

## PQI –3303 – Fenômenos de Transporte III

### Coeficiente Convectivo de Transporte de Massa – Camada Limite

- 1904 – Prandtl (1875-1953) apresenta o artigo “Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung” Proc. Third Internat. Math. Congress – Heidelberg – p. 484-491. *Escoamento de fluidos com cisalhamento pequeno.*

*“O processo físico na camada limite entre um fluido e um corpo sólido pode ser calculado de maneira suficientemente satisfatória, assumindo-se que o fluido adere às paredes, de modo que a velocidade seja nula – ou igual à velocidade do corpo. Se a viscosidade for muito baixa e a trajetória do fluido ao longo da parede não for muito extensa, a velocidade terá o mesmo valor que muito próximo da parede. **Numa fina camada de transição, a brusca variação de velocidade, apesar do pequeno coeficiente de viscosidade, produz efeitos notáveis**”.*

#### 1. Hipóteses

1. Laminar
2. Regime permanente
3. Escoamento incompressível
4. Escoamento bidimensional (x e y)
5. Fluido newtoniano- Navier Stokes
6. Ausência da força de campo
7. Reynolds alto!!

#### 2. Equacionamento

Naviers-Stokes:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \text{grad} \vec{v} = \rho \vec{g} - \text{grad} p + \mu \text{lap} \vec{v} \quad (1)$$

Continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \text{div} \rho \vec{v} \quad (2)$$

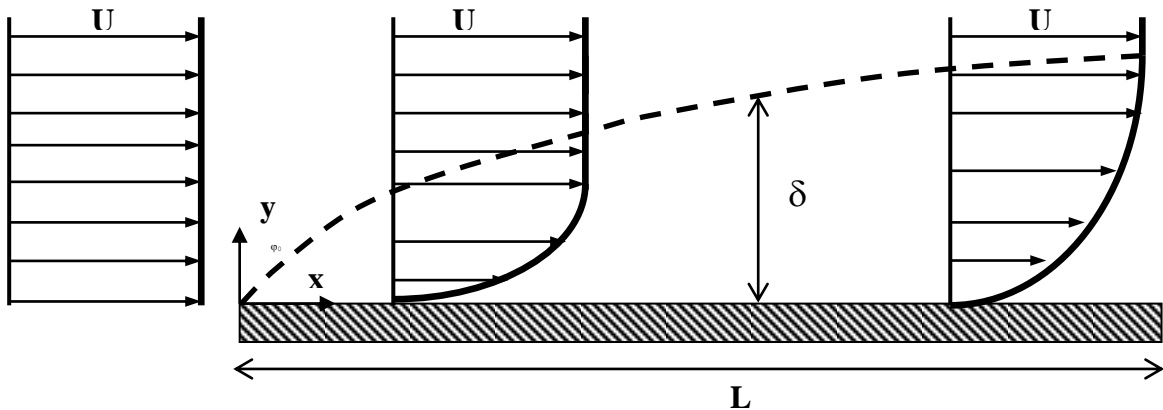
Regime permanente e escoamento incompressível:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

$$\text{div} \vec{v} = 0$$

$$\rho \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

$$\rho \left( v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \quad (5)$$



### 3. Camada Limite Laminar Hidrodinâmica

Devido à complexidade das equações, simplificações serão feitas com base na análise de ordem de grandeza dos termos das mesmas.

Considere as seguintes escalas de adimensionalização:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow L & , & & y &\rightarrow \delta \\ \mathbf{v}_x &\rightarrow U & , & & \mathbf{v}_y &\rightarrow V \end{aligned}$$

Adimensionalizando-se as variáveis:

$$\hat{v}_x = \frac{v_x}{U}$$

$$\hat{x} = \frac{x}{L}$$

$$\hat{y} = \frac{y}{\delta}$$

$$\hat{v}_y = \frac{v_y}{V}$$

Observa-se experimentalmente que:  $\delta \ll L$   
sendo  $\delta$  é a espessura da camada limite hidrodinâmica.

A partir da adimensionalização descrita acima, tem-se para a equação de continuidade (3):

$$\frac{U}{L} \frac{\partial \hat{v}_x}{\partial \hat{x}} + \frac{V}{\delta} \frac{\partial \hat{v}_y}{\partial \hat{y}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left( \frac{U\delta}{VL} \right) \frac{\partial \hat{v}_x}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{v}_y}{\partial \hat{y}} = 0$$

A escala  $V$  é definida de modo a satisfazer as seguintes condições do "scaling":

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{v}_x}{\partial \hat{x}} \sim 1 & \quad ; \quad \frac{\partial \hat{v}_y}{\partial \hat{y}} \sim 1 \\ \frac{U\delta}{VL} = 1 & \quad \Rightarrow \quad V = \frac{U\delta}{L} \end{aligned} \quad (6)$$

