MAT0164 - Números Inteiros: uma introdução à matemática

Lista 1 - Soluções

Sentenças, tabelas verdade e quantificadores

1º Semestre de 2023

(1) Em cada item, identifique se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F):

(a) $2 \leq 3$ e 7 é primo.

(b) $6 + 2 = 8$ ou 6 é primo.

(c) 5 não é primo ou 8 é primo.

(d) Se 3 é primo então $32 = 9$.

(e) Se 3 não é primo então $32 \neq 9$.

(f) Se $32 = 9$ então 3 não é primo.

(g) É falso que $2 + 3 \neq 5$.

(h) (Se $2 < 3$ implica que $4 > 5$) então 8 é primo.

(i) Se $2 + 2 = 5$ então 5 é primo.

(j) 5 é ímpar e 3 é par.

(k) 5 é ímpar ou 3 é par.

(l) Se $2 + 5 = 7$ e $2 \cdot 5 = 10$ então $22 + 52 = 102$.

(m) Ou 5 é ímpar ou 5 é múltiplo de 3.

Solução

(a) Verdadeira. Sejam

$$p := 2 \leq 3$$
$$q := 7 \text{ é primo}$$

A afirmação corresponde simbolicamente a $p \wedge q$.
Observe que, como 2 de fato é menor ou igual a 3, a afirmação p possui valor lógico verdadeiro (V). Como 7 é um número primo, então q também possui valor lógico verdadeiro (V). Assim, $V \wedge V \equiv V$, portanto a afirmação é verdadeira.

(b) Verdadeira. Sejam

$$p := 6 + 2 = 8$$
$$q := 6 \text{ é primo}$$

A afirmação corresponde simbolicamente a $p \vee q$.
Observe que, como $6 + 2 = 8$,, p possui valor lógico verdadeiro (V). Como 6 não é um número primo, então q possui valor lógico falso (F). Assim, $V \vee F \equiv V$, portanto a afirmação é verdadeira.

(c) Falsa. Sejam

$$p := 5 \text{ não é primo}$$

$$q := 8 \text{ é primo}$$

A afirmação corresponde simbolicamente a $p \vee q$.
Observe que, como 5 é um número primo, p possui valor lógico falso (F). Como 8 não é um número primo, então q também possui valor lógico falso (F). Assim, $F \vee F \equiv F$, portanto a afirmação é falsa.

(d) Falsa. Sejam

$$p := 3 \text{ é primo}$$

$$q := 32 = 9$$

A afirmação corresponde simbolicamente a $p \rightarrow q$.
Observe que, como 3 é um número primo, p possui valor lógico verdadeiro (V). Como $32 \neq 9$, então q também possui valor lógico falso (F). Assim, $V \rightarrow F \equiv F$, portanto a afirmação é falsa.

(e) Verdadeira. Sejam

$$p := 3 \text{ não é primo}$$

$$q := 32 \neq 9$$

A afirmação corresponde simbolicamente a $p \rightarrow q$.
Observe que, como 3 é um número primo, p possui valor lógico falso (F). Como $32 \neq 9$, então q possui valor lógico verdadeiro (V). Assim, $F \rightarrow V \equiv V$, portanto a afirmação é verdadeira.

(f) Verdadeira. Sejam

$$p := 32 = 9$$

$$q := 3 \text{ não é primo}$$

A afirmação corresponde simbolicamente a $p \rightarrow q$.
Como $32 \neq 9$, então p possui valor lógico falso (F). Como 3 é um número primo, q também possui valor lógico falso (F). Daí, $F \rightarrow F \equiv V$, portanto a afirmação é verdadeira.

(g) Verdadeira. Seja

$$p := 2 + 3 \neq 5$$

A afirmação corresponde simbolicamente a $\neg p$.
Como $2 + 3 = 5$, então p possui valor lógico falso (F). Logo,$\neg F \equiv V$, portanto a afirmação é verdadeira.

(h) Verdadeira. Sejam

$$p := 2 < 3$$

$$q := 4 > 5$$

$$r := 8 \text{ é primo}$$

A afirmação corresponde simbolicamente a $(p \rightarrow q) \rightarrow r$. Veja que p possui valor lógico verdadeiro (V), q possui valor lógico falso (F) e r possui valor lógico falso (F). Logo,$(V \rightarrow F) \rightarrow F \equiv F \rightarrow F \equiv V$, portanto a afirmação é verdadeira.

(i) Verdadeira. Sejam

$$p := 2 + 2 = 5$$
$$q := 5 \text{ é primo}$$

A afirmação corresponde simbolicamente a $p \to q$.
Como $2 + 2 \neq 5$, então p possui valor lógico falso (F). Como 5 é um número primo, q possui valor lógico verdadeiro (V). Daí, $F \to V \equiv V$, portanto a afirmação é verdadeira.

