nearrow \infty$, para $t \nearrow \infty$
- se $a<0$, $e^{at} \searrow 0$, para $t \nearrow \infty$
- se $a=0$, $e^{at}=1$ (e não depende de t).

Assim, as soluções (também chamadas de "curvas solução" ou "trajetórias")

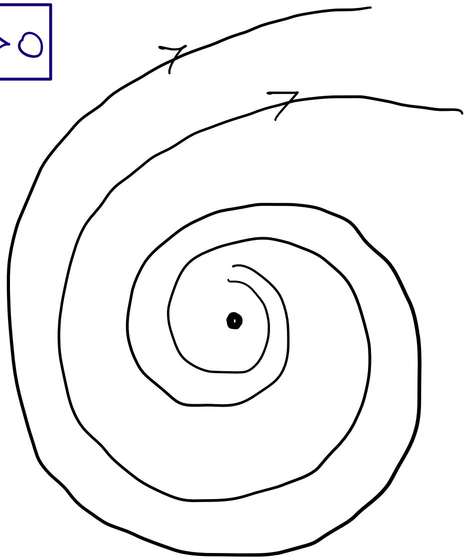
$$Y(t) = e^{at}\begin{bmatrix} \cos bt & \operatorname{sen} bt \\ -\operatorname{sen} bt & \cos bt \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

rodam no sentido $\begin{cases} \text{anti-horário}, & \text{se } b>0 \\ \text{horário}, & \text{se } b<0 \end{cases}$ e se $\begin{cases} \text{afastam} \\ \text{aproximam} \end{cases}$

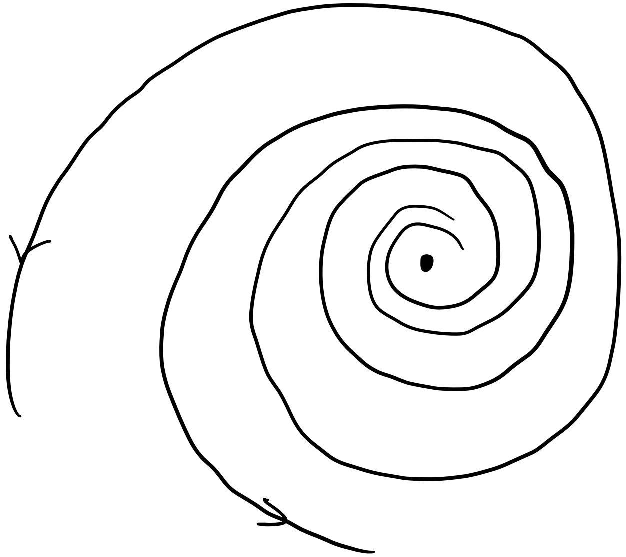
da origem se $\begin{cases} a>0 \\ a<0 \end{cases}$.

RETRATOS DE FASE PARA $a, b \neq 0$

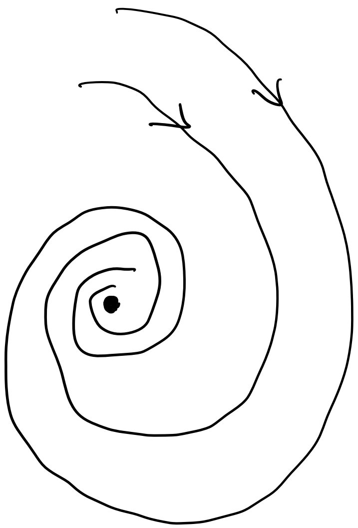
$\boxed{a, b > 0}$



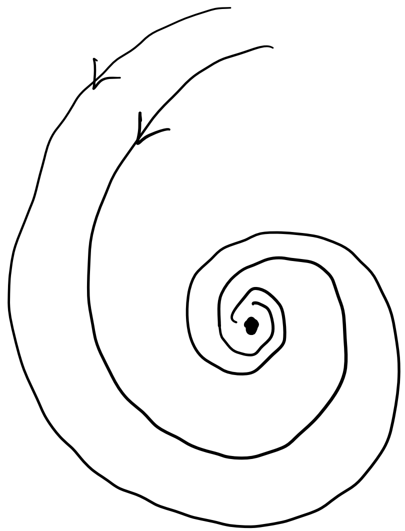
$\boxed{\begin{array}{l} a > 0 \\ b < 0 \end{array}}$



