# LIMITES – PARTE 1

RICARDO BIANCONI

## Sumário



## 1. Introdução

Um dos conceitos centrais do Cálculo é o de limite. Está presente desde a Antiguidade, e viu sua formalização no Século XIX. Começamos com uma motivação.

1.1. **Equação de uma reta no plano.** Começamos com um *sistema de coordenadas* no plano, que é um par de retas perpendiculares, chamadas de $x$ e $y$ (ou de *eixo* $x$, e *eixo* $y$), e atribuímos números reais aos pontos de $x$ e de $y$, de modo que o ponto $O$ de encontro dessas retas (a *origem*) sejam atribuídos o valor zero em $x$ e em $y$. Cada ponto $P$ do plano pode ser representado pelo

*Date*: 2023.

par ordenado de números reais $(a, b)$, onde $a$ fica no pé da perpendicular de $P$ a $x$, e $b$ no pé da perpendicular de $P$ a $y$.

A equação de uma reta não paralela ao eixo $y$ (retas verticais) é da forma $y = ax + b$ (isso define o gráfico da função $f(x) = ax + b$).

**Exemplo 1.** Obtemos a equação da reta contendo os pontos $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$, com $x_0 \neq x_1$, substituindo as coordenadas de $P_0$ e $P_1$ na equação $y = ax + b$ e determinamos os coeficientes $a$ e $b$, resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} ax_0 + b = y_0 \\ ax_1 + b = y_1 \end{cases}$$

$$a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}; \quad b = y_0 - ax_0 = \frac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0}$$

1.2. **Reta tangente a uma curva.** Como motivação para o conceito de limite, tratamos do problema de determinar a reta tangente a uma curva. Desde a antiguidade, retas tangentes a curvas eram consideradas como retas passando por dois pontos *infinitamente próximos*.

As curvas que consideramos são gráficos de funções e as retas são não verticais. Vejamos um exemplo.

**Exemplo 2.** Dada a função $f(x) = x^2$, determinemos a equação da reta tangente ao seu gráfico no ponto $(x_0, y_0) = (1, 1)$. A ideia é tomar retas contendo dois pontos da parábola, um deles $P_0 = (1, 1)$, que fica fixo, e outro $P_t = (1 + t, (1 + t)^2)$ (com $t \neq 0$), que varia com o parâmetro $t$. Esse parâmetro pode ser positivo ou negativo.

Primeiramente obtemos o coeficiente angular

$$a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{(1 + t)^2 - 1^2}{(1 + t) - 1} = \frac{2t + t^2}{t} = 2 + t$$

Fazemos $t$ aproximar-se de zero e vemos que $a$ aproxima-se de 2.

Daí, obtemos o coeficiente $b = -1$, e a equação da reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $x_0 = 1$ (e $y_0 = 1$) é $y = 2x - 1$.

A parábola tem a propriedade de que cada reta tangente a ela tem um único ponto em comum com a curva. Neste caso, podemos confirmar isso igualando as equações da parábola e da reta tangente, $x^2 = 2x - 1$, ou $(x - 1)^2 = 0$, que tem uma única solução, $x = 1$.

## 2. Limites e suas propriedades

A ideia de limite de $f(x)$ quando $x$ tende a um valor $a$ é simples. Fazemos $x$ aproximar de $a$ e verificamos se os valores de $f(x)$ tende a algum valor $L \in \mathbb{R}$.

Formalmente, impomos arbitrariamente uma restrição de distância de $f(x)$ a $L$, $|f(x)-L|$ e verificamos se existe alguma restrição na distância de $x$ a $a$, $|x-a|$, de modo que com esses valores de $x$, $|f(x)-L|$ satisfaça a restrição que lhe foi imposta. Uma primeira imposição é que a distância de $a$ ao domínio de $f(x)$ seja zero, para fazer sentido a aproximação. Outra coisa a ser imposta é que somente interessam os valores de $f(x)$ para $x$ próximos de $a$, mas com $x \neq a$ (queremos ver uma *tendência*, e não o valor $f(a0$, no caso em que $a \in \operatorname{Dom}(f)$.