(j) Falsa Sejam

$$p := \ 5 \text{ é ímpar}$$
$$q := 3 \text{ é par}$$

A afirmação corresponde simbolicamente a $p \wedge q$.
Como p possui valor lógico verdadeiro (V) e q possui valor lógico falso (F), então $V \wedge F \equiv F$, portanto a afirmação é falsa.

(k) Verdadeira. Sejam

$$p := \ 5 \text{ é ímpar}$$
$$q := 3 \text{ é par}$$

A afirmação corresponde simbolicamente a $p \vee q$.
Como p possui valor lógico verdadeiro (V) e q possui valor lógico falso (F), então $V \vee F \equiv V$, portanto a afirmação é verdadeira.

(l) Falsa. Sejam

$$p := 2 + 5 = 7$$
$$q := 2 \cdot 5 = 10$$
$$r := 22 + 52 = 102$$

A afirmação corresponde simbolicamente a $(p \wedge q) \to r$. Veja que p possui valor lógico verdadeiro (V), q possui valor lógico verdadeiro (V) e r possui valor lógico falso (F). Logo,$(V \wedge V) \to F \equiv V \to F \equiv F$, portanto a afirmação é falsa.

(m) Verdadeira. Sejam

$$p := \ 5 \text{ é ímpar}$$
$$q := 5 \text{ é múltiplo de } 3$$

A afirmação corresponde simbolicamente a $p \veebar q$.
Como p possui valor lógico verdadeiro (V) e q possui valor lógico falso (F), então $V \veebar F \equiv V$, portanto a afirmação é verdadeira.

(2) Escreva a negação de cada uma das seguintes afirmações:

(a) 7 é um número primo e $2 + 2 = 4$.

(b) Roberto e João têm mais de dois metros de altura.

(c) Todas as estradas de Petrópolis são bem cuidadas.

(d) Alguns lápis são azuis.

(e) Todos os lápis são azuis.

(f) A função f é contínua em todos os pontos.

(g) Mário não gosta de Cálculo e João gosta de Teoria dos Conjuntos.

(h) Carlos gosta de Álgebra e Caio não gosta de Teoria dos Números.

(i) Se está chovendo, Maria não lava a louça.

(j) Todas as borboletas são azuis e alguns gatos são vermelhos.

(k) Se a cadeira é vermelha então a mesa é verde.

(l) Se minha mãe é um trator, então eu não sou uma moto-serra.

(m) Se chocolate é saudável e todas as laranjas são doces então ou geleia de pepino é saudável ou pipoca não é salgada.

(n) João é feliz apenas quando joga bola.

(o) O principal jogador de futebol contratado para a temporada não apenas não foi capaz de marcar gols nos primeiros jogos como também não conseguiu acertar nenhum pênalti cobrado.

Solução

(a) Vamos dividir a afirmação em duas proposições:

$$p := 7 \text{ é um número primo}$$

$$q := 2+2=4$$

Na forma simbólica em termos de conectivos lógicos, a afirmação corresponde a $p \wedge q$. Assim, a negação corresponde a $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$. Assim, a negação será
7 não é um número primo ou $2+2 \neq 4$.

(b) Seja

$$p := \text{Roberto e João têm mais de dois metros de altura}$$

A negação corresponde a $\neg p$ Logo, a negação da afirmação corresponde a:
Roberto e João não têm mais de dois metros de altura.
Mas também podemos interpretar a afirmação dividindo-a na proposição relativa à altura de João e da altura de Roberto:

$$p := \text{Roberto têm mais de dois metros de altura}$$

$$q := \text{João têm mais de dois metros de altura}$$

Veja que podemos reescrever a afirmação para uma forma simbólica em termos de conectivos lógicos como sendo $p \wedge q$. Assim, a negação corresponde a $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$. Logo, a negação da afirmação corresponde a:
Roberto não têm dois metros de altura ou João não têm dois metros de altura.

(c) Observe que nesta afirmação a palavra “todos” faz o papel do quantificador universal $\forall$. Sendo sua negação correspondent ao quantificador existencial $\exists$, basta negar a afirmação principal

$$p := \text{As estradas de Petrópolis são bem cuidadas}$$

e podemos escrevê-la como:
Existe ao menos uma estrada de Petrópolis que não é bem cuidada.
Nem todas as estradas de Petrópolis são bem cuidadas.

(d) Observe que nesta afirmação a palavra "alguns" faz o papel do quantificador existencial $\exists$. Sendo sua negação correspondente ao quantificador universal $\forall$, basta negar a afirmação principal

$$p := \text{Lápis são azuis}$$

e podemos escrever:
Todos os lápis não são azuis,
ou equivalentemente,
Nenhum lápis é azul.