Logo:  $V \ll U$

Adimensionalização a equação de quantidade de movimento, na direção x, tem-se:

$$\frac{\rho U^2}{L} \left( \hat{v}_x \frac{\partial \hat{v}_x}{\partial \hat{x}} + \hat{v}_y \frac{\partial \hat{v}_x}{\partial \hat{y}} \right) = -\frac{P}{L} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} + \frac{\mu U}{\delta^2} \left[ \underbrace{\left( \frac{\delta}{L} \right)^2}_{\ll 1} \underbrace{\frac{\partial^2 \hat{v}_x}{\partial \hat{x}^2}}_{\sim 1} + \underbrace{\frac{\partial^2 \hat{v}_x}{\partial \hat{y}^2}}_{\sim 1} \right] \quad (7.a)$$

$$\left( \frac{\rho U \delta^2}{\mu L} \right) \left( \hat{v}_x \frac{\partial \hat{v}_x}{\partial \hat{x}} + \hat{v}_y \frac{\partial \hat{v}_x}{\partial \hat{y}} \right) = - \left( \frac{P \delta^2}{\mu U L} \right) \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial^2 \hat{v}_x}{\partial \hat{y}^2} \quad (7.b)$$

$$\text{Re} \left( \frac{\delta}{L} \right)^2 \left( \hat{v}_x \frac{\partial \hat{v}_x}{\partial \hat{x}} + \hat{v}_y \frac{\partial \hat{v}_x}{\partial \hat{y}} \right) = - \left( \frac{P \delta^2}{\mu U L} \right) \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial^2 \hat{v}_x}{\partial \hat{y}^2} \quad (7)$$

onde :  $\hat{p} = \frac{p}{P}$  e  $\text{Re} = \frac{\rho U L}{\mu}$

Analogamente, tem-se para a direção y:

$$\frac{\rho U^2}{L} \frac{\delta}{L} \left( \hat{v}_x \frac{\partial \hat{v}_y}{\partial \hat{x}} + \hat{v}_y \frac{\partial \hat{v}_y}{\partial \hat{y}} \right) = -\frac{P}{\delta} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}} + \frac{\mu V}{\delta^2} \left[ \left( \frac{\delta}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}_y}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}_y}{\partial \hat{y}^2} \right] \quad (8.a)$$

$$\frac{\rho U^2}{L} \frac{\delta}{L} \left( \hat{v}_x \frac{\partial \hat{v}_y}{\partial \hat{x}} + \hat{v}_y \frac{\partial \hat{v}_y}{\partial \hat{y}} \right) = -\frac{P}{\delta} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}} + \frac{\mu U}{\delta^2} \frac{\delta}{L} \left[ \left( \frac{\delta}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}_y}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}_y}{\partial \hat{y}^2} \right] \quad (8.b)$$

$$\frac{\delta^2}{L^2} \underbrace{\left( \hat{v}_x \frac{\partial \hat{v}_y}{\partial \hat{x}} + \hat{v}_y \frac{\partial \hat{v}_y}{\partial \hat{y}} \right)}_{\sim 1} = -\frac{P}{\rho U^2} \underbrace{\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}}}_{\ll 1} + \frac{1}{\text{Re}} \left[ \left( \frac{\delta}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}_y}{\partial \hat{x}^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 \hat{v}_y}{\partial \hat{y}^2}}_{\sim 1} \right] \quad (8)$$

Comparando-se as equações (8.a) e (7.a), observa-se que os termos da equação de quantidade de movimento na direção y (eq. 8.a) são desprezíveis em relação aos da direção x (eq. 7.a) - ordem de grandeza  $\delta/L$  me y e ordem de grandeza 1 em relação a x.

Como  $\partial p / \partial y \cong 0$ , a pressão praticamente independe de y na camada limite. Assim, a pressão na camada limite é praticamente igual à pressão  $p(x)$ , no escoamento livre.

#### 4. Solução exata da equação aproximada

Da análise anterior, o sistema de equações é simplificado para:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

$$p = p(x)$$

$$\rho \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = - \frac{dp}{dx} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \quad (9)$$

Na borda da camada limite a velocidade  $v_x$  é praticamente igual a  $U$ , assim, tem-se da equação (9):

$$\rho \left( U \frac{\partial U}{\partial x} + v_y \frac{\partial U}{\partial y} \right) = - \frac{dp}{dx} + \mu \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (10)$$

Como  $U$  é na direção  $x$  e não varia com  $y$ , o escoamento externo define a variação de pressão pela expressão que segue. Trata-se da equação de Euler (fluido ideal):

$$\rho U \frac{\partial U}{\partial x} = - \frac{dp}{dx} \quad (11)$$

Substituindo-se em (11) em (9), resulta:

$$\rho \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \rho U \frac{dU}{dx} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \quad (12)$$

As velocidades na borda da camada e fora da mesma são iguais e, no caso de placa plana, independentes de  $x$ , (11):

$$\rho U \frac{\partial U}{\partial x} = 0 = - \frac{dp}{dx}$$

Assim as equações "aproximadas" passam a ser expressas por:

$$\boxed{\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0} \quad (3)$$

$$\boxed{v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}} \quad (13)$$

Com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} \text{parede, } y = 0 & \rightarrow v_x = 0 \quad \text{e} \quad v_y = 0 \\ \text{borda, } y = \infty & \rightarrow v_x = U \end{aligned}$$

