# Física Matemática 01 - Lista 01

E01. Usaremos a notação $y(x)$ para indicar funções $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y'(x)$ suas derivadas com respeito a $x$.

(a) Considere a equação diferencial

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0.$$

Determine uma solução da forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

onde $a_n$ são coeficientes reais com $a_0 = 1$

(b) Na equação

$$y'' - 2xy' + 2ky = 0$$

a constante $k$ assume valores inteiros maiores ou igual a zero. Fixado $k$, existe uma solução $H_k(x)$ tal que $H_k(0) = 1, H_k'(0) = 0$ para $k$ par e $H_k(0) = 0, H_k'(0) = 1$ para $k$ impar. Determine $H_k(x)$ para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

E02. Considere o produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{-L}^{L} f(x) g(x) dx$$

para funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de período $2L$. Mostre que o conjunto

$$\left\{ 1/2,\ \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right),\ \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right), \ldots\ \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right),\ \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right), \ldots \right\}$$

com infinitas funções, é ortogonal.

E03 Considere a função $f(x) = x^2$ definida no intervalo $[0, \pi]$.

(a) Escreva a série de Fourier de período $2\pi$ de $f(x)$ contendo somente cossenos e uma constante.

(b) Escreva a série de Fourier de período $2\pi$ de $f(x)$ contendo somente senos.

(c) Escreva uma série de Fourier de período $2\pi$ de $f(x)$ contendo tanto cossenos quanto senos.

E04. Seja $H \subset \mathbb{R}^2$ uma retângulo definido por

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ 0 \leq x \leq a, \ 0 \leq y \leq b\}.$$

Resolva a equação $\nabla^2 f(x, y) = 0$ em $H$, com as C.C. dadas por

$$\begin{aligned} f(x,0) &= 0 \\ f(x,b) &= 0 \\ f(a,y) &= 0 \\ f(0,y) &= V_0 \ (constante). \end{aligned}$$

E05 Uma barra metálica unidimensional de tamanho $L$ tem suas extremidades conectadas a dois reservatórios térmicos de temperaturas $a$ e $b$. Em $t = 0$ a temperatura da barra é uniforme e igual a zero. Determine a função temperatura $u(x, t)$ para $0 \leq x \leq L$ e $t \geq 0$ resolvendo a equação do calor com as condições de contorno e condição inicial apropriadas.

E06 Uma função $f : [0, L] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ representa uma corda vibrante, satisfazendo a equação

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0,$$

a condição de contorno $f(0, t) = 0$, $f(L, t) = 0$ e a condição inicial

$$f(x, 0) = h(x),$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

A função $h : [0, L] \to \mathbb{R}$ é conhecida. Note que $h(x)$ só está definida no intervalo $[0, L]$. Mostre que podemos escrever $f$ na forma

$$f(x, t) = \frac{1}{2} g(x - vt) + \frac{1}{2} g(x + vt)$$

para uma escolha adequada da função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Determine $g(x)$. Note que $g(x)$ deve estar definida para toda a reta real.