(e) Nesta afirmação a palavra "todos" faz o papel do quantificador universal $\forall$. Sendo sua negação correspondente ao quantificador universal $\exists$, basta negar a afirmação principal

$$p := \text{Lápis são azuis}$$

e podemos escrever:
Existe um lápis que não é azul.
Ou equivalentemente,
Algum lápis não é azul.

(f) Novamente, a palavra "todos" indica a existência de um quantificador universal $\forall$ na afirmação. Assim, sua negação corresponde a substituí-lo pelo quantificador existencial $\exists$ e negar a proposição, obtendo
Existe ao menos um ponto em qua a função f não é contínua.
Ou equivalentemente,
A função f não é contínua em ao menos um ponto.

(g) Sejam

$$p := \text{Mário não gosta de Cálculo}$$

$$q := \text{João gosta de Teoria dos Conjuntos}$$

Veja que podemos reescrever a afirmação para uma forma simbólica em termos de conectivos lógicos como sendo $p \wedge q$. Assim, a negação corresponde a $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$. Logo, a negação da afirmação corresponde a:
Mário gosta de Cálculo ou João não gosta de Teoria dos Conjuntos.

(h) Sejam

$$p := \text{Carlos gosta de Álgebra}$$

$$q := \text{Caio não gosta de Teoria dos Números}$$

Veja que podemos reescrever a afirmação para uma forma simbólica em termos de conectivos lógicos como sendo $p \wedge q$. Assim, a negação corresponde a $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$. Logo, a negação da afirmação corresponde a:
Carlos não gosta de Álgebra ou Caio gosta de Teoria dos Números.

(i) Observe que as partículas "Se" e "então" referem-se ao conectivo lógico de implicação $\rightarrow$. Considere

$$p := \text{Está chovendo}$$

$$q := \text{Maria não lava a louça}$$

Assim, a afirmação corresponde simbolicamente a $p \rightarrow q$. Daí, lembrando que $p \rightarrow q \cong \neg p \vee q$, temos que a negação corresponde a

$$\neg(p \rightarrow q) = \neg(\neg p \vee q) = \neg(\neg p) \wedge \neg q = p \wedge \neg q$$

Assim, a negação corresponderá a
Está chovendo e Maria lava a louça.

(j) Vamos dividir a proposição em duas proposições simples:

$$p := \text{Todas as borboletas são azuis}$$

$$q := \text{Alguns gatos são vermelhos}$$

A afirmação correponde simbolicamente a $p \wedge q$. Assim, a negação corresponde a $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$. Para negar p, observe que temos o quantificador universal $\forall$ por conta da palavra "todos". Sua negação corresponderá ao quantificador existencial $\exists$ e a negação da afirmação principal. Já em q, temos o quantificador existencial indicado pela partícula "alguns". Logo, sua negação corresponderá ao quantificador universal $\forall$. Em suma, podemos escrever simbolicamente como

$$\forall x \in \text{borboletas}(x \text{ é azul}) \wedge \exists x \in \text{gatos}(x \text{ é vermelho}),$$

e assim

$$\begin{array}{lr} & \neg[\forall x \in \text{borboletas}(x \text{ é azul}) \wedge \exists x \in \text{gatos}(x \text{ é vermelho})] \\ \Leftrightarrow & \exists x \in \text{borboletas}\neg(x \text{ é azul}) \vee \forall x \in \text{gatos}\neg(x \text{ é vermelho}) \\ \Leftrightarrow & \exists x \in \text{borboletas}(x \text{ não é azul}) \vee \forall x \in \text{gatos}(x\text{não é vermelho}) \end{array}$$

Portanto, a negação corresponde a
Alguma borboleta não é azul ou todos os gatos não são vermelhos.
Ou equivalentemente,
Nem toda borboleta é azul ou nenhum gato é vermelho.

(k) Observe que as partículas "Se" e "então" referem-se ao conectivo lógico de implicação $\rightarrow$. Considere

$$p := \text{Cadeira é vermelha}$$

$$q := \text{Mesa é verde}$$

Assim, a afirmação corresponde simbolicamente a $p \rightarrow q$. Daí, lembrando que $p \rightarrow q \cong \neg p \vee q$, temos que a negação corresponde a

$$\neg(p \rightarrow q) = \neg(\neg p \vee q) = \neg(\neg p) \wedge \neg q = p \wedge \neg q$$

Assim, a negação corresponderá a
A cadeira é vermelha e a mesa não é verde.

