PEF3200 – Introdução à Mecânica das Estruturas

Aula 5 - 26/04/2023

Diagramas de esforços solicitantes de estruturas planas.

Prof. Martin Paul Schwark

Prof. Osvaldo Shigueru Nakao

Prof. Valério S. Almeida

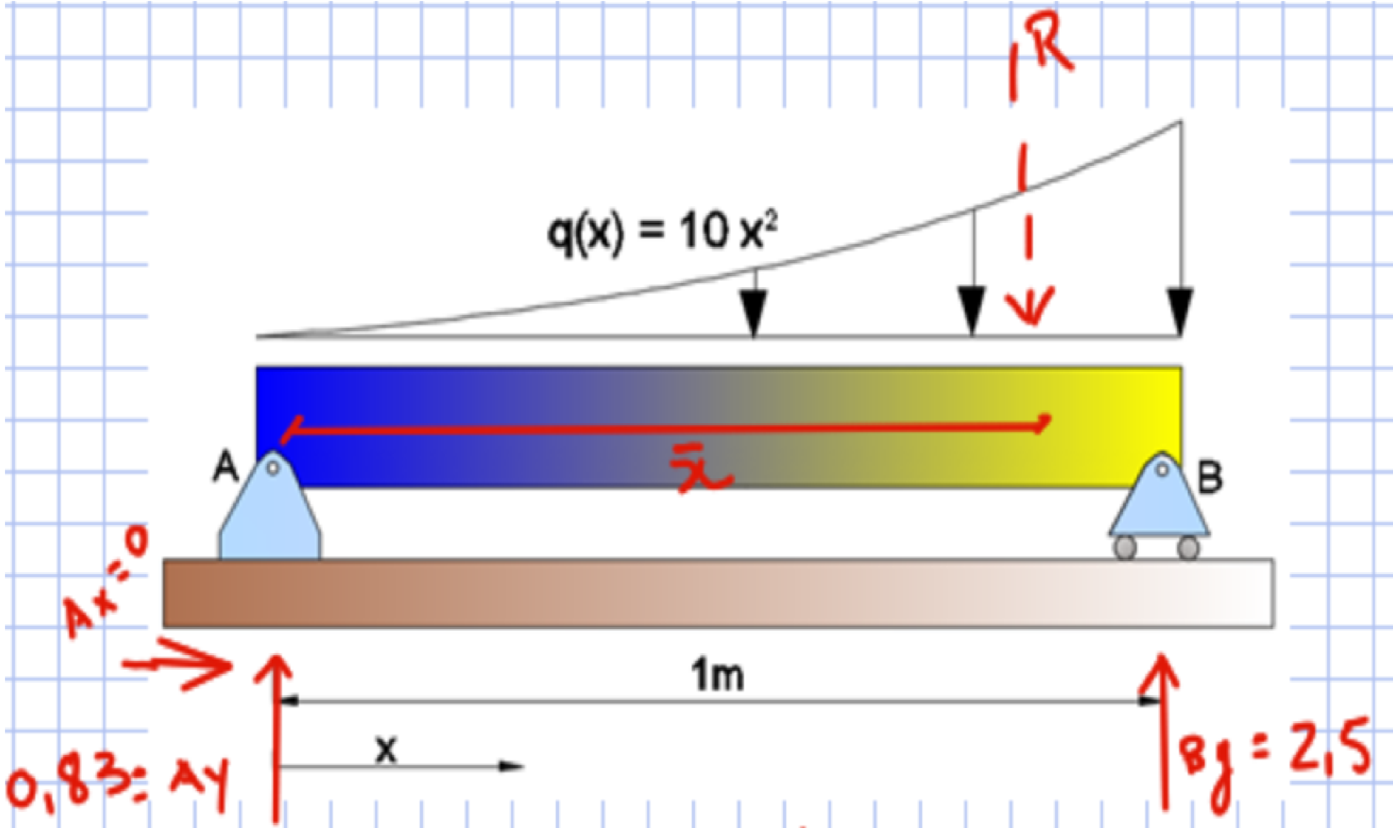
O que vimos nas aulas 1 a 4:

