PEF EPUSP – PEF 5710 – Otimização Estrutural – 1ª Prova – 27/04/2023

GABARITO Questão 2 (valor 4,0): Condições KKT

A treliça plana hiperestática de 3 barras, simétrica, da Figura 3 abaixo, foi desenhada em sua posição inicial descarregada. No nó D são aplicadas uma carga horizontal H e uma carga vertical V. O módulo de elasticidade é E; a tensão admissível é $\bar{\sigma}$; a área das seções transversais das barras inclinadas é A_1 e a da barra vertical é A_2. Desprezar peso próprio.

Os deslocamentos horizontal e vertical do nó D, considerados pequenos o suficiente para não alterar significativamente a inclinação das barras, são:

$u = \frac{\sqrt{2}\,HL}{A_1 E}$; $\qquad v = \frac{\sqrt{2}VL}{(A_1+\sqrt{2}A_2)E}$

Formular e resolver o problema de minimização do volume de material utilizado pelas condições.

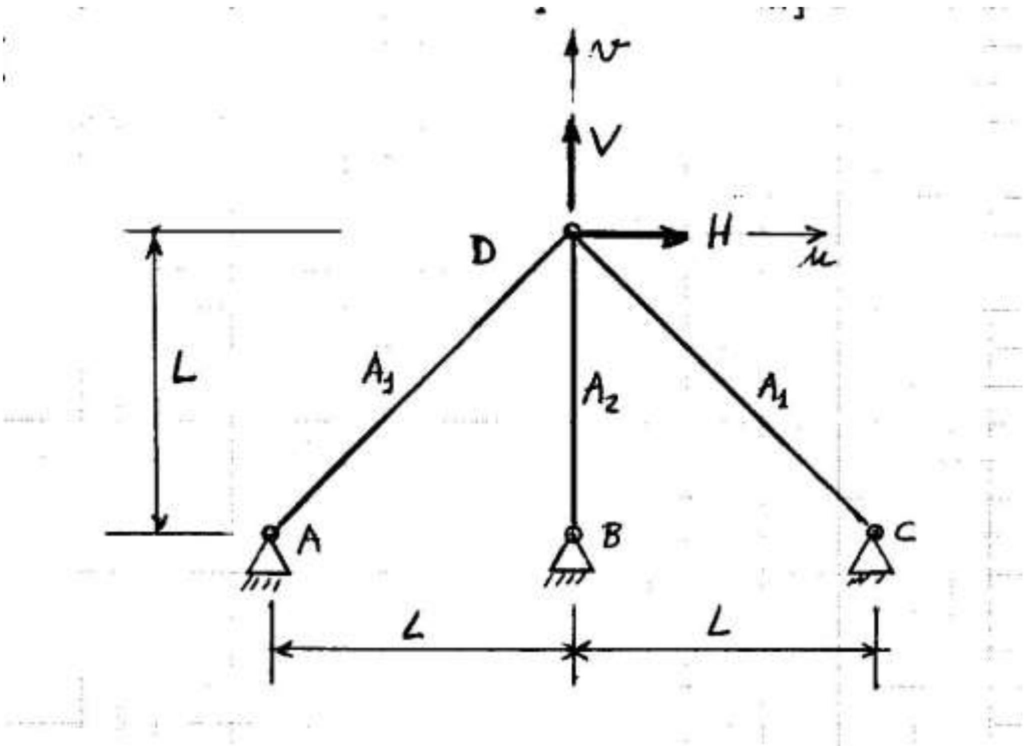

Figura 3

Dados: $L = 2$ m; $V = 80$ KN; $H = 60$ KN; $\bar{\sigma} = 100$ MPa

1. Variáveis de projeto

$x_1 = A_1$, área da seção transversal das barras inclinadas

$x_1 = A_2$, área da seção transversal da barra vertical

2. Cálculos adicionais

2.1 Mudança de comprimento

Mudança de comprimento das barras $\Delta L_i = u \cos \alpha + v \text{ sen } \propto$, em que α é a inclinação da barra em relação à horizontal.