(l) Novamente, temos as partículas "Se" e "então"que se referem ao conectivo lógico de implicação $\rightarrow$. Sejam

$$p := \text{minha mãe é um trator}$$

$$q := \text{não sou uma moto-serra}$$

Assim, a afirmação corresponde simbolicamente a $p \rightarrow q$. Como $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$, a negação corresponde a

$$\neg(p \rightarrow q) = \neg(\neg p \vee q) = \neg(\neg p) \wedge \neg q = p \wedge \neg q$$

Assim, a negação corresponderá a
Minha mãe é um trator e eu sou uma moto-serra.

(m) Para entender melhor esta proposição, vamos dividí-la em proposições simples. As partículas "Se" e "então"que se referem ao conectivo lógico de implicação $\rightarrow$. Sendo

$$p := \text{chocolate é saudável e todas as laranjas são doces}$$

$$q := \text{ou geleia de pepino é saudável ou pipoca não é salgada,}$$

A afirmação corrsponde a $p \rightarrow q$. Mas veja que p e q podem ambas ser decompostas em proposições simples.

- Sendo

$$r := \text{chocolate é saudável}$$

$$s := \text{ todas as laranjas são doces,},$$

então $p \equiv r \wedge s$.

- Sendo

$$t := \text{geleia de pepino é saudável}$$

$$u := \text{ pipoca não é salgada,},$$

então as partículas "ou ... ou" correspndem ao conectivo lógico ou exclusivo, daí $q \equiv t \veebar u$.

Sendo assim, a negação da afirmação inicial em linguagem simbólica corresponde a

$$\begin{array}{cr} & \neg((r \wedge s) \rightarrow (t \veebar u)) \\ \Leftrightarrow & \neg(\neg(r \wedge s) \vee (t \veebar u)) \\ \Leftrightarrow & \neg(\neg(r \wedge s)) \wedge \neg(t \veebar u) \\ \Leftrightarrow & (r \wedge s) \wedge (t \leftrightarrow u) \end{array}$$

Portanto, a negação da afirmação corresponde a
Chocolate é saudável e todas as laranjas são doces e geleia de pepino é saudável se e somente se pipoca não é salgada.

(n) Sejam

$$p := \text{João é feliz}$$

$$q := \text{João joga bola}$$

Observe que a palavra "apenas quando" tem o mesmo sentido que "se e somente se", correspondendo ao conectivo lógico bicondicional $\leftrightarrow$. Assim, em linguagem simbólica esta afirmação corresponde a $p \leftrightarrow q$. Sua negação corresponde a $\neg(p \leftrightarrow q) = p \veebar q$. Em linguagem natural, podemos escrever

$$\boxed{\text{Ou João é feliz ou joga bola}}$$

(o) Sejam

$$p := \text{não foi capaz de marcar gols nos primeiros jogos}$$

$$q := \text{não conseguiu acertar nenhum pênalti cobrado.}$$

Veja que podemos reescrever a afirmação para uma forma simbólica em termos de conectivos lógicos como sendo $p \wedge q$. Assim, a negação corresponde a $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$. Logo, a negação da afirmação corresponde a:
O principal jogador de futebol contratado para a temporada foi capaz de marcar gols nos primeiros jogos ou conseguiu acertar algum pênalti cobrado.

(3) Em cada item, prove que as sentenças são sempre verdadeiras:

(a) $(p \to (q \wedge r)) \to (p \to r)$

(b) $(p \wedge (p \to q)) \to q$

(c) $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

(d) $q \vee ((r \wedge \neg p) \vee \neg(\neg p \wedge (q \vee r)))$

Solução

Vamos provar que as sentenças são verdadeiras construindo suas respectivas tabelas-verdade e provando que o valor lógico resultante sempre é verdadeiro (V), ou simplificando a expressão, conforme for mais conveniente para cada caso:

(a) Construindo a tabela verdade temos:

p	q	r	$q \wedge r$	$p \to r$	$p \to (q \wedge r)$	$(p \to (q \wedge r)) \to (p \to r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V
V	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V

(b) Observe que

$$\begin{array}{rr}
 & (p \wedge (p \to q)) \to q \\
\Leftrightarrow & \neg(p \wedge (p \to q)) \vee q \\
\Leftrightarrow & \neg p \vee \neg(p \to q) \vee q \\
\Leftrightarrow & \neg p \vee \neg(\neg p \vee q) \vee q \\
\Leftrightarrow & \neg p \vee (p \wedge \neg q) \vee q \\
\Leftrightarrow & \neg q \vee \neg q \vee q \\
\Leftrightarrow & \neg q \vee V \\
\Leftrightarrow & V
\end{array}$$

(c) Como $(\neg p \vee \neg q) \equiv \neg(p \wedge q)$, esta sentença corresponde a $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg(p \wedge q)$, que será sempre verdadeira, pois os lados esquerdo e direito sempre serão simultaneamente falsos ou verdadeiros.