- Como é a disciplina, o que vamos ver, materiais de apoio, programação
- Mecânica dos sólidos deformáveis, o que são estruturas, estão em tudo
- Modelos físicos e matemáticos, classificações das estruturas, ações que atuam sobre elas e alguns tópicos da mecânica
- Deformadas, movimentos em sistemas materiais, vínculos, estaticidade, estruturas hipostáticas, isostáticas e hiperestáticas, grau de hiperestaticidade, as simplificações adotadas nesta disciplina
- Cálculo de reações de apoio
- Tensões, esforços solicitantes, o Teorema Fundamental da Resistência dos Materiais
- Diagramas de esforços solicitantes com vários exemplos

O que vamos ver nesta aula:

- Mais exemplos de análise estrutural básica: da primeira avaliação até o desenho de diagramas de esforços solicitantes
- Veremos algumas situações novas:
  - Carregamentos genéricos
  - Arcos
  - Vigas inclinadas
  - Apoios inclinados

Carregamento genérico q = f(x)



Por definição: $R=\int_0^{L=1m} q(x)\,dx$

$R=\int_0^1 10x^2\,dx = 10\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{10}{3}$ (kN)

$\bar{x} = \frac{\int_0^1 q(x)\,x\,dx}{R} = \frac{\int_0^1 (10x^2)\,x\,dx}{10/3} = \frac{\int_0^1 10x^3}{10/3} =$

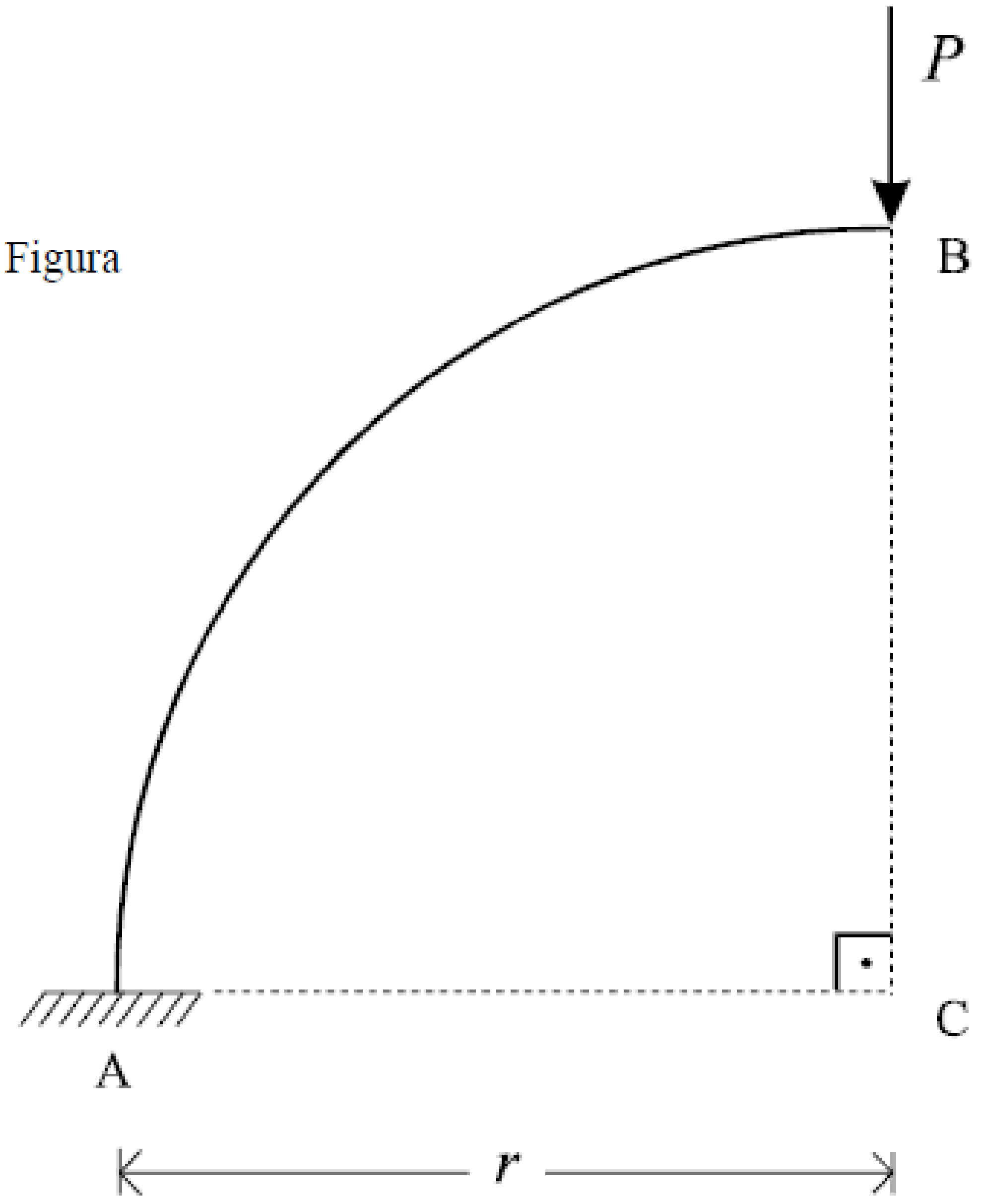
$\bar{x} = \frac{10x^4}{4}\cdot 3/10\,\Big|_0^1 = \frac{10}{4}\cdot\frac{3}{10} = 0{,}75m$

