Gabarito Exercício 4 ou 5 Lista 2

MAT0120 - Álgebra I para a Licenciatura

$1^{\underline{o}}$ semestre de 2023

Prove que as seguintes fórmulas são verdadeiras para todo inteiro n, com $n > 0$.

a) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2$

Demonstração:

Provaremos por indução em n.

Caso base: $n = 1$

Por um lado, $1^3 = 1$. Por outro lado, $\left[\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1)\right]^2 = \left[\frac{1}{2} \cdot 2\right]^2 = 1^2 = 1$. Logo, vale para $n = 1$.

Agora, vamos supor que a demonstração vale para n e vamos provar para $n + 1$.

$$\underbrace{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3}_{\text{HI}} + (n+1)^3 =$$

$$\begin{aligned}
\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2 + (n+1)^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \\
&= \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

b) $(1 - \frac{1}{2}) \dots (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{1}{n+1}) = \frac{1}{n+1}$

Demonstração:

Provaremos por indução em n.

Caso base: $n = 1$

Por um lado, $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Por outro lado, $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$. Logo, vale para $n = 1$.

Agora, vamos supor que a demonstração vale para n e vamos provar para $n + 1$.

$$\underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)}_{\text{HI}}\left(1 - \frac{1}{n+2}\right) =$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{1}{n+2}\right) &= \left(\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{n+2-1}{n+2}\right) \\
&= \left(\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{n+1}{n+2}\right) \\
&= \left(\frac{1}{n+2}\right)
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

c) $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

Demonstração:

Provaremos por indução em n.

Caso base: $n = 1$

Por um lado, $2^0 = 1$. Por outro lado, $2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$. Logo, vale para $n = 1$.

Agora, vamos supor que a demonstração vale para n e vamos provar para $n + 1$.

$$\underbrace{1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}}_{\text{HI}} + 2^n =$$

$$\begin{aligned} 2^n - 1 + 2^n &= 2^n + 2^n - 1 \\ &= 2 \cdot 2^n - 1 \\ &= 2^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

■

d) $\frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

Demonstração:

Provaremos por indução em n.

Caso base: $n = 1$

Por um lado, $\frac{1}{1\cdot2\cdot3} = \frac{1}{6}$. Por outro lado, $\frac{1\cdot(1+3)}{4\cdot(1+1)\cdot(1+2)} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$. Logo, vale para $n = 1$.

Agora, vamos supor que a demonstração vale para n e vamos provar para $n + 1$.

$$\underbrace{\frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}}_{\text{HI}} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} =$$

$$\begin{aligned} \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} &= \frac{n(n+3)(n+3)+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{n(n+3)^2+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{n^3+6n^2+9n+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{(n+1)(n+1)(n+4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)} \end{aligned}$$

■