Dizer que $L$ é o limite de $f(x)$, quando $x$ tende a $a$, "$\lim_{x\to a} f(x) = L$", significa que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que para todo $x \in \operatorname{Dom}(f)$, se $0 < |x-a| < \delta$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Essa definição não é útil para calcularmos os limites, mas tem utilidade para mostrar que $L$ não é o limite, ou que não existe o limite. Veremos alguns exemplos mais adiante.

**Proposição 1.** Sejam $f$ e $g$ duas funções, tais que existam os limites $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$, e seja $c \in \mathbb{R}$. Então valem as propriedades

(1) $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = L_1 + L_2$;
(2) $\lim_{x\to a}(cf)(x) = cL_1$;
(3) $\lim_{x\to a}(fg)(x) = L_1L_2$;
(4) se $L_2 \neq 0$, $\lim_{x\to a}(f/g)(x) = L_1/L_2$.

**Exemplo 3.** Se $n \in \mathbb{Z}$, $\lim_{x\to a} x^n = a^n$ (com $a \neq 0$, se $n < 0$). Isso decorre de $\lim_{x\to a} x = a$ (isso é trivial: se $x$ tende a $a$, então $x$ tende a $a$). As outras potências de $x$ decorrem das propriedades (3) e (4).

**Exemplo 4.** Seja $f(x) = x/|x|$ $(x \neq 0)$, ou seja, $f(x) = -1$ se $x < 0$, e $f(x) = 1$, se $x > 0$. Vemos que não existe o limite $\lim_{x\to 0} f(x)$, pois de um lado de $x = 0$ $f(x)$ assume o valor $-1$ e do outro o valor $1$, que são desitantes de um mesmo número.

2.1. **Composição de funções:** Dadas duas funções $f : \operatorname{Dom}(f) \to \mathbb{R}$ e $g : \operatorname{Dom}(g) \to \mathbb{R}$, podemos compor as funções, substituindo a variável duma delas pela expressão da outra, digamos $f(g(x))$, também denotada por $(f \circ g)(x)$. Seu domínio é $\operatorname{Dom}(f \circ g) = \{x \in \operatorname{Dom}(g) : g(x) \in \operatorname{Dom}(f)\}$.

A propriedade importante aqui é que se $\lim_{x\to x_0} g(x) = a$ e $\lim_{x\to a} f(x) = L$, então $\lim_{x\to x_0} (f \circ g)(x) = L$.

Na prática, isso serve para simplificar limites, fazendo mudança de variáveis. Veremos aplicações em exemplos mais adiante.

2.2. **O Teorema do Confronto.** Para calcular algum limite que não possa ser feito diretamente, podemos comparar a função desejada com funções mais simples, que saibamos calcular o limite.

**Proposição 2.** Sejam $f, g, h : U \to \mathbb{R}$ três funções, tais que existam os limites $\lim_{x\to a} f(x) = L = \lim_{x\to a} g(x)$ e $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, $x \in U$ $(x \neq a)$. Então existe o limite $\lim_{x\to a} h(x) = L$.

Ou seja, os valores de $h(x)$ ficam "espremidos" entre os de $f(x)$ e $g(x)$, forçando $h(x)$ ficar próximo do limite $L$, se $x$ tender a $a$.

**Exemplo 5.** Seja $h(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$, $x \neq 0$. A função $\operatorname{sen}(1/x)$ oscila indefinidamente de -1 a 1 perto de $x = 0$ e, daí, não existe $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(1/x)$. Daí, não podemos aplicar diretamente a propriedade do limite de um produto para calcular $\lim_{x\to 0} h(x)$.

Entretanto, como $|\operatorname{sen}(1/x)| \leq 1$, temos que $|x \operatorname{sen}(1/x)| \leq |x|$, ou, abrindo os módulos,

$$-|x| \leq x \operatorname{sen}(1/x) \leq |x|.$$

Com isso, temos que $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}(1/x) = 0$, pois $\lim_{x\to 0}(-|x|) = 0 = \lim_{x\to 0} |x|$.

2.3. **O Limite Fundamental Trigonométrico $\boldsymbol{\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1}$.** Um limite importante que pode ser obtido com o uso do Teorema do confronto é

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

**Observação 1.** Precisamos primeiramente mostrar que $\lim_{t\to 0} \cos t = 1$. Vamos transformar esse problema em um de equações de segundo grau.