$\Sigma M_A = 0$: $B_y\cdot 1 = \frac{10}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{5}{2} \to B_y = 2{,}5kN$

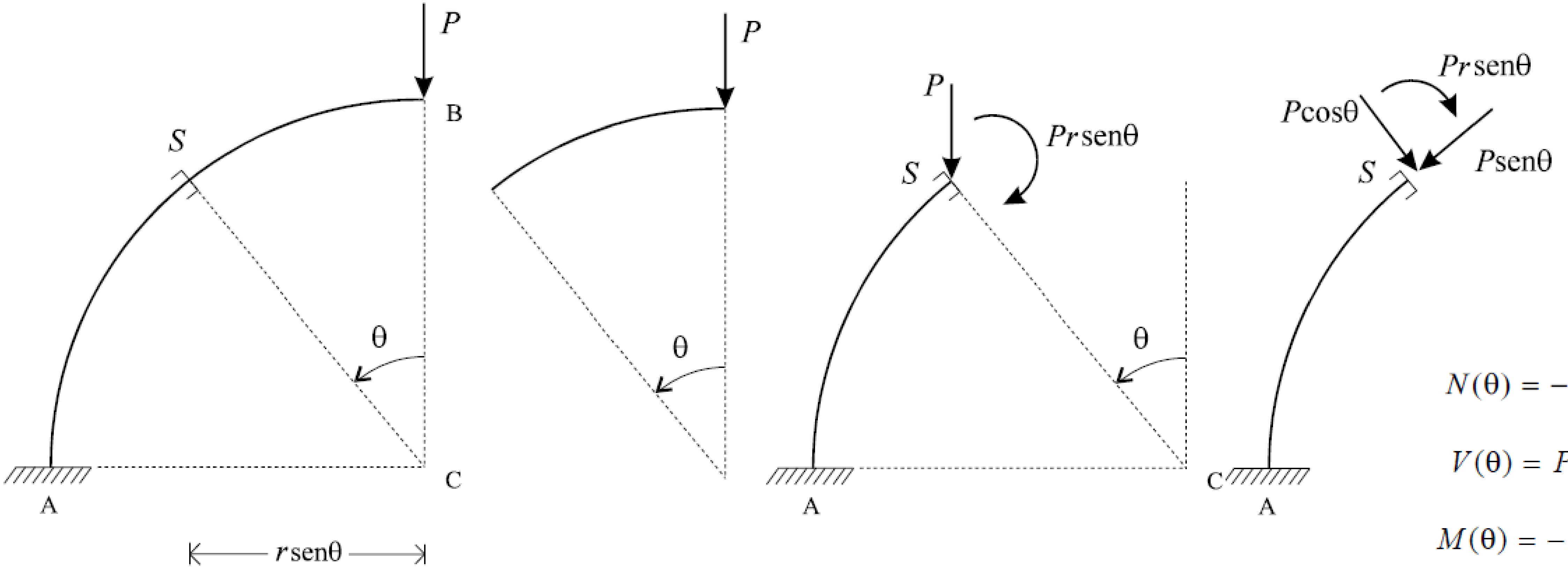
$\Sigma F_y = 0$: $A_y + B_y = \frac{10}{3} \to A_y = \frac{10}{3} - 2{,}5 = \frac{5}{6} = 0{,}83kN$