(d) Seja $s := q \vee ((r \wedge \neg p) \vee \neg(\neg p \wedge (q \vee r)))$ Construindo a tabela verdade temos:

p	q	r	$\neg p$	$q \vee r$	$\neg(p \wedge (q \vee r))$	$r \wedge \neg p$	$(r \wedge \neg p) \vee \neg(p \wedge (q \vee r))$	s
V	V	V	F	V	F	F	F	V
V	V	F	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V	F	V	V
F	V	V	V	V	F	F	F	V
F	V	F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	F	F	F	V
F	F	F	V	F	V	F	V	V

(4) Sendo a proposição $p \to (r \vee s)$ falsa e a proposição $(q \wedge \neg s) \leftrightarrow p$ verdadeira, classifique em verdadeira ou falsa as afirmações p, q, r e s.

Solução

Se $p \to (r \vee s)$, como o conectivo lógico $\to$ resulta em falso apenas se a primeira proposição for verdadeira e a segunda for falsa, isso significa que $p = V$ e $r \vee s = F$. Assim, como $r \vee s = F$, a única possibilidade para isso ocorrer é $r = F$ e $s = F$.

Agora, como $(q \wedge \neg s) \leftrightarrow p$ é verdadeira, mas sabemos que $p = V$ e $s = F$. Isso significa necessariamente que

$$(q \wedge \neg F) \leftrightarrow V = V \Rightarrow q \wedge V = V \Rightarrow q = V.$$

Portanto, p e q são afirmações verdadeiras, enquanto r e s são afirmações falsas.

(5) Escreva a tabela verdade da fórmula:

(a) $\neg(p \wedge q) \vee \neg r$

(b) $p \to (q \wedge \neg r)$

(c) $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee (r \wedge \neg q))$

(d) $(p \vee q) \wedge (p \to (q \vee p))$

Solução

(a) $\neg(p \wedge q) \vee \neg r$

p	q	r	$\neg r$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge q$	$\neg(p \wedge q) \vee \neg r$
V	V	V	F	V	F	F
V	V	F	V	V	F	V
V	F	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	V	F	V	V
F	F	V	F	F	V	V
F	F	F	V	F	V	V

(b) $p \to (q \wedge \neg r)$

p	q	r	$\neg r$	$q \wedge \neg r$	$p \to (q \wedge \neg r)$
V	V	V	F	F	V
V	V	F	V	V	F
V	F	V	F	F	V
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	F
F	F	F	V	F	F

(c) $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee (r \wedge \neg q))$

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$r \wedge \neg q$	$p \vee (r \wedge \neg q)$	$\neg p \vee q$	$(\neg p \vee q) \wedge (p \vee (r \wedge \neg q))$
V	V	V	F	F	F	V	V	V
V	V	F	F	F	F	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	F	F
V	F	F	F	V	F	V	F	F
F	V	V	V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F	F	V	F
F	F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	F	F	V	F

(d) $(p \vee q) \wedge (p \to (q \vee p))$

p	q	$q \vee p$	$p \to (q \vee p)$	$(p \vee q) \wedge (p \to (q \vee p))$
V	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	V	V	V	V
F	F	F	V	F

(6) Mostre que as duas seguintes sentenças são equivalentes, onde p, q e r são sentenças:

(a) $p \to (q \vee r)$; (b) $\neg q \to (\neg p \vee r)$.

Solução

Observe que

$$
\begin{aligned}
& \neg q \to (\neg p \vee r) \\
\Leftrightarrow\ & \neg(\neg q) \vee (\neg p \vee r) \\
\Leftrightarrow\ & q \vee (\neg p \vee r) \\
\Leftrightarrow\ & \neg p \vee q \vee r \\
\Leftrightarrow\ & \neg p \vee (q \vee r) \\
\Leftrightarrow\ & p \to (q \vee r)
\end{aligned}
$$

concluindo o resultado desejado.

(7) Simplifique a fórmula $\neg(p \vee (q \wedge \neg r)) \wedge q$ (i.e., escreva uma fórmula equivalente a essa e que possua menos ocorrências das sentenças p, q e r no total).

Solução

$$
\begin{aligned}
& \neg(p \vee (q \wedge \neg r)) \wedge q \\
\Leftrightarrow\ & \neg p \wedge \neg(q \wedge \neg r) \wedge q \\
\Leftrightarrow\ & \neg p \wedge \neg q \vee r \wedge q \\
\Leftrightarrow\ & \neg p \wedge \neg q \vee r \wedge q \\
\Leftrightarrow\ & \neg p \wedge q \wedge r
\end{aligned}
$$

Logo, $\neg(p \vee (q \wedge \neg r)) \wedge q \equiv \neg p \wedge q \wedge r$.