## 5. Solução de Blasius

Definindo-se:

$$\eta = y \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \quad (14)$$

$$f(\eta) = \frac{\Psi}{\sqrt{x \nu U}} \quad (15)$$

sendo  $v_x$  e  $v_y$  expressos a partir da função de corrente:

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad \text{e} \quad v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Substituindo-se nas equações (3) e (13), tem-se:

$$f(\eta) \frac{d^2 f(\eta)}{d\eta^2} + 2 \frac{d^3 f(\eta)}{d\eta^3} = 0 \quad (16)$$

onde:

$$v_x = U \frac{d f(\eta)}{d\eta} = f' U \quad (17)$$

$$v_y = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U}{x}} \left( \eta \frac{d f(\eta)}{d\eta} - f(\eta) \right) \quad (18)$$

Com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} \text{parede, } \eta = 0 &\rightarrow f = 0 \quad \text{e} \quad f' = 0 \\ \text{borda, } \eta = \infty &\rightarrow f' = 1 \end{aligned}$$

A solução da equação (16) é expressa forma de uma série infinita. A tabela e figuras anexas apresentam os valores calculados das funções  $f$ ,  $f'$  e  $f''$  e das velocidades  $v_x$  e  $v_y$  (Schlichting, 1979).

Pelo critério de 99%, para definição da espessura da camada limite, tem-se da tabela:

$$\frac{v_x}{U} = 0,99 = \frac{df}{d\eta} = 0,99 \Rightarrow \eta = 5 = \delta \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \quad (19)$$

$$\boxed{\delta = 5 \sqrt{\frac{\nu x}{U}} = \frac{5x}{\sqrt{Re_x}}} \quad \text{onde} \quad Re = \frac{Ux}{\nu} \quad (20)$$

## 6. Fator de atrito

Define-se o coeficiente de arraste (fator de atrito) na placa por:

$$C_D = \frac{\tau_{yx}}{\frac{1}{2} \rho U^2} = \frac{\mu}{\frac{1}{2} \rho U^2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial v_y}{\partial x}}_{\ll} \right)_{x,y=0} = \frac{\mu}{\frac{1}{2} \rho U^2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (21)$$

Substituindo-se o perfil de velocidade expresso por (17) na equação (21), resulta:

$$C_D = \frac{\mu}{\frac{1}{2}\rho U^2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\mu}{\frac{1}{2}\rho U^2} U \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \frac{d^2 f}{d\eta^2}(0) \quad (22)$$

Para  $y = 0$  ( $\eta=0$ )  $\Rightarrow f''(0) = 0,332$ , resultando para o coeficiente de arrasto:

$$C_D = 0,664 \sqrt{\frac{\nu}{U x}}$$

$$C_D = 0,664 \text{Re}^{-1/2} \quad (23)$$

A consideração de regime laminar é observada para  $\text{Re} < \text{Re}_c$  (Reynolds crítico), que é aproximadamente  $5 \cdot 10^5$ .

**Table 7.1. The function  $f(\eta)$  for the boundary layer along a flat plate at zero incidence, after L. Howarth [16]**

$\eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}$	$f$	$f' = \frac{u}{U_\infty}$	$f''$	$\eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}$	$f$	$f' = \frac{u}{U_\infty}$	$f''$
0	0	0	0-33206	5-2	3-48189	0-99425	0-01134
0-2	0-00664	0-06641	0-33199	5-4	3-68094	0-99616	0-00793
0-4	0-02656	0-13277	0-33147	5-6	3-88031	0-99748	0-00543
0-6	0-05974	0-19894	0-33008	5-8	4-07990	0-99838	0-00365
0-8	0-10611	0-26471	0-32739	6-0	4-27964	0-99898	0-00240
1-0	0-16557	0-32979	0-32301	6-2	4-47948	0-99937	0-00155
1-2	0-23795	0-39378	0-31659	6-4	4-67938	0-99961	0-00098
1-4	0-32298	0-45627	0-30787	6-6	4-87931	0-99977	0-00061
1-6	0-42032	0-51676	0-29667	6-8	5-07928	0-99987	0-00037
1-8	0-52952	0-57477	0-28293	7-0	5-27926	0-99992	0-00022
2-0	0-65003	0-62977	0-26675	7-2	5-47925	0-99996	0-00013
2-2	0-78120	0-68132	0-24835	7-4	5-67924	0-99998	0-00007
2-4	0-92230	0-72899	0-22809	7-6	5-87924	0-99999	0-00004
2-6	1-07252	0-77246	0-20646	7-8	6-07923	1-00000	0-00002
2-8	1-23099	0-81152	0-18401	8-0	6-27923	1-00000	0-00001
3-0	1-39682	0-84605	0-16136	8-2	6-47923	1-00000	0-00001
3-2	1-56911	0-87609	0-13913	8-4	6-67923	1-00000	0-00000
3-4	1-74696	0-90177	0-11788	8-6	6-87923	1-00000	0-00000
3-6	1-92954	0-92333	0-09809	8-8	7-07923	1-00000	0-00000
3-8	2-11605	0-94112	0-08013				
4-0	2-30576	0-95552	0-06424				
4-2	2-49806	0-96696	0-05052				
4-4	2-69238	0-97587	0-03897				
4-6	2-88826	0-98269	0-02948				
4-8	3-08534	0-98779	0-02187				
5-0	3-28329	0-99155	0-01591				