Exemplo 16

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da estrutura da Figura



Exemplo 16

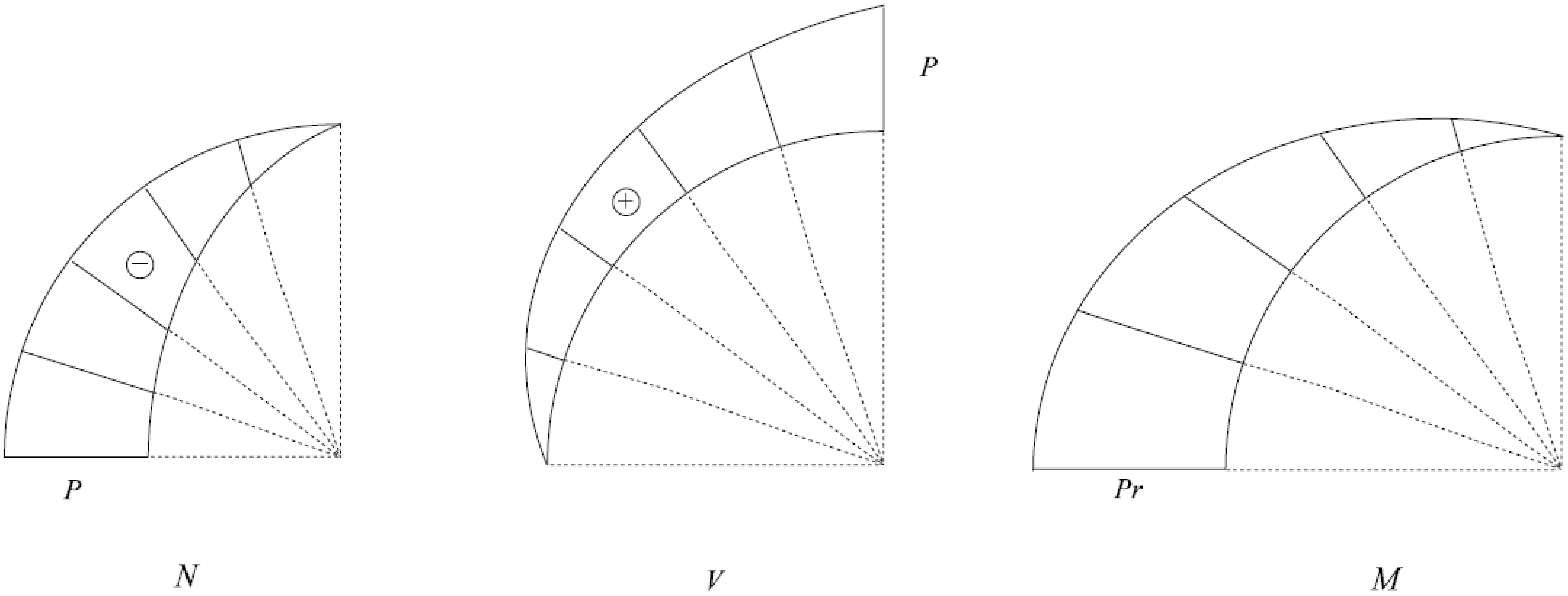


$$N(\theta) = -P\text{sen}\theta$$

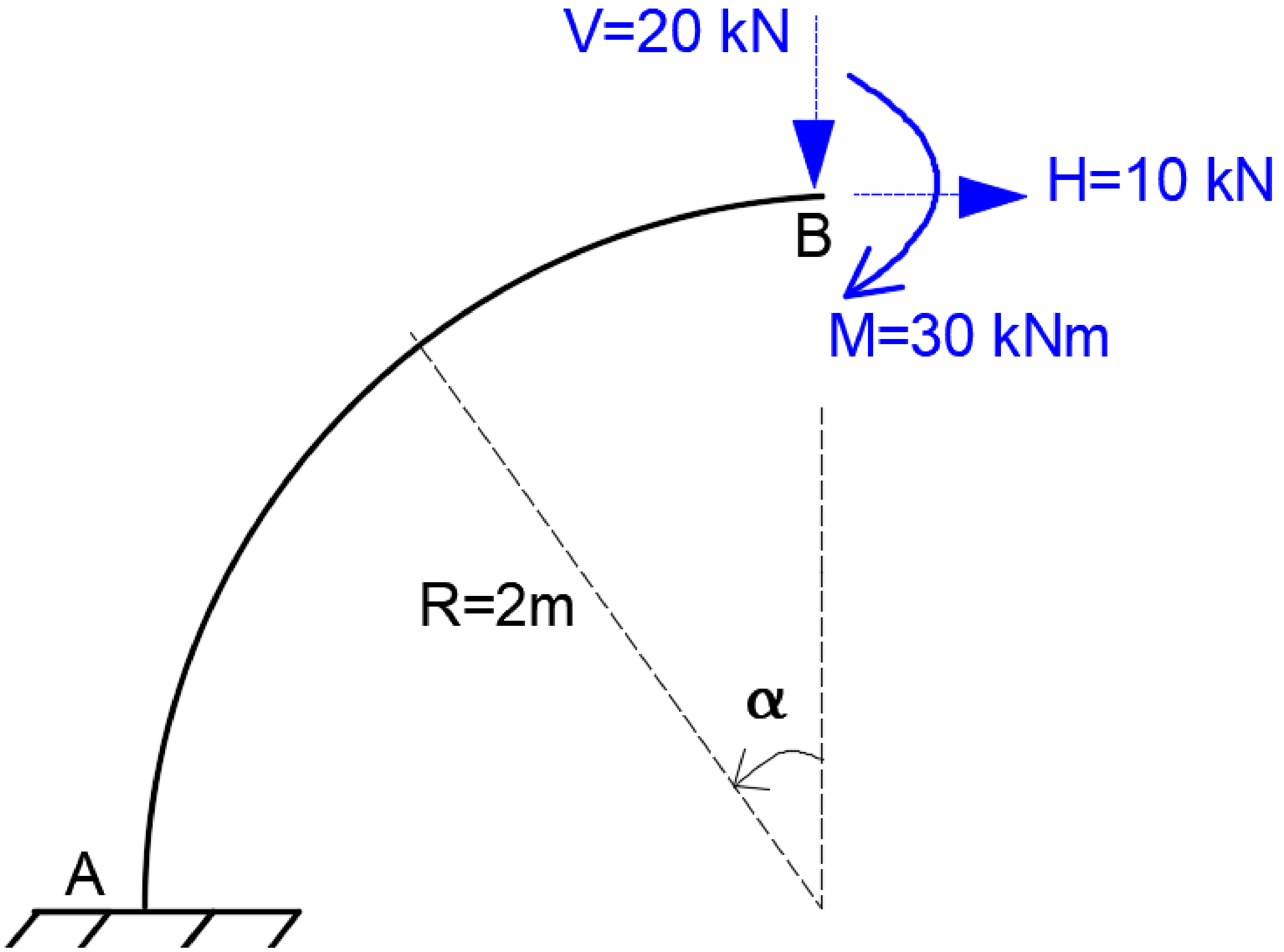
$$V(\theta) = P\cos\theta$$

$$M(\theta) = -Pr\text{sen}\theta$$

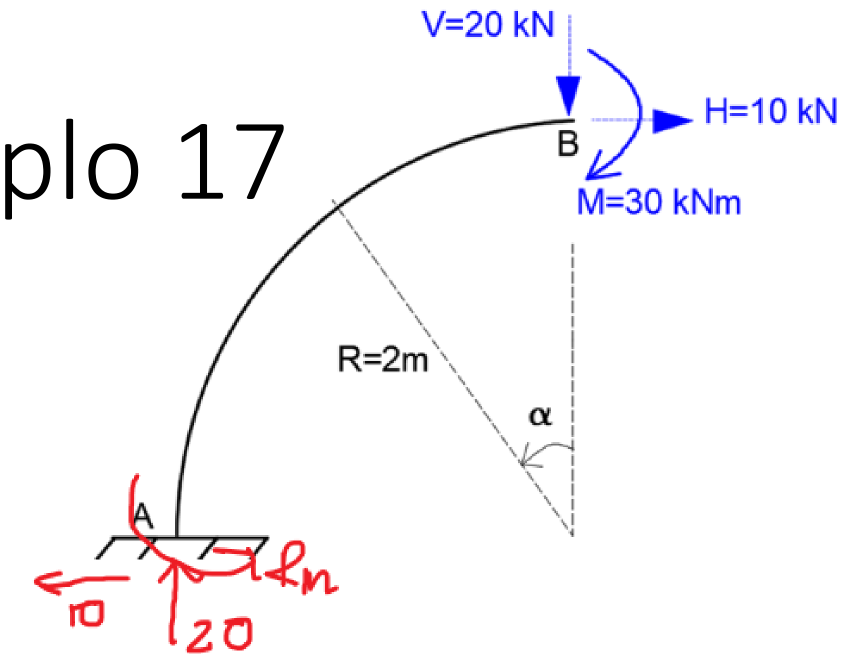
Exemplo 16



Exemplo 17



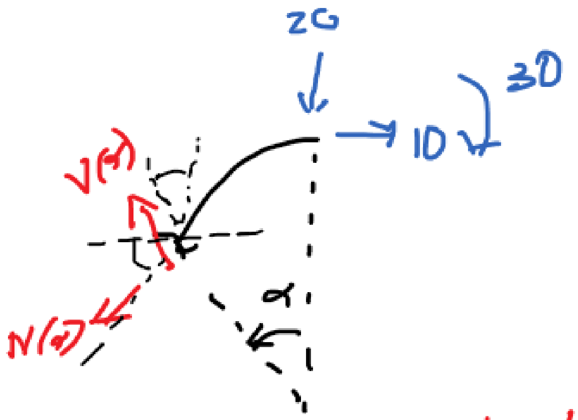
Exemplo 17



$\Sigma M_A = 0$:

$R_m = 20 \cdot 2 + 10 \cdot 2 + 30$

$R_m = 90$ kNm



$\Sigma F_x = 0$: $N(\alpha)\cos\alpha + V(\alpha)\,\text{sen}\,\alpha = 10 \quad (1)$