(8) Em cada item, encontre uma fórmula f envolvendo as sentenças dadas e apenas os conectivos $\neg$, $\wedge$ e $\vee$ (i.e., sem $\to$ ou $\leftrightarrow$) e que satisfaz a tabela verdade apresentada.

(a)

p	q	r	f
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	V

(b)

p	q	f
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

(c)

p	q	f
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	F

Solução

(a) $\neg(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \wedge \neg(\neg p \wedge q \wedge \neg r) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg q \wedge r)$

(b) $p \veebar q$

(c) $\neg p \wedge q$

(9) * Enquanto estudava lógica, Gabriel acidentalmente derramou um pouco de café em seu caderno, deixando uma parte da contradição que estava estudando borrada, como mostrado na figura.

$(((q \vee r) \to (p \wedge \neg r)) \leftrightarrow (\neg(r \wedge q \wedge (r \to \neg p)) \wedge$  $\vee r)) \wedge (r \to \neg(p \wedge (\neg q \vee r)))$

Sabendo que a parte incompreensível era constituída apenas dos conectivos lógicos $\wedge, \vee$ e $\neg$ e das proposições p e q, estando em sua forma mais simplificada possível, apresente a proposição que Gabriel estava estudando.

Solução

Vamos chamar de x a parte da proposição que foi borrada. Inicialmente observe que a proposição escrita pode ser simplificada:

$$(((q \vee r) \to (p \wedge \neg r)) \leftrightarrow (\neg(r \wedge q \wedge (r \to \neg p)) \wedge x \vee r)) \wedge (r \to \neg(p \wedge (\neg q \vee r)))$$

$$(((q \vee r) \to (p \wedge \neg r)) \leftrightarrow (\neg(r \wedge q \wedge (r \to \neg p)) \wedge x \vee r)) \wedge (r \to \neg(p \wedge (\neg q \vee r)))$$
$$(\neg((q \vee r) \to (p \wedge \neg r)) \veebar (\neg(r \wedge q \wedge (r \to \neg p)) \wedge x \vee r)) \wedge (\neg(p \wedge (\neg q \vee r)) \vee \neg r)$$
$$(\neg((q \vee r) \to (p \wedge \neg r)) \veebar (\neg(r \wedge q \wedge (r \to \neg p)) \wedge x \vee r)) \wedge (\neg(p \wedge (\neg q \vee r)) \vee \neg r)$$
$$(\neg(\neg(q \vee r) \vee (p \wedge \neg r)) \veebar (\neg(r \wedge q \wedge (\neg r \vee \neg p)) \wedge x \vee r)) \wedge (\neg p \vee \neg(\neg q \vee r) \vee \neg r)$$
$$(\neg(\neg(q \vee r) \vee (p \wedge \neg r)) \veebar (\neg(r \wedge q \wedge \neg(r \wedge p)) \wedge x \vee r)) \wedge (\neg p \vee \neg(\neg q \vee r) \vee \neg r)$$
$$(((q \vee r) \vee (\neg p \vee r)) \veebar (\neg(r \wedge q \wedge \neg(r \wedge p)) \wedge x \vee r)) \wedge (\neg p \vee (q \wedge \neg r) \vee \neg r)$$
$$(((q \vee r) \vee (\neg p \vee r)) \veebar ((\neg(r \wedge q) \vee (r \wedge p)) \wedge x \vee r)) \wedge (\neg p \vee (q \wedge \neg r) \vee \neg r)$$
$$(((q \wedge \neg p) \vee (q \wedge r) \vee (r \wedge r) \vee (r \wedge \neg p)) \veebar (((\neg(r \wedge q) \vee (r \wedge p)) \wedge x) \vee r)) \wedge (\neg p \vee \neg r)$$
$$(((q \wedge \neg p) \vee (q \wedge r) \vee r \vee (r \wedge \neg p)) \veebar ((\neg(r \wedge q) \vee (r \wedge p) \vee r) \wedge (x \vee r))) \wedge (\neg p \vee \neg r)$$
$$(((q \wedge \neg p) \vee r \vee (r \wedge \neg p)) \veebar ((\neg(r \wedge q) \vee (r \wedge p) \vee r) \wedge (x \vee r))) \wedge \neg(p \wedge r)$$
$$(((q \wedge \neg p) \vee r \vee (r \wedge \neg p)) \veebar ((\neg(r \wedge q) \vee r) \wedge (x \vee r))) \wedge \neg(p \wedge r)$$
$$(((q \wedge \neg p) \vee r) \veebar ((\neg(r \wedge q) \vee r) \wedge (x \vee r))) \wedge \neg(p \wedge r)$$

