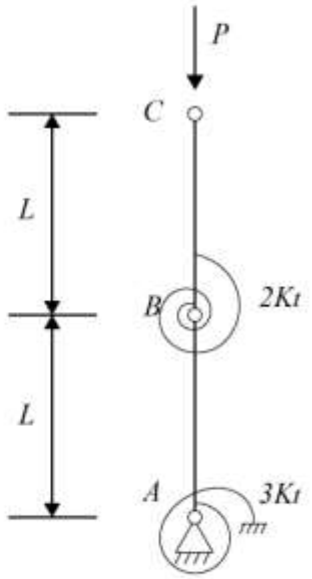
PEF EPUSP – PEF 5710 – Otimização Estrutural – 1ª Prova – 27/04/2023

GABARITO

Questão 3 (valor 3,0): programação não linear sem restrições, multidimensional

Considere o modelo discreto de um pilar em balanço da Fig. 4, composto de 2 barras rígidas sem massa, articuladas, ligadas entre si por molas rotacionais, sob carregamento apena de uma carga vertical P de compressão. Até um valor crítico dessa carga, a configuração primária vertical da Fig. 4 é estável quando perturbada lateralmente. Ao atingir esse valor, ela se torna instável, e a configuração secundária perturbada da Fig. 5 passa a ser estável para o mínimo da Energia Potencial Total $V = U - W$ dessa configuração, em que U é a energia de deformação e W o trabalho das forças externas conservativas.



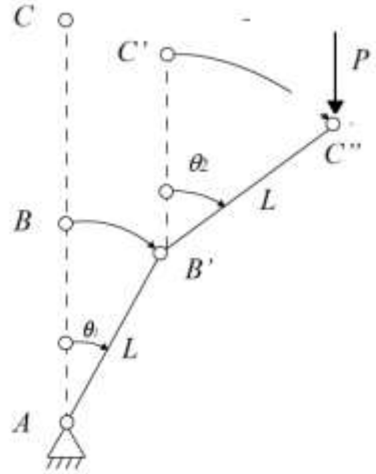


Figura 4 Figura 5

Pede-se minimizar a EPT manualmente e determinar a primeira carga crítica e a correspondente configuração secundária de equilíbrio, partindo da configuração primária. Utilizar a aproximação $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$. Dados: L = 2 m; K_t = 10 KNm/rad

Admite-se a existência da configuração alternativa mostrada na Figura 5. As variáveis de projeto adotadas são os ângulos θ_1 de rotação da barra rígida AB e θ_2 de rotação da barra rígida BC, ambos com relação à vertical.
A energia de deformação é dada por.

$$U = \frac{1}{2} K_t [3\theta_1^2 + 2(\theta_2 - \theta_1)^2]$$

A carga P se desloca na vertical $L(2 - \cos\theta_1 - \cos\theta_2)$, executando o trabalho

$$W = PL(2 - \cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

compondo a energia potencial total $V = U - W$. Admitindo-se pequenos ângulos, vale a aproximação $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$, de forma que

$$V = \frac{1}{2}K_t[3\theta_1^2 + 2(\theta_2 - \theta_1)^2] - PL\left(\frac{\theta_1^2}{2} + \frac{\theta_2^2}{2}\right)$$

Calculando e zerando o vetor gradiente de *V*:

$$\mathbf{c} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial \theta_1} \\ \dfrac{\partial V}{\partial \theta_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_t(5\theta_1 - 2\theta_2) - PL\theta_1 \\ K_t(2\theta_2 - 2\theta_1) - PL\theta_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{0}$$

que posto na forma matricial é

$$\left(K_t\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} - PL\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Um sistema de equações algébricas lineares homogêneo, que para ter soluções não triviais, como se quer, deve ter

$$\det\left(K_t\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} - PL\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

uma equação polinomial de grau 2:

$$P^2 - 7\frac{K_t}{L}P + 6\left(\frac{K_t}{L}\right)^2 = 0$$

cujas duas raízes são os dois valores candidatos a cargas críticas:

$$P_1 = \frac{K_t}{L} \qquad\qquad P_2 = \frac{6K_t}{L}$$

Com os valores numéricos dados, a primeira (menor) carga crítica é $P_1 = \frac{K_t}{L}$ =5KN
Para checar se é um ponto de mínimo é preciso calcular a matriz Hessiana:

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \vec{\nabla}\vec{\nabla}^T f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 V}{\partial\theta_1\partial\theta_1} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial\theta_1\partial\theta_2} \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial\theta_2\partial\theta_1} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial\theta_2\partial\theta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5K_t - PL & -2K_t \\ -2K_t & 2K_t - PL \end{bmatrix}$$

Que é positivo semi definida, para a primeira carga crítica, como desejado.

Cada uma dessas cargas substituídas no sistema homogêneo fornece dois autovetores a elas associados, que são os assim chamados modos de flambagem, as formas (adimensionais) que a estrutura assume para esses dois valores de cargas críticas. Para a menor carga crítica, tem-se que $\theta_2 = 2\theta_1$

Alternativa numérica, mais indicada quando se tem mais graus de liberdade:

Fazendo $d = \det\left(K_t \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} - PL \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = P^2 - 7\frac{K_t}{L}P + 6\left(\frac{K_t}{L}\right)^2$

Minimizar $f = d^2$, função da variável de projeto P, lembrando que o mínimo de d^2 é 0.