$\boxed{\begin{array}{l} a < 0 \\ b > 0 \end{array}}$



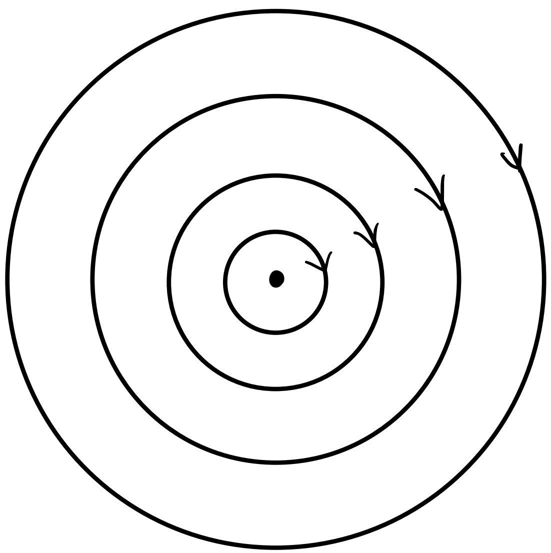
$\boxed{a, b < 0}$



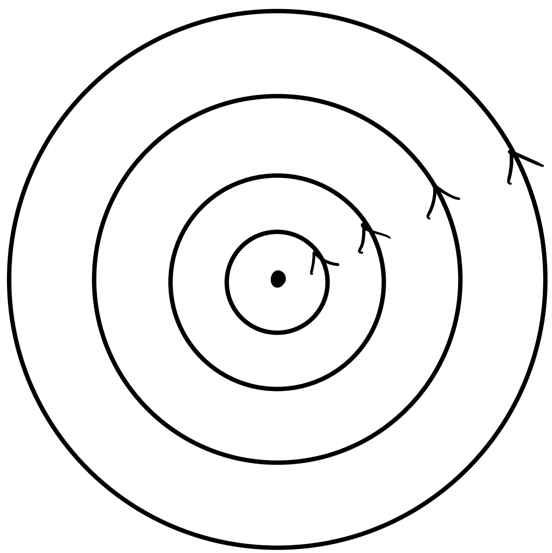
Se $a=0$, as soluções são $Y(t) = \begin{bmatrix} \cos bt & \operatorname{sen} bt \\ -\operatorname{sen} bt & \cos bt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$, que, como vimos, são rotações no sentido $\begin{cases} \text{anti-horário se } b>0 \\ \text{horário se } b<0 \end{cases}$.

RETRATOS DE FASE PARA $a=0$, $b \neq 0$

$\boxed{b>0}$



$\boxed{b<0}$



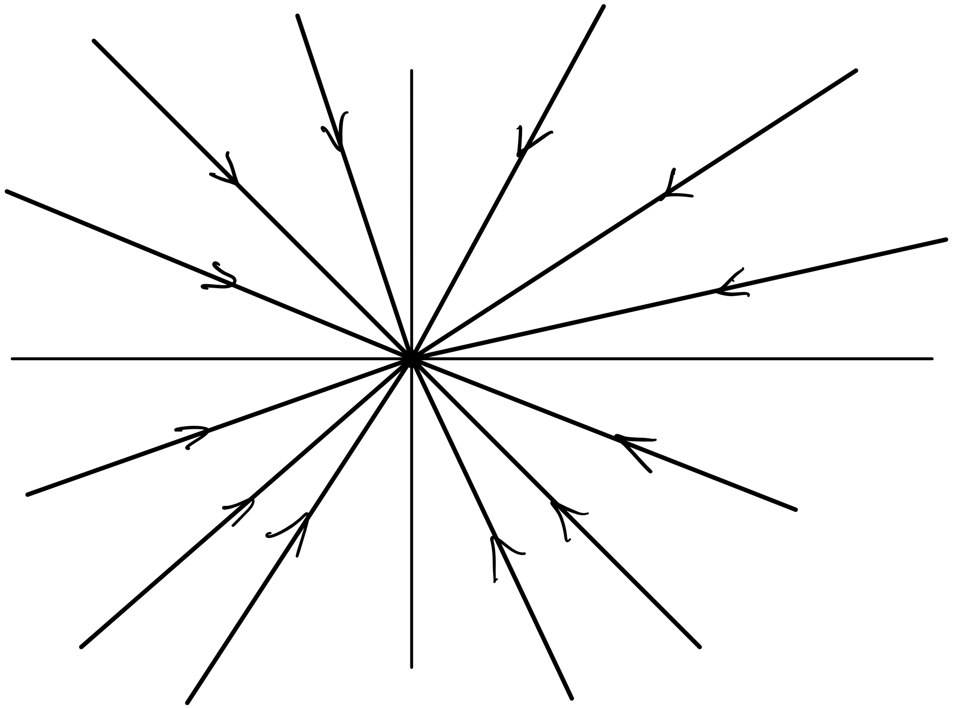
E se $b=0$? Nesse caso, o sistema é $Y' = \begin{bmatrix} a & \\ & a \end{bmatrix} Y \iff \begin{cases} y(t) = e^{at} y_0 \\ z(t) = e^{at} z_0 \end{cases}$.

Mas isso quer dizer que, se $z_0 \neq 0$, então $y(t)/z(t) \equiv y_0/z_0$ e, se $y_0 \neq 0$, então $z(t)/y(t) = z_0/y_0$.