Assim, obtemos a seguinte afirmação equivalente:

$$(((q \wedge \neg p) \vee r) \veebar ((\neg(r \wedge q) \vee r) \wedge (x \vee r))) \wedge \neg(p \wedge r)$$

Agora, vamos dividí-la em alguns blocos para analisá-los separadamente. Defina

$$s := (q \wedge \neg p) \vee r \quad t := (\neg(r \wedge q) \vee r) \wedge (x \vee r) \quad u := \neg(p \wedge r)$$

Vamos construir as tabelas verdade para s, t e u para analisar seus valores lógicos.

- Tabela verdade para s: Como s não depende de x, basta avaliar seus valores lógicos diretamente:

p	q	r	$\neg p$	$q \wedge \neg p$	$(q \wedge \neg p) \vee r$
V	V	V	F	F	V
V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	F
V	F	F	F	F	F
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	F	V
F	F	F	V	F	F

- Tabela verdade para t : Observe que t depende de x, portanto, em sua tabela verdade, vamos atribuir X quando não for possível determinar com certeza se a proposição é falsa ou verdadeira.

p	q	r	$r \wedge q$	$\neg(r \wedge q)$	$\neg(r \wedge q) \vee r$	$x \vee r$	$(\neg(r \wedge q) \vee r) \wedge (x \vee r)$
V	V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	F	V	V	X	X
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	X	X
F	V	V	V	F	V	V	V
F	V	F	F	V	V	X	X
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	X	X

- Tabela verdade para u : Observe que u não depende de q, apenas de p e r, logo a tabela verdade não precisaria de uma coluna para q. no entanto, como a fórmula maior a ser analisada depende de q, iremos adicioná-la para facilitar a construção posterior da tabela verdade geral:

p	q	r	$p \wedge r$	$\neg(p \wedge r)$
V	V	V	V	F
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V
F	F	F	F	V

Juntando as informações, obtemos:

p	q	r	s	t	u	$s \veebar t$	$s \veebar t \wedge u$
V	V	V	V	V	F	V	F
V	V	F	F	X	V	X	X
V	F	V	F	V	F	V	F
V	F	F	F	X	V	X	X
F	V	V	V	V	V	F	F
F	V	F	V	X	V	$\neg$ X	$\neg$ X
F	F	V	V	V	V	F	F
F	F	F	F	X	V	X	X

Para ser uma contradição, a afirmação precisa ser sempre falsa. Logo, a última coluna deve apenas conter o valor lógico F, e podemos tentar construir uma tabela verdade para x a partir das linhas pares. Observe que nessas linhas, $r = F$, e como $x \wedge r = X$, temos $x \wedge F = X \Rightarrow x = X$.

- Na 2ª linha, devemos ter $X = F$. Logo, se $p = V$ e $q = V$ temos $x = F$;
- Na 4ª linha, devemos ter $X = F$. Logo, se $p = V$, e $q = F$ temos $x = F$;
- Na 6ª linha, devemos ter $\neg X = F \Rightarrow X = V$. Logo, se $p = F$ e $q = V$ temos $x = V$;
- Na 8ª linha, devemos ter $X = F$ Logo, se $p = V$ e $q = F$, $r = F$, temos $x = F$.

Esses dados nos permitem obter a seguinte tabela verdade para x :

p	q	x
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	F

A proposição que gera esta tabela é $\neg p \wedge q$. Portanto, concluímos que $x = \neg p \wedge q$.
Portanto, a proposição que Gabriel estava estudando era

$$(((q \vee r) \to (p \wedge \neg r)) \leftrightarrow (\neg(r \wedge q \wedge (r \to \neg p)) \wedge (\neg p \wedge q) \vee r)) \wedge (r \to \neg(p \wedge (\neg q \vee r)))$$

(10) Reescreva cada afirmação a seguir em linguagem natural, sem usar notação simbólica, e determine seu valor verdade:

(a) $\forall x \in \mathbb{R}, x < x^2$.

(b) $\exists x \in \mathbb{R}, x^3 = x$

(c) $\exists! x \in \mathbb{R}\colon x^3 = x$

(d) $\forall x \in \mathbb{R}, x^4 = x^3$

(e) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{R}\colon x < y$

(f) $\forall x, y \in \mathbb{Z}, a < b \Rightarrow \exists z \in \mathbb{Z} : a < c < b$

Solução

(a) Para todo x número real, x é menor do que x^2.
O valor lógico dessa proposição é falso (F), pois existe um $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq x^2$, por exemplo $x = \frac{1}{2}$, já que $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{4} \Rightarrow x \geq x^2$.

