Aula 5 - Equilíbrio de Nash

Manoel Galdino

2023-04-10

Aula 5

P-beauty contest

Escolha um número inteiro, entre 0 e 100. Vence o desafio quem acertar a metade da média dos números escolhidos por todos os jogadores. Em outras palavras, vou anotar os números de cada um, computar a média e depois dividir a média por 2. Portanto, vocês devem advinhar não a média dos números, mas a média dividida por 2.

Advinhar metade da média Dividir em grupos de 10 (3 grupos).

Previsões: primeira vez 25. (uma rodada de dominância) Segunda vez 10 (às vezes 5 ou 6) - duas ou três rodadas de dominância Terceira vez: 3 ou 4. Mais uma rodada de dominância. Vários zeros.

Melhor resposta

A ideia de melhor resposta é um conceito central para a teoria dos jogos, de modo que vale a pena defini-lo formalmente.

Definição 4.1: Melhor resposta: A estratégia $s_i \in Si$ é a melhor resposta do jogador i às estratégias de seus oponentes $s_{-i} \in S_{-i}$ se

$v_i(s_i, s_{-i}) >= v_i(s_i', s_{-i})$ para todo $s_i' \in S_i$

Em palavras: a utilidade (ou payoff) do jogador i resultante da sua estratégia e das estratégias dos oponentes é pelo menos tão boa quanto qualquer outra estratégia que i possa vir a adotar.

Considere o jogo da bandeira, do reality show Survivor. Se é sua vez de jogar existem, digamos 20 bandeira, não importa o que você faça, irá perder o jogo se o outro time for racional. Portanto, sua melhor estratégia pode ser tanto 1, 2 ou 3 bandeiras. Esse exemplo mostra que a melhor estratégia pode 1: incluir múltiplas ações; 2. serem igualmente ruins e não fazer diferença nenhuma e resultar todas no mesmo payoff.

Equilíbrio de Nash

Um perfil de estratégias é um equilíbrio de Nash se cada jogador está escolhendo a melhor resposta para o que acredita que os demais jogadores farão. Ou seja, todo mundo está simultaneamente escolhendo a melhor resposta uns para os outros.

Equilíbrio de Nash

O equilíbrio de dominância estrita requer apenas racionalidade, enquanto o equilíbrio de EIEED requeria racionalidade e conhecimento comum de crenças (e racionalidade). Agora, iremos fazer uma suposição mais forte ainda, de que as crenças, em certo sentido, estejam corretas. Isso dará origem ao equilíbrio de Nash, formulado pela primeir vez por John Nash em 1950.

Definição 5.1. O perfil de estratégias puras $s^\star = (s_1^\star, s_2^\star, ..., s_n^\star) \in S$ é um equilíbrio de Nash se $s_i^\star$ é uma melhor resposta a $s_{-i}^\star$ para todo $i \in N$. Ou seja,

$v_i(s_i^\star, s_{-i}^\star) >= v_i(s_i', s_{-i}^\star)$, para toda $s_i' \in S_i$ e todo $i \in N$.

Considere o jogo abaixo. O único equilibrio de EIEED é (Alto, Esquerda). Esse também é um equilíbrio de Nash, pois Alto é a melhor resposta a L, e L é a melhor resposta para Alto.

	Esquerda	Centro	Direita
Alto	(4,3)	(5,1)	(6,2)
Médio	(2,1)	(8,4)	(3,6)
Baixo	(3,0)	(9,6)	(2,8)

Considerem o Dilema do Prisioneiro. É fácil ver também que (C,C) é também um equilíbrio de Nash.

Não é coincidência que Dominância estrita, EIEED e racionazabilidade sempre sejam equilíbrios de Nash. Se um equilíbrio é de dominância estrita, o único sobrevivente de EIEED e de racionazabilidade, então é o único equilíbrio de Nash.

Considere o seguinte jogo. Duas jogadoras devem escolher um número inteiro entre 1 e 9. Se a soma dos números for menor ou igual a dez, elas ganham o valor em reais que cada jogadora escolheu. Se a soma for maior que dez, não ganham nada. Esse jogo é dado por $G = [N = 1, 2; S_i = (1, 2, ..., 9), v_i(s_1, s_2) = s_i, ses_1 + s_2 <=$ 10 0, c.c.]$

Quaaisquer pares $(1, 9); (9, 1)$, $(2, 8)$, $(8, 2)$ etc. formam equilíbrios de Nash. Em particular, uma vez revelados, nenhum jogador possui qualquer incentivo **unilateral** a mudar sua estratégia.