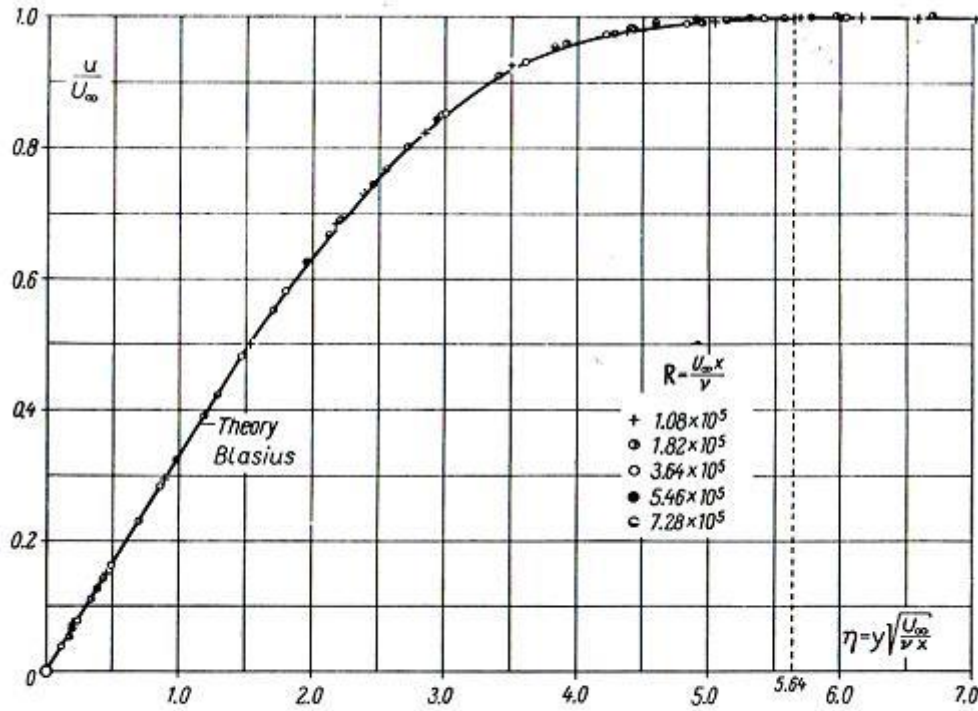


Fig. 7.9. Velocity distribution in the laminar boundary layer on a flat plate at zero incidence, as measured by Nikuradse [20]

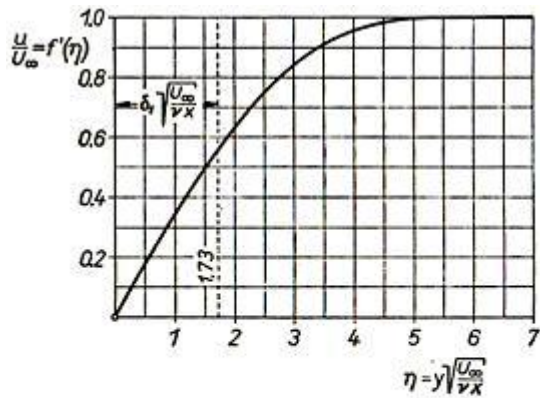


Fig. 7.7. Velocity distribution in the boundary layer along a flat plate, after Blasius [2]

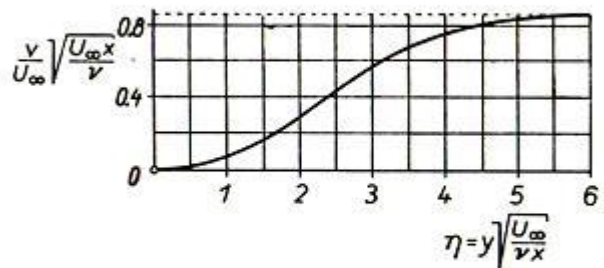


Fig. 7.8. The transverse velocity component in the boundary layer along a flat plate



Ludwig Prandtl

### 7. Camada Limite Laminar Térmica e/ou Mássica

Como visto na aula 1, o balanço microscópico de uma propriedade  $\varphi$  genérica é expresso por:

$$\rho \frac{D\varphi}{Dt} = \frac{\partial \rho \varphi}{\partial t} + \text{div } \rho \vec{v} \varphi = -\text{div } \vec{j}_\varphi + \dot{\sigma}_{v\varphi} \quad (24)$$

Rearranjando-se a equação acima e substituindo-se a equação da continuidade, tem-se:

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \text{grad} \varphi = -\text{div } \vec{j}_\varphi + \dot{\sigma}_{v\varphi} \quad (25)$$

Considerando-se regime permanente, ausência do termo de produção e equação para o fluxo difusivo expressa por:

$$\vec{j}_\varphi = -\rho \Gamma_\varphi \text{grad} \varphi \quad (26)$$

Nestas condições, a equação (25) passa a ser expressa por:

$$\vec{v} \cdot \text{grad} \varphi = -\Gamma_\varphi \text{lap} \varphi \quad (27)$$



Considere o caso na qual a propriedade  $\varphi$  (temperatura e/ou concentração) na parede é fixa ( $=\varphi_w$ ) e no fluido, longe da placa, a propriedade é, também, fixa ( $=\varphi_0$ ).