Sabemos que $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$. Daí, temos que se $0 < \theta < \pi/2$, $\cos\theta = \sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2 + 2\cos\theta}$.

Começamos com $2\theta_0 = \pi/4$, com $x_0 = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ e formamos a sequência de números $x_{n+1} = \cos(\pi/2^{n+2}) = \dfrac{1}{2}\sqrt{2 + 2x_n} \leq 1$. Alguns elementos dessa sequência são (observe o padrão):

$$x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2};\ x_1 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2};\ x_2 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2};\ldots$$

Suponhamos que essa sequência convirja para um limite $0 \leq \bar{x} \leq 1$. Daí, temos a equação $2\bar{x} = \sqrt{2 + 2\bar{x}}$, ou, elevando os dois lados ao quadrado, $4\bar{x}^2 =$

$2+2\bar{x}$, ou $4\bar{x}^2-2\bar{x}-2=0$, cujas raízes são $x_1=1$ e $x_2=-1/2$. Como $0\leq\bar{x}\leq 1$, descartamos a raiz negativa e ficamos com $\bar{x}=1$.

Agora falta justificar que a sequência $x_n$ tende a um limite, quando $n$ " tende ao infinito". Observe que $0<x_0=\sqrt{2}/2<1$ e que cada $x_n\leq 1$ (pois são valores de cossenos). Também vale a desigualdade $x_n<(1+x_n)/2<1$ (pois $(1+x_n)/2$ é a média aritmética de 1 e $x_n<1$, que é um número entre $x_n$ e 1). Assim, a sequência $x_n$ é crescente e $x_n<1$, o que implica que ela tende a um número real $\bar{x}\leq 1$.

Isso implica que $\lim_{t\to 0}\cos t=1$.

**Proposição 3** (Limite Fundamental Trigonométrico)**.** Existe o limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

*Demonstração.* Consideremos as seguintes figuras geométricas: um triângulo retângulo $\triangle OAB$ com ângulo reto em $A$ e hipotenusa $\overline{OB}$ medindo 1, contido no setor circular $OCB$ de abertura $x$ (medida em radianos), que também é a medida do ângulo em $O$ do triângulo $\triangle OAB$, e o triângulo retângulo $\triangle OCD$, com ângulo reto em $C$, e ângulo em $O$ medindo $x$. Podemos escolher as coordenadas dos pontos $O=(0,0)$, $A=(\cos x,0)$, $B=(\cos x,\operatorname{sen} x)$, $C=(1,0)$ e $D=(1,\operatorname{tg} x)$. Com isso, temos que se $x\neq 0$ e $|x|<\frac{\pi}{2}$,

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Área}(\triangle OAB) & \leq & \text{Área}(\text{setor } OCB) & \leq & \text{Área}(\triangle OCD) & & \\ \| & & \| & & \| & & \\ \dfrac{|\operatorname{sen} x|\cos x}{2} & \leq & \dfrac{|x|}{2} & \leq & \dfrac{|\operatorname{tg} x|}{2} & = & \dfrac{|\operatorname{sen} x|}{2\cos x} \end{array}$$

Da desigualdade $\frac{|\operatorname{sen} x|\cos x}{2}\leq\frac{|x|}{2}$, obtemos $\frac{|\operatorname{sen} x|}{|x|}\leq\frac{1}{\cos x}$, e da desigualdade $\frac{|x|}{2}\leq\frac{|\operatorname{sen} x|}{2\cos x}$, obtemos $\cos x\leq\frac{|\operatorname{sen} x|}{|x|}$.

Observe que a função $f(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, $x\neq 0$, é positiva nos intervalos $-\frac{\pi}{2}<x<0$ e $0<x<\frac{\pi}{2}$. Assim, $\frac{|\operatorname{sen} x|}{|x|}=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$. Portanto, temos as desigualdades

$$\cos x\leq\frac{\operatorname{sen} x}{x}\leq\frac{1}{\cos x}$$

Como $\lim_{x\to 0}\cos x=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$, obtemos o **Limite Fundamental Trigonométrico** $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1}$. □

Vejamos alguns exemplos de como usá-lo.