(b) Existe um número real x tal que $x^3 = x$.
O valor lógico dessa proposição é verdadeiro (V), pois existe um $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^3 = x$, por exemplo $x = 0$.

(c) Existe um único número real x tal que $x^3 = x$.
O valor lógico dessa proposição é falso (F), pois existe mais que um $x \in \mathbb{R}$ tal que $x = x^3$, por exemplo $x = 0$ e $x = 1$.

(d) Para todo x número real, x^4 é igual a x^3.
O valor lógico dessa proposição é falso (F), pois existe um $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^4 \neq x^3$, por exemplo $x = 2$.

(e) Para todo número natural x existe um número real y tal que x é menor do que y.
O valor lógico dessa proposição é verdadeiro (V), pois para cada $x \in \mathbb{N}$, podemos considerar $y = x + 1$, e de fato teremos $x < x + 1 = y$.

(f) $\forall x, y \in \mathbb{Z}, x < y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{Z} : x < z < y$ Para todos inteiros x e y, se x é menor do que y então existe z número inteiro tal que x é menor do que z que é menor do que y.
O valor lógico dessa proposição é falso (F), pois para x e y inteiros consecutivos, digamos $x = 2$ e $y = 3$, não existe um z, inteiro tal que $2 < z < 3$.

(11) Considere a seguinte afirmação:

Para todo gato no sofá existe uma pulga no carpete que o mordeu se ele for um gato preto.

(a) Escreva em linguagem simbólica a proposição corresponde a esta afirmação.

(b) Apresente a negação da proposição deduzida no item anterior em linguagem simbólica e em linguagem natural.

(c) A afirmação será verdadeira se:

- (α) não há um gato preto no sofá?
- (β) uma pulga morder todos os gatos?
- (γ) houver um gato preto que não foi mordido?

Solução

(a) Em linguagem simbólica, essa afirmação corresponde à proposição:

$$\forall x \in A, \exists y \in B \colon P(x) \to Q(x,y),$$

onde

- A é o conjunto de todos os gatos no sofá;
- B é o conjunto de todas as pulgas no carpete;
- $P(x)$ é a proposição "*x é um gato preto*";
- $Q(x,y)$ é a proposição "*a pulga y mordeu o gato x*".

(b) A negação da proposição pode ser obtida utilizando as propriedades de negação dos quantificadores universal e existencial, a equivalência $p \to q \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$ e as Leis de De Morgan, como segue:

$$\begin{aligned}
& \neg[\forall x \in A, \exists y \in B \colon P(x) \to Q(x,y)] \\
\Leftrightarrow \quad & \exists x \in A : \neg[\exists y \in B \colon P(x) \to Q(x,y)] \\
\Leftrightarrow \quad & \exists x \in A \colon \forall y \in B, \neg[P(x) \to Q(x,y)] \\
\Leftrightarrow \quad & \exists x \in A \colon \forall y \in B, \neg[\neg P(x) \vee Q(x,y)] \\
\Leftrightarrow \quad & \exists x \in A \colon \forall y \in B, P(x) \wedge \neg Q(x,y)
\end{aligned}$$

Em palavras, temos a afirmação "Existe um gato no sofá tal que, para toda pulga no carpete, o gato é preto e a pulga não o mordeu". De forma mais breve, "Existe um gato preto no sofá que não foi mordido por pulgas".

(c)

- (α) A proposição é verdadeira pois, para ela ser falsa, deve haver um gato preto que não foi mordido por pulgas.
- (β) Sim, pois $Q(x, y)$ será verdadeira para todo gato x.
- (γ) Não, pois a negação será verdadeira.

(12) Apresente um exemplo para cada uma das seguintes proposições e determine sua veracidade.

(a) $\exists x \in A : [P(x) \wedge Q(x)]$

(b) $[\exists x \in A : P(x)] \wedge [\exists x \in A : Q(x)]$

As duas proposições são equivalentes? Justifique sua resposta.

Solução

Sejam $A = \mathbb{N}$, e defina

$$P(x) := x \text{ é um número quadrado perfeito}$$

$$Q(x) := x \text{ é um número primo}$$

Para o item (a), observe que o valor lógico da proposição será falso (F), pois não existe nenhum número natural que é simultaneamente quadrado perfeito e primo. Agora, no item (b), o valor lógico da proposição será verdadeiro (V), pois existem números naturais que são quadrados perfeitos e existem números naturais que são primos.
Dessa análise, consluímos que as proposições não são equivalentes, e isso se deve à precedência dos quantificadores em relação aos demais conectivos lógicos.