A equação acima sintetiza o problema conceitual da camada limite, que pode ser abordado como a "ponderação" entre o processo difusivo e o transporte devido ao escoamento.

No caso bidimensional tem-se da equação (27):

$$\left( v_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \Gamma_\varphi \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) \quad (28)$$

Observa-se, também, que:  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$

Assim, a equação de conservação de  $\varphi$  é simplificado para:

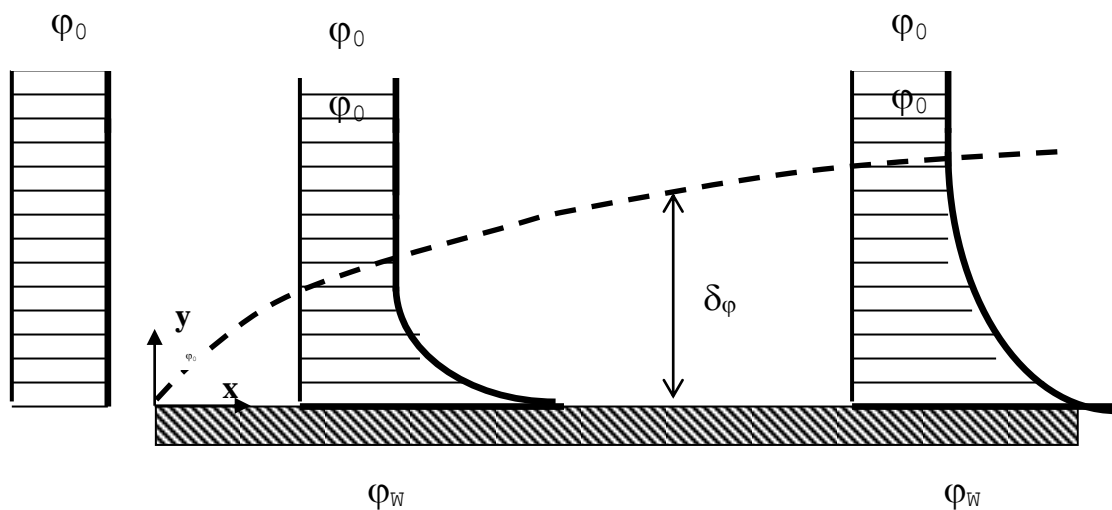
$$v_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \Gamma_\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \quad (29)$$

Portanto, o sistema de equações a ser considerado é dado pelas equações (3), (13) e (29):

$$\boxed{\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0} \quad (3)$$

$$\boxed{v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}} \quad (13)$$

$$\boxed{v_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \Gamma_\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}} \quad (29)$$



Camada Limite Laminar da propriedade  $\varphi$

A equação (29) pode ser reescrita como:

$$v_x \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y} = \Gamma_\phi \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial y^2} \tag{30}$$

onde o perfil de  $\phi$  adimensionalizado é:  $\hat{\phi} = \frac{\phi - \phi_w}{\phi_0 - \phi_w}$

Empregando-se a mudança de variável expressa pelas equações (14) e (15) e substituindo-se na equação (30), resulta:

$$\frac{d^2 \hat{\phi}}{d\eta^2} + \frac{v}{\Gamma_\phi} \frac{f(\eta)}{2} \frac{d\hat{\phi}}{d\eta} = 0 \tag{31}$$

Condições de contorno:

parede,  $y = 0 \rightarrow \phi = \phi_w, v_x = 0 \text{ e } v_y = 0$

borda,  $y = \infty \rightarrow \phi = \phi_0 \text{ e } v_x = U$

que podem ser expressas por:

parede,  $\eta = 0 \rightarrow \hat{\phi} = 0$

borda,  $\eta = \infty \rightarrow \hat{\phi} = 1$

A solução obtida por Schlichting para a equação (31) é expressa por (32), sendo  $f$  a função definida na equação (15), cuja solução é a de Blasius.

$$\hat{\phi} = \frac{\int_{\zeta=0}^{\zeta=\eta} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{v}{\Gamma_\phi} \int_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=\zeta} f(\varepsilon) d\varepsilon\right] d\zeta}{\int_{\zeta=0}^{\zeta=\infty} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{v}{\Gamma_\phi} \int_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=\zeta} f(\varepsilon) d\varepsilon\right] d\zeta} \tag{32}$$

A solução é válida para a camada limite laminar para a propriedade  $\phi$ .