**Exemplo 6.** Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$.

Como $\operatorname{sen}^2 x = 1-\cos^2 x = (1-\cos x)(1+\cos x)$, multiplicamos e dividimos por $(1+\cos x)$:

$$\frac{1-\cos x}{x} = \frac{(1-\cos x)}{x}\frac{(1+\cos x)}{(1+\cos x)} = \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1+\cos x)}$$

Agora, calculamos o limite desejado

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\right) =$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{=1} \times \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}}_{=0} = 0$$

**Importante!** Trocamos as letras e escrevemos o limite fundamental assim: $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$. Isso signfica que, se $t$ representar alguma expressão mais complexa, ela também tem que aparecer no denominador.

**Exemplo 7.** Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{x}$.

Isso é quase o limite fundamental, mas a expressão do denominador, "$x$", difere daquela dentro do seno, "$3x$". Substituímos $t = 3x$, ou $x = t/3$. Se $x \to 0$, então $t \to 0$ e podemos reescrever o limite como

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3x)}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{t/3} = \lim_{t\to 0} 3\frac{\operatorname{sen} t}{t} = 3.$$

**Observação 2.** Como $\operatorname{sen} x = x(\operatorname{sen} x/x)$, temos que $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sen} x = 0$.

## 3. Funções Contínuas

Vimos acima que $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$, ou seja, o valor do limite é igual ao valor da função no ponto $a$. Essas funções são chamadas de funções contínuas.

**Definição 1.** Uma função $f : \mathrm{Dom}(f) \to \mathbb{R}$ é contínua em $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Dizemos que $f$ é contínua (sem especificar o ponto $x_0$) se for contínua em todos os pontos de seu domínio.

**Observação 3.** Segue das propriedades de limites que soma, multiplicação, quociente e composição de funções contínuas são funções contínuas.

**Exemplo 8.** É imediato ver que as função constantes são contínuas. A função $f(x) = x$ também é trivialmente contínua ($\lim_{x\to a} x = a$). Portanto, todos os polinômios e funções racionais são contínuas.

**Exemplo 9.** As funções trigonométricas são contínuas. De fato, já vimos que $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0 = \operatorname{sen} 0$ e $\lim_{x\to 0} \cos x = 1 = \cos 0$. Usamos as fórmulas

$$\operatorname{sen}(x+t) = \operatorname{sen} x \cos t + \cos x \operatorname{sen} t, \text{ e } \cos(x+t) = \cos x \cos t - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} t,$$

e obtemos que

$$\lim_{t\to 0} \operatorname{sen}(x+t) = \operatorname{sen} x, \text{ e } \lim_{t\to 0} \cos(x+t) = \cos x.$$

Isso significa que as funções seno e cosseno são contínuas em cada $x \in \mathbb{R}$.

**Exemplo 10.** Do modo como foram definidas as potências de expoentes não inteiros (racionais e irracionais), as funções $x^a$ ($a \in \mathbb{R}$ fixo) são contínuas.

**Exemplo 11.** Pelo mesmo motivo, as funções exponenciais $a^x$ (com $a \in \mathbb{R}$ fixo, $a > 0$ e $a \neq 1$) são contínuas. Como $\log_a x$ é a função inversa de $a^x$ (pois $a^{\log_a x} = x$ e $\log_a(a^x) = x$), as funções logarítmicas são contínuas.

## 4. Limites laterais, infinitos e no infinito

Estudamos aqui extensões do conceito de limite. Começamos com os limites laterais, em que consderamos a tendênca da função quando $x$ tende ao número "$a$" pela direita (por números maiores que $a$), ou pela esquerda (por números menores que $a$).

**Definição 2** (Limites Laterais)**.** Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o *limite pela esquerda* (ou, respectivamente, *pela direita*) de $f$, quando $x$ tende a $a$, com a notação $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ (repectivamente, $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$) se dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que para todo $x \in \operatorname{Dom}(f)$, se $x < a$ (ou, respectivamente, $x > a$) e $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Na prática, essa definição é útil para mostrar que em certos casos não existe o limite lateral.