Vamos enfatizar a palavra **unilateral** aqui. Vamos mudar o jogo anterior para o seguinte. Em vez das jogadoras ganharem os números ecolhidos cuja soma for 10, elas (cada uma) ganham a soma dos quadrados dos núemeros escolhidos. Assim, (1,9) e (9,1) geram $1^2+9^2 = 1+81 = 82$ reais, enquanto $2^2+8^2 = 4+64 = 68$ e $5^2 + 5^2 = 50$, de forma que o melhor resultado para as jogadoras é (9,1) ou (1,9). Porém, se jogarem (2,8), nenhuma delas possui incentivo **unilateral** para mudar sua estratégia, pois elas constituem melhores respostas as estratégias umas das outras.

Uma das lições que precisamos tirar de modelos de teoria dos jogos é que não basta boa vontade ou objetivos comuns para uma ação coletiva. É preciso que os equilíbrios sejam tal que nenhum ator tenha um incentivo unilateral para mudar sua estratégia. Em certo sentido, os equilíbrios de Nash são sustentáveis, no sentido de que não há incentivo para desviar, uma vez estando em um deles.

Vamos começar modelando um exemplo "simples". Em 1964, no Chile, Salvador Allende era o candidato da esquerda. Liberais e Conservadores acetaram apoiar o candidato do centro Eduardo Frei, que ganhou a eleição com 56,1% dos votos contra 38,9% de Allende. Em 1970, Allende ganhou a eleição com menos votos do que havia recebido em 64, 36,2%, enquanto o centrista Randomiro Tomic ganhou 27,8% e direitsta Jorge Allesandri 34,9% dos votos. Especula-se que, se um dos candidatos desistisse da eleição, Allende não teria conquistado o poder.

Vamos então fazer um modelo simples para ilustrar a questão.

Suponha um eleitorado com três tipos de ordenamento de preferências de candidatas A, B e C. 1. $A \succ B \succ C$ 2. $B \succ C \succ A$ 3. $C \succ B \succ A$

Vamos supor adicionalmente que 40% do eleitoradotem preferências do tipo 1 o restante igualmente dividido entre o tipo 2 e 3 (30% cada).

Se cada eleitor votar sinceramente (isto é, para sua candidata preferida), A teira 40% dos votos, B 30% e C 30%. Se a regra for como no Brasil 1945-64, em que não havia segundo turno e a candidata mais votada vence, A seria eleita. Se porém parearmos A contra B, a vencedora seria B com 60% dos votos, e B contra C também daria a vitória para B, com 70% dos votos. Em casos como esse, em que há uma vencedora que ganha todas as disputas 2x2, chamamos de vencedora de Condorcet (Condorcet winner). B e C, portanto, poderiam ser estratégicas e votarem não na candidata preferida para obter um resultado mais favorável. O problema que B e C enfrentam pode, portanto, ser modelado do seguinte modo.

	Votar em B	Votar em C
Votar em B	B ganha	A ganha
Votar em C	A ganha	C ganha

Esse jogo é muito parecido com o jogo de coordenação Bach-Stravinsky. Há dois equilíbrios de Nash, B ganha e C ganha. Porém, a escolha de qual equilíbrio acontecerá requer coordenação entre eleitores do tipo 2 e 3. Se falharem em coordenar os votos, contudo, A ganhará. Se B ou C desistir de disputar a eleição, a coordenação estará garantida, como ocorreu no Chile em 1964. Na ausência de tal coalizão, eleitores terão muita dificuldade de coordenar seu voto.

Do ponto de vista da Ciência Política, é importante enfatizar alguns pontos dessa discussão: 1. É muito mais fácil para as elites polítics coordenarem entre si do que entre os eleitores, que não possuem uma forma fácil de comunicação. 2. Informações sobre candidatas com maiores intenções de voto em simulações de segundo turno permite ajudar os eleitores a tomarem decisões melhores e coordenarem seus votos. Portanto, quando vocês virem pessoas reclamando de pesquisas d intenção de voto, que isso influenciar o eleitor e faz com que ele vote estrategicamente, pergunte-se: é realmente ruim que o eleitorado vote estrategicamente? Voltaremos a essa discussão em aulas futuras. 3. Na presença de segundo turno, existe necessidade de haver coordenação antecipada? Não para evitar que A seja eleito. B ou C irá para o segundo turno contra A.