No caso de transporte de calor, tem-se:  $\phi = CpT$  e  $\frac{v}{\Gamma} = \frac{v}{\alpha} = Pr$  ,

no caso de transporte de massa  $\phi = x_A$  e  $\frac{v}{\Gamma} = \frac{v}{D_{AB}} = Sc$  .

Onde,  $Sc$  é o número de Schmidt.

Da equação (32) é possível obter as seguintes relações, aproximadas, entre as espessuras das camadas limites hidrodinâmica  $\delta$ , térmica  $\delta_T$  e mássica  $\delta_c$  :

$$\boxed{Pr^{-1/3} \cong \frac{\delta_T}{\delta}} \tag{33}$$

$$\boxed{Sc^{-1/3} \cong \frac{\delta_{xA}}{\delta}} \tag{34}$$

### 8. Coeficientes convectivos de transferência de calor e de massa

Na parede, pela hipótese da aderência,  $\mathbf{v} = 0$ , conseqüentemente, o fluxo de transporte é essencialmente difusivo.

Da equação (32), para o intervalo  $0,6 \leq \frac{v}{\Gamma_\varphi} < 50$ , obtém-se:

$$\left. \frac{d\hat{\varphi}}{d\eta} \right|_{\eta=0} = 0,332 \left( \frac{v}{\Gamma_\varphi} \right)^{1/3} \quad (35)$$

O gradiente adimensionalizado de  $\varphi$  é dado por:

$$\text{gr\`ad} \hat{\varphi} \Big|_{\hat{y}=0} = \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \hat{y}} \Big|_{\hat{y}=0} = \frac{d\hat{\varphi}}{d\eta} \frac{d\eta}{d\hat{y}} \Big|_{\hat{y}=0} = x \frac{d\eta}{dy} \frac{d\hat{\varphi}}{d\eta} \Big|_{\hat{y}=0} = x \sqrt{\frac{U}{v x}} \frac{d\hat{\varphi}}{d\eta} \Big|_{\eta=0} = \sqrt{\frac{U x}{v}} \frac{d\hat{\varphi}}{d\eta} \Big|_{\eta=0}$$

Por outro lado, os coeficientes convectivos de transferência de calor e de massa são definidos na interface/parede. Por exemplo, na interface o fluxo de calor é dado por:

$$q'' = h(T_w - T_0) = q''_{\text{na parede}} \quad (36)$$

Na parede, pela hipótese da aderência,  $\mathbf{v} = 0$ , tem-se apenas condução de calor:

$$q''_{\text{na parede}} = -k \text{gr\`ad} T \Big|_{y=0} = -k \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (37)$$

Define-se  $h$ , a partir das equações (36) e (37), resultando:

$$h = \frac{-k(\partial T/\partial y)_{y=0}}{(T_w - T_0)} \quad (38)$$

Adimensionalizando-se:

$$h = - \frac{(T_0 - T_w) k (\partial \hat{T} / \partial \hat{y}_T)_{y=0}}{x (T_w - T_0)} = \frac{k}{x} (\partial \hat{T} / \partial \hat{y}_T)_{y=0} = \frac{k}{x} \text{Nu} \quad (39)$$

Assim, tem-se a definição do número de Nusselt local:

$$\boxed{\text{Nu} = \frac{h x}{k}} \quad (40)$$

No caso do transporte de massa, analogamente, tem-se para o coeficiente de transferência de massa,  $k_p$  :

$$n_A = k_p \rho (x_{Aw} - x_{A0}) = J_{A,y=0} \quad (41)$$

sendo:

$$\varphi = x_A \Rightarrow \hat{x}_A = \frac{x_A - x_{AW}}{x_{A0} - x_{AW}} \quad \hat{y}_M = \frac{y}{x}$$

Na parede tem-se apenas difusão, expressa por:

$$\vec{J}_A = -\rho D_{AB} \text{grad } x_A \Big|_{y=0} = -\rho D_{AB} \frac{dx_A}{dy} \Big|_{y=0} \quad (42)$$

Substituindo-se (35) e (41) em (42), tem-se:

$$k_\rho = \frac{-\rho D_{AB} (\partial x_A / \partial y)_{y=0}}{\rho (x_{Aw} - x_{A0})} = \frac{D_{AB}}{x} (\partial \hat{x}_A / \partial \hat{y}_M)_{y=0} = \frac{D_{AB}}{x} \text{grad } \hat{x}_A \Big|_{\hat{r}=0} \quad (43)$$

$$k_\rho = \frac{D_{AB}}{x} \text{grad } \hat{x}_A \Big|_{\hat{r}=0} = \frac{D_{AB}}{x} 0,332 \text{Re}_x^{1/2} \left( \frac{v}{D_{AB}} \right)^{1/3}$$

$$\frac{k_\rho x}{D_{AB}} = 0,332 \text{Re}_x^{1/2} \left( \frac{v}{D_{AB}} \right)^{1/3} = 0,332 \text{Re}_x^{1/2} Sc^{1/3}$$

Definindo-se o número de Sherwood por:

$$\boxed{Sh = \frac{k_\rho x}{D_{AB}}} \quad (44)$$

Tem-se, para o caso de transporte de massa:

$$\boxed{Sh = 0,332 \text{Re}_x^{1/2} Sc^{1/3}} \quad (45)$$

O valor médio do coeficiente de transporte de massa para uma placa de comprimento L é obtido da equação (45), resultando a expressão:

$$\boxed{Sh_L = 0,664 \text{Re}_L^{1/2} Sc^{1/3}} \quad (46)$$

No caso do Transporte de massa, considerou-se a condição de baixo transporte de massa (?!). Pois, na parede a condição de contorno considerada é a de velocidade nula! O que, obviamente, não se observa no caso de transporte de massa intenso na parede.