**Proposição 4.** O limite $\lim_{x\to a} f(x)$ existe se, e somente se, existem e são iguais os limites laterais $\lim_{x\to a^-} f(x)$ e $\lim_{x\to a^+} f(x)$, e neste caso,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x).$$

**Exemplo 12.** A função $f(x) = x/|x|$, $x \neq 0$, tende a 1 pela direita de zero, e a $-1$ pela esquerda de zero,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|} = 1; \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|} = -1.$$

Isso porque se $x > 0$, $|x| = x$, e se $x < 0$, $x = -y$, $y > 0$, e $|x| = y = -(-y) = -x$. Neste caso não existe o limite $\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$.

**Exemplo 13.** Usamos a mesma função $f(x) = x/|x|$, $x \neq 0$. Temos que

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x}{|x|} = 1 = \lim_{x\to 2} \frac{x}{|x|},$$
$$\lim_{x\to -3^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to -3^-} \frac{x}{|x|} = -1 = \lim_{x\to -3} \frac{x}{|x|},$$

Limites infinitos significam um crescimento ilimitado da função $f(x)$ quando $x$ tender a $a$.

**Definição 3** (Limites Infinitos)**.** Dizemos que $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ (ou, respectivamente, $-\infty$) se dado $M > 0$ , existe $\delta > 0$, tal que para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$, com $0 < |x - a| < \delta$, $f(x) > M$ (ou, respectivamente, $f(x) < -M$).

**Observação 4.** Definições para limites laterais infinitos são análogas.

**Exemplo 14.** Calculemos os limites laterais

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x^2-1}, \ \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x^2-1}, \ \lim_{x\to -1^+} \frac{x}{x^2-1}, \text{ e } \lim_{x\to -1^-} \frac{x}{x^2-1}.$$

O numerador em $x = \pm 1$ ńão nulo, mas o denominador se anula. Neste caso, os limites laterais podem ser $\pm\infty$. Como descobrir o sinal? Estudamos separadamente o sinal do numerador e do denominador, para depois juntar isso e determinar o sinal de $f(x)$. O numerador muda de sinal em $x = 0$ e o denominador em $x = -1$ e $x = 1$. Daí, temos que considerar os intervalos

| **Intervalo** | $\boldsymbol{x}$ | $\boldsymbol{x^2-1}$ | $\boldsymbol{x/(x^2-1)}$ |
|---|---|---|---|
| $x < -1$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| $-1 < x < 0$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $0 < x < 1$ | $+$ | $-$ | $-$ |
| $x > 1$ | $+$ | $+$ | $+$ |

Com isso, temos os limites laterais

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x}{x^2-1} = +\infty, \ \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{x}{x^2-1} = -\infty.$$

Agora a questão são os limites no infinito, quando $x$ cresce de modo ilimitado, ou decresce (negativo) indefinidamente.

**Definição 4** (Limites Numéricos no Infinito)**.** Dado $L \in \mathbb{R}$, definimos $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ (respectivamente, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$) se dado $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$, tal que para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$, se $x > M$ (respectivamente, se $x < -M$), $f(x) - L| < \varepsilon$.

**Definição 5** (Limites Infinitos no Infinito)**.** Definimos $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$ (respectivamente, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$) se dado $M > 0$, existe $N > 0$, tal que para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$, se $x > N$ (respectivamente, se $x < -N$), $f(x) > M$.

Definimos $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ (respectivamente, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$) se dado $M > 0$, existe $N > 0$, tal que para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$, se $x < -N$ (respectivamente, se $x < -N$), $f(x) < -M$.

**Exemplo 15** (Funções Racionais)**.** Limites no infinito de funções racionais (polinômios divididos por polinômios) dependem apenas dos termos de maior grau no numerador e no denominador. Tiramos em evicência o termo de maior grau do numerador e do denominador e cancelamos os termos comuns a ambos. Por exemplo,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x + 1}{2x^3 + x^2 + 4x - 6} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3(1 - x^{-2} + x^{-3})}{x^3(2 + x^{-1} + 4x^{-2} - 6x^{-3})} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1 - x^{-2} + x^{-3}}{2 + x^{-1} + 4x^{-2} - 6x^{-3}} = \frac{1}{2},$$

pois $x^{-1}$, $x^{-2}$ e $x^{-3}$ tendem a zero, se $x \to \infty$.

**Exemplo 16.** Calcular $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2+1}$. Tiramos em evidência os termos de maior grau e obtemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2(1 + x^{-2})} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x(1 + x^{-2})} = 0,$$

pois o numerador tende a 1, e o denominador tende ao infinito.