Barra inclinada mais solicitada: $\Delta L_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(u+v)$

Barra vertical: $\Delta L_2 = v$

2.2 Forças Normais

Forças normais nas barras $N_i = \frac{EA_i}{L_i}\Delta L_i$

Barra inclinada mais solicitada: $N_1 = \frac{EA_1}{2L}(u+v)$

Barra vertical: $N_2 = \frac{EA_2}{L}v$

2.3 Tensão normal

Forças normais nas barras $\sigma_i = \frac{N_i}{A_i}$

Barra inclinada mais solicitada: $\sigma_1 = \frac{E}{L}(u+v) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{H}{A_1} + \frac{V}{(A_1+\sqrt{2}A_2)}\right)$

Barra vertical: $\sigma_2 = \frac{E}{L}v = \frac{\sqrt{2}V}{(A_1+\sqrt{2}A_2)}$

Nota: a barra da direita poderá ser comprimida, mas com tensão normal bem menor, em módulo, que a da barra da esquerda de mesma seção.

3. Função objetivo, o volume total da estrutura

$f = L\left(2\sqrt{2}x_1 + x_2\right)$

4. Restrições

4.1 Tensão admissível $\sigma_i \leq \bar{\sigma}$

$\sigma_1 \leq \bar{\sigma}, \quad \sigma_2 \leq \bar{\sigma}$

4.2 Áreas positivas ou nulas $A \geq 0$

$A_1 \geq 0, \quad A_2 \geq 0$

4.3 Equações de restrição, incluindo variáveis de folga

$g_1 = \sigma_1 - \bar{\sigma} + s_1^2 = 0$ Considerando apenas a barra mais solicitada de seção A_1

$g_2 = \sigma_2 - \bar{\sigma} + s_2^2 = 0$

$g_3 = -x_1 + s_3^2 = 0$

$g_4 = -x_2 + s_4^2 = 0$

5. Condições KKT

5.1. Lagrangiano

$\mathcal{L} = f + \sum_{i=1}^{4} u_i g_i =$

$= L\left(2\sqrt{2}x_1 + x_2\right) + u_1(\sigma_1 - \bar{\sigma} + s_1^2) + u_2(\sigma_2 - \bar{\sigma} + s_2^2) + u_3(-x_1 + s_3^2) +$
$+u_4(-x_2 + s_4^2)$

5.2. Condições Gradientes

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{4} u_j^* \frac{\partial g_j}{\partial x_k} = 0\,; \quad k = 1,4$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 = 2\sqrt{2}L - \frac{u_1}{\sqrt{2}}\left(\frac{H}{x_1^2} + \frac{V}{\left(x_1+\sqrt{2}x_2\right)^2}\right) - u_2\left(\frac{V}{\left(x_1+\sqrt{2}x_2\right)^2}\right) - u_3$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 = L - u_1\left(\frac{\sqrt{2}V}{\left(x_1+\sqrt{2}x_2\right)^2}\right) - u_2\left(\frac{2V}{\left(x_1+\sqrt{2}x_2\right)^2}\right) - u_4$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_j} = 0 \rightarrow \left(g_j(\mathbf{x}^*) + s_j^2\right) = 0; \quad j = 1 \text{ a } 4$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_1} = 0 = \sigma_1 - \bar{\sigma} + s_1^2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_2} = 0 = \sigma_2 - \bar{\sigma} + s_2^2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_3} = 0 = -x_1 + s_3^2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_4} = 0 = -x_2 + s_4^2$$

5.3. Condições de chaveamento

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s_j} = 0 \rightarrow u_j^* s_j = 0\,; \quad j = 1 \text{ a } 4$$

A condição de $s_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 0, u_4 = 0,$ demais parâmetros não-nulos, leva a $\sigma_1 = \bar{\sigma}$ na barra inclinada da esquerda.

6. Respostas

$A_1 = \sqrt{2}/2$ x10^{-3} m² $\quad$ $A_2 =$ 5x10^{-4} m² $\quad$ $f(\mathbf{x}^*) =$ 5x10^{-3} m³