## 8. Coeficientes convectivos de transferência de calor com injeção/sucção na placa

No caso de injeção e/ou sucção na placa, fenômeno observado no caso de alto transporte de massa, a velocidade  $v_y$  não é nula em  $y=0$ . Assim, os perfis de velocidade, temperatura e concentração são alterados.

O sistema de equações (3), (13) e (29) continua válido, para o estudo da camada limite laminar. No entanto, a condição de contorno da velocidade na parede deve ser alterada.

O fluxo global de A na parede é expresso por:

$$\mathbf{n}_{Ay} = \mathbf{J}_{Ay} + x_{Ay} \mathbf{n}_y = \mathbf{J}_{Ay} + \frac{\rho_A}{\rho} \rho v_y = \mathbf{J}_{Ay} + \rho_A v_y \quad (47)$$

Para  $y = 0$  adota-se o índice  $s$ .

$$n_{Ays} = J_{Ays} + \rho_{As} v_{ys} \tag{48}$$

Expressando-se o fluxo global em termos do coeficiente de transporte de massa, tem-se:

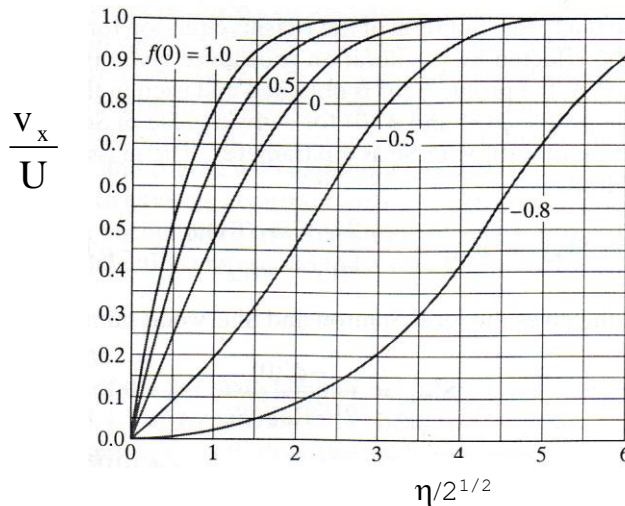
$$n_{Ays} = k_p(\rho_{Aw} - \rho_{A0}) = J_{Ays} + \rho_{As} v_{ys} = k'_p(\rho_{Aw} - \rho_{A0}) + \rho_{As} v_{ys} \tag{49}$$

Onde  $k_p$  é o coeficiente para alto transporte e  $k'_p$  é o coeficiente para baixo transporte, que é, conforme equações (41) e (42), expresso por:

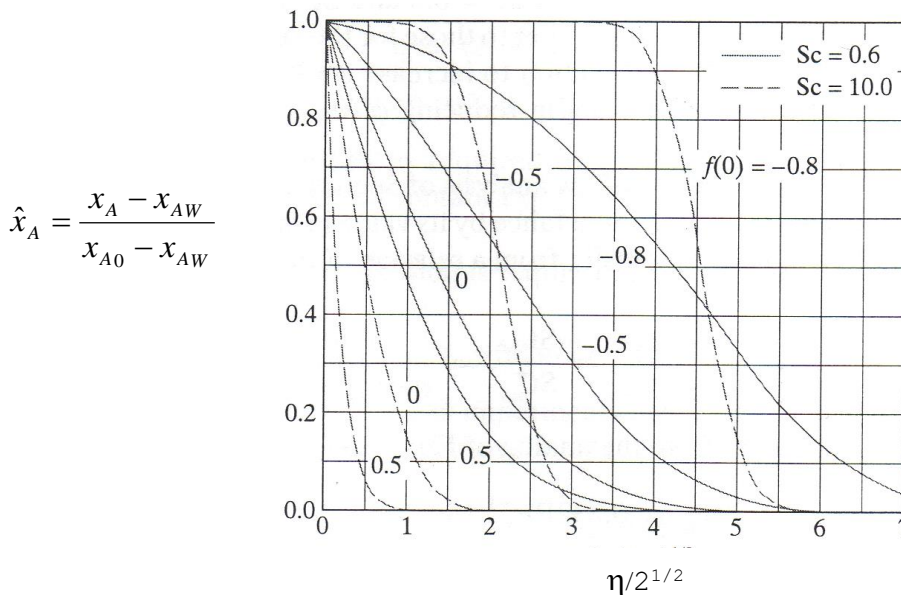
$$k'_p = \frac{-\rho D_{AB} (\partial x_A / \partial y)_{y=0}}{\rho(x_{As} - x_{A0})} \tag{50}$$

Observe que o fluxo global é afetado pela velocidade  $v_y$ , na parede, e também, pela alteração do perfil de concentração (vide figuras na sequência).