**Exemplo 17.** Calcular $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{x^2+1}$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{x^2+1}$. Tiramos em evidência os termos de maior grau e obtemos $\dfrac{x^3}{x^2+1} = \dfrac{x^3}{x^2(1+x^{-2})} = \dfrac{x}{1+x^{-2}}$. O denominador tende a 1, e o numerador a $+\infty$ (se $x \to +\infty$), ou a $-\infty$ (se $x \to -\infty$). Daí,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2+1} = +\infty; \ \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2+1} = -\infty$$

**Observação 5.** Esse procedimento de tirar em evidência os termos de maiores graus do numerador e do denominador facilitam o cálculo de limites no infinito de funções racionais. Resumindo, se $f(x) = p(x)/q(x)$, com $p(x)$ e $q(x)$ polinômios, então

(a) se $p$ e $q$ têm o mesmo grau, $p(x) = a_n x^n + \dots$, e $q(x) = b_n x^n + \dots$, com $a_n \neq 0$ e $b_n \neq 0$, então $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{a_n}{b_n}$;

(b) se o grau de $q$ (denominador) for maior do que o de $p$ (numerador), então $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$;

(c) se o grau de $p$ (numerador) for maior do que o de $q$ (denominador), então $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$, e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$, com o sinal ($+\infty$, ou $-\infty$) dependendo do sinal de $f(x)$ para $x$ muito grande.

**Exemplo 18** (Redução a Frações)**.** Calcular $\lim_{x\to+\infty}\left(x - \sqrt{x^2 - x + 2}\right)$. Como cada termo tende a $+\infty$, obtemos uma indeterminação do tipo "$\infty - \infty$". Para resolver esse problema, transformamos essa diferenç em uma fração

$$\left(x - \sqrt{x^2 - x + 2}\right) = \left(x - \sqrt{x^2 - x + 2}\right)\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - x + 2}}{x + \sqrt{x^2 - x + 2}}\right) =$$

$$= \frac{x^2 - (x^2 - x + 2)}{x + \sqrt{x^2 - x + 2}} = \frac{x - 2}{x + \sqrt{x^2 - x + 2}}$$

O termo de maior grau dentro da raiz é $x^2$ e, daí, se $x > 0$, $\sqrt{x^2 - x + 2} = x\sqrt{1 - x^{-1} + 2x^{-2}}$ e, para calcular o limite desejado, fazemos

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x - \sqrt{x^2 - x + 2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x - 2}{x + \sqrt{x^2 - x + 2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x(1 - 2x^{-1})}{x(1 + \sqrt{1 - x^{-1} + 2x^{-2}})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - 2x^{-1}}{1 + \sqrt{1 - x^{-1} + 2x^{-2}}} = \frac{1}{2}.$$

**Observação 6. Cuidado!** Não são indeterminações "$\infty + \infty = \infty$", "$(-\infty) - \infty = -\infty$", "$\infty \times \infty = \infty$", "$(-\infty) \times \infty = -\infty$", ou "$(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$".

**Exemplo 19.** Calcular $\lim_{x\to-\infty}\left(x - \sqrt{x^2 - x + 2}\right)$. Neste caso temos a situação "$-\infty - \infty = -\infty$", ou seja, não existe indeterminação aqui:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x - \sqrt{x^2 - x + 2}\right) = -\infty.$$

## Apêndice A. O Número $e$

Nesta seção vamos calcular um outro limite fundamental e mostrar algumas de suas aplicações. Se você não se interessar pelas demonstrações abaixo, apenas use esse limite, mas veja os exemplos abaixo.

**Proposição 5.** O limite abaixo existe e converge para o número de Euler "$e$".

$$e = \lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

**Observação 7.** Em termos computacionais, essa não é a melhor maneira de calcular aproximações do número $e$, mas aparece naturalmente no cálculo de derivadas de funções exponenciais.