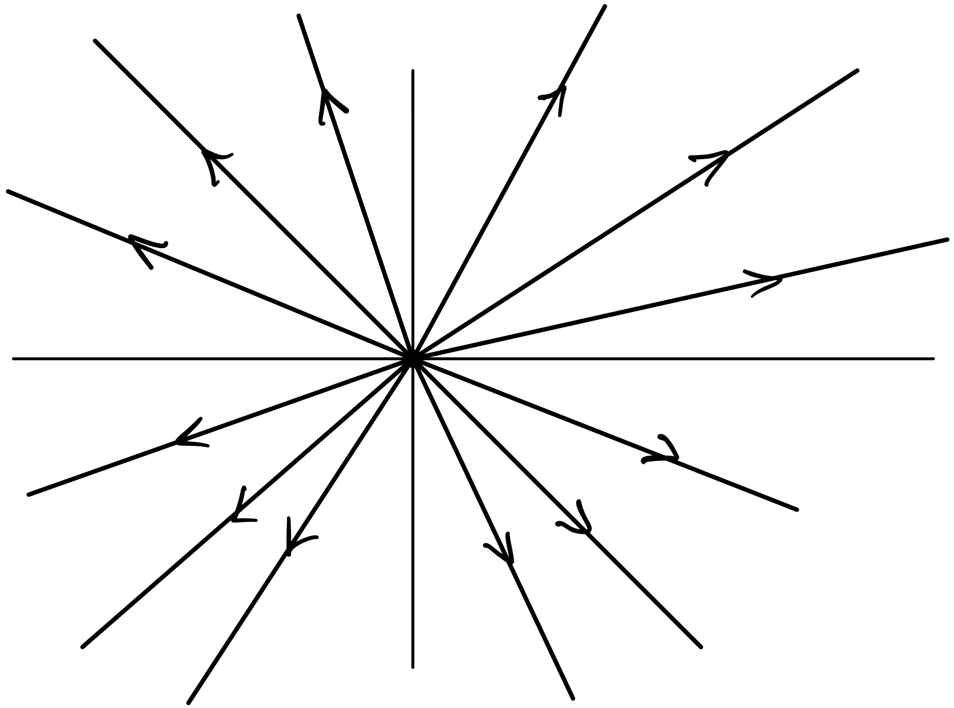
Em ambos os casos, desde que $\begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, as soluções $\begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$ estão contidas em retas que passam pela origem, da forma $z = ky$ ou da forma $y = \ell z$ (ou ambas). Além disso, como $e^{at} > 0$, as soluções estão sempre (para todo $t \in \mathbb{R}$) no mesmo quadrante que o ponto inicial $\begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$. Disso, podemos concluir que os retratos de fase para $a \neq 0$ e $b = 0$ são como a seguir.

Retratos de fase para $a \neq 0$, $b = 0$

$\boxed{a < 0}$



$\boxed{a > 0}$



Apesar do desenho não indicá-lo claramente, há a solução constante $Y(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ que está separada de todas as outras.

UNICIDADE DE SOLUÇÕES

E já que falamos disso, vejamos algo importantíssimo que negligenciamos até agora.

<u>Teorema de Unicidade</u>: Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e uma condição inicial $Y_0 = \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$, a única solução do sistema $Y' = A \cdot Y$ com $Y(0) = Y_0$ é

$$Y(t) = e^{tA} \cdot Y_0 .$$

Para provarmos esse teorema, precisamos de um resultado sobre e^A: para qualquer matriz A dada, e^A é inversível e

$$\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$$

Para provar isso, lembramos que se $A \cdot B = B \cdot A$, então $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.
É claro que $A \cdot (-A) = (-A) \cdot A = -A^2$. Portanto ...

$$I = e^{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} = e^{A-A} = e^{A} \cdot e^{-A}.$$

Para provar o teorema, suponha que $Z(t)$ seja solução de $\begin{cases} Y' = A \cdot Y \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$ e considere o produto

$$W(t) = e^{-tA} \cdot Z(t)$$

Derivando em relação a t, obtemos

$$\frac{d}{dt} W(t) = -A \cdot e^{-tA} \cdot Z + e^{-tA} \cdot Z'$$

$$= -A \cdot e^{-tA} \cdot Z + e^{-tA} \cdot A \cdot Z$$

$$= -e^{-tA} \cdot A \cdot Z + e^{-tA} \cdot A \cdot Z = 0$$

Isto é, $W(t)$ é constante, digamos W_0. Assim

$$W_0 = e^{-tA} \cdot Z(t) \Rightarrow Z(t) = e^{tA} \cdot W_0$$

Fazendo $t = 0$, obtemos

$$Z(0) = W_0 \iff Y_0 = W_0,$$

isto é

$$Z(t) = e^{tA} \cdot Y_0$$

como esperávamos.