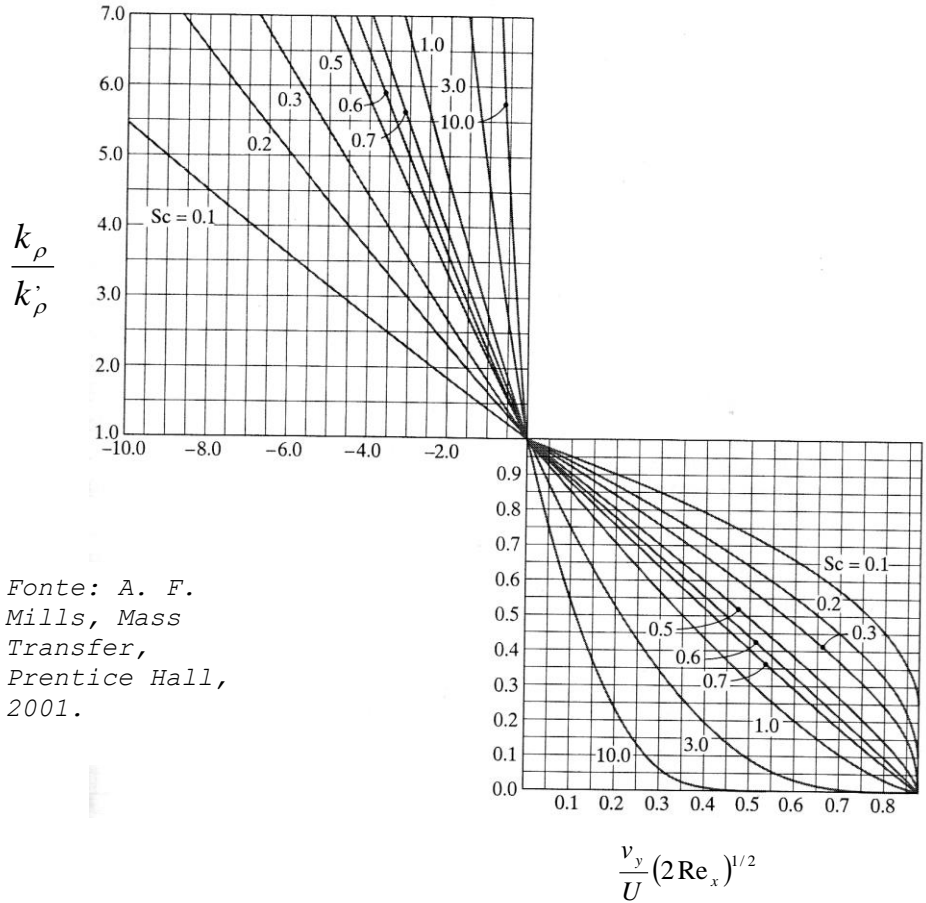
As figuras que seguem foram obtidas do texto de A. Mills e apresentam os perfis de velocidade  $v_x/U$  e de concentração (adimensionalizado) em função de  $2^{-1/2}\eta$ , para diferentes valores do parâmetro  $f(0) = -v_y(2Re_x)^{1/2}/U$ . Apresenta-se, também, um gráfico que expressa a relação entre o  $k_p$  e  $k'_p$  em função do parâmetro  $f(0)$ . No caso de sucção  $f(0) < 0$  e no caso de injeção  $f(0) > 0$ .



Fonte: adaptado de A. F. Mills, Mass Transfer, Prentice Hall, 2001.



Fonte: adaptado de A. F. Mills, Mass Transfer, Prentice Hall, 2001.



**9. Camada limite turbulenta - transferência de massa**

Os trabalhos de von Karman foram desenvolvidos para análise integral da camada limite turbulenta. Os perfis aproximados de velocidade é concentração são assumidos segundo um modelo de potência 1/7.

$$\frac{v_x}{U} = \left( \frac{y}{\delta_M} \right)^{1/7} \tag{51}$$

$$\frac{x_A - x_{AW}}{x_{A0} - x_{AW}} = \left( \frac{y}{\delta_M} \right)^{1/7} \tag{52}$$

A espessura da camada limite hidrodinâmica turbulenta é expressa por:

$$\frac{\delta}{x} = 0,376 Re_x^{-1/5} \tag{53}$$

Na ausência de injeção/sucção de massa significativa na parede, o coeficiente local de transporte de massa pode ser calculado por:

$$Sh_L = 0,0292 Re_x^{4/5} Sc^{1/3} \tag{54}$$

BIBLIOGRAFIA:

- Bird, R.B., Stewart, W.E., Lighfoot, E.N., Transport Phenomena, 2 ed, Wiley, 2002.
- Schlichting, H., Boundary-Layer Theory, Seventh edition, McGraw-Hill Book Company, 1979.
- Mills, A. F. Mass Transfer, Prentice Hall, 2001