*Demonstração.* Comecemos estudando a sequência

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \ n \geq 1.$$

A fórmula $(A+B)^n = A^n + nA^{n-1}B + \dots$, com $A = 1$ e $B = 1/n$, implica que

$$a_n = 1 + n\frac{1}{n} + \cdots = 2 + \cdots \geq 2.$$

A fórmula completa para $(A+B)^n$ é

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k}B^k = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}A^{n-k}B^k =$$

$$= A^n + \sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}A^{n-k}B^k,$$

e, com $A = 1$ e $B = 1/n$, $n \geq 1$, temos

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}\frac{1}{k!}$$

A fração $\dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}$ tem $k \geq 1$ termos no numerador, todos menores ou iguais a $n$. Portanto, $\dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \leq 1$ e, assim,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}\frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

Se $k \geq 2$, $\dfrac{1}{k!} \leq \dfrac{1}{2^{k-1}}$. Daí, se $n \geq 2$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1 - 2^{-(n+1)}}{1 - 1/2} = 3 - 2^{-n} \leq 3,$$

ou seja, a sequência $a_n$ é limitada,

$$2 \leq a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 3.$$

Agora, comparamos dois termos dessa sequência, $a_m$ e $a_n$, com $1 < m < n$. Se $k \leq m < n$, então

$$\binom{m}{k}\frac{1}{m^k} = \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{m^k}\frac{1}{k!} =$$

$$= 1\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\dots\left(1 - \frac{m-k+1}{m}\right)\frac{1}{k!} \leq$$

$$< 1\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{n-k+1}{n}\right)\frac{1}{k!} = \binom{n}{k}\frac{1}{k!}$$

Isso significa que $a_m < a_n$, ou seja, a sequência $a_n$ é crescente. Uma propriedade dos números reais é que sequências crescentes e limitadas têm limites. Assim existe $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, que chamamos de $e$. □

**Observação 8.** Pode-se demonstrar que a sequência $b_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$ também tende ao número $e$ (muito mais rápido). Mas isso precisa de mais teoria.

**Observação 9.** Podemos escrever também o limite

$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x,$$

com $x$ variando em $\mathbb{R}$, $x > 0$.

Vejamos algumas aplicações desse limite.

**Exemplo 20.** Se tomarmos $-n < 0$, temos que

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n} = \left[\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n}\right]^{-1} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)\right] = e$$

pois $(1+1/(n-1))^{n-1} \to e$, e $(1+1/(n-1)) \to 1$, se $n \to \infty$.

Ou seja, também vale o limite

$$e = \lim_{n\to-\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

**Exemplo 21.** Se $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, fazemos $x = at$, e temos o limite

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \lim_{t\to\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^{at} = \left[\lim_{t\to\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^a = e^a$$

O mesmo vale se $a < 0$, mas agora com $t \to -\infty$.

**Exemplo 22.** Fazemos a substituição $t = 1/n$. Se $n \to \infty$, então $t \to 0^+$ e, assim,

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{t\to 0^+} (1+t)^{1/t}$$

Como também vale

$$e = \lim_{n\to-\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{t\to 0^-} (1+t)^{1/t}$$

obtemos que $e = \lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{1/t}$.

**Exemplo 23.** Calculemos o limite $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\ln(x+t)-\ln x}{t}$, para $x > 0$ fixo. Com as propriedades do logaritmo (onde assumimos que a função $\ln x$ é contínua), temos

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(x+t)-\ln x}{t} = \lim_{t\to 0} \ln \left(1+\frac{t}{x}\right)^{1/t} = \ln \left[\lim_{t\to 0} \left(1+\frac{t}{x}\right)^{1/t}\right] = \ln\left(e^{1/x}\right) = \frac{1}{x}$$

Em particular, se $x = 1$,

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)-\ln 1}{t} = 1$$

### A.1. O Limite Fundamental Exponencial $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1}$.

**Exemplo 24** (Limite Fundamental Exponencial)**.** Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$.

Façamos a substituição $e^x - 1 = t$, ou $x = \ln(1+t)$. Daí, se $x \to 0$, então $t \to 0$. Como $\ln 1 = 0$, temos

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\ln(1+t)-\ln 1} = \left(\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)-\ln 1}{t}\right)^{-1} = 1,$$

pelo exemplo anterior.

**Exemplo 25.** Com o exemplo anterior, podemos calcular o limite, com $x \in \mathbb{R}$ constante:

$$\lim_{t \to 0} \frac{e^{x+t} - e^x}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{e^x e^t - e^x}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{e^x(e^t - 1)}{t} = e^x \lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = e^x.$$