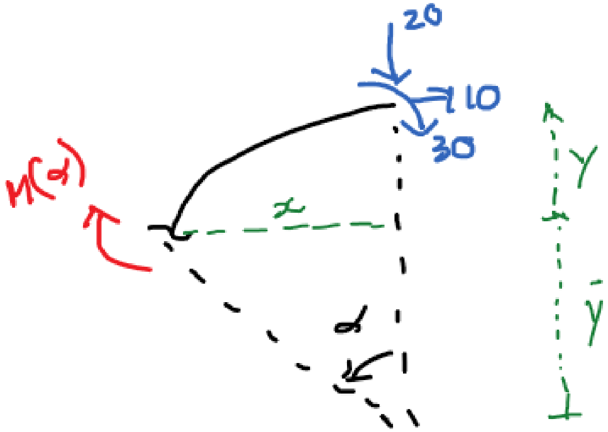
$\Sigma F_y = 0$: $-N(\alpha)\,\text{sen}\,\alpha + V(\alpha)\cos\alpha = 20 \quad (2)$

Solving..

$$V(\alpha) = 10\,\text{sen}\,\alpha + 20\cos\alpha \quad \begin{cases} V(0) = 20 \\ V(90) = 10 \end{cases}$$

$$N(\alpha) = 10\cos\alpha - 20\,\text{sen}\,\alpha \quad \begin{cases} N(0) = 10 \\ N(90) = -20 \end{cases}$$

Exemplo 17



$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{x}{2} \Rightarrow x = 2\operatorname{sen}\alpha$

$\cos\alpha = \bar{y}/2 \Rightarrow \bar{y} = 2\cos\alpha$

$\bar{y} + y = 2\,m \Rightarrow y = 2 - \bar{y}$

$y = 2 - 2\cos\alpha = 2(1 - \cos\alpha)$

$\Sigma M_s = 0: \; M(\alpha) + 30 + 20 \cdot x + 10 \cdot y = 0$

$M(\alpha) = -30 - 20 \cdot 2\operatorname{sen}\alpha - 10 \cdot 2(1 - \cos\alpha)$

$M(\alpha) = -30 - 40\operatorname{sen}\alpha - 20 + 20\cos\alpha$

$M(\alpha) = -50 + 20\cos\alpha - 40\operatorname{sen}\alpha \; \begin{cases} M(0) = -50 + 20 = -30 \\ M(90) = -50 - 40 = -90 \end{cases}$

Exemplo 17

extremos locais:

$V'(\alpha) = 10\cos\alpha - 20\,\text{sen}\,\alpha = 0 \rightarrow tg\,\alpha = 1/2 \quad (\alpha = 26{,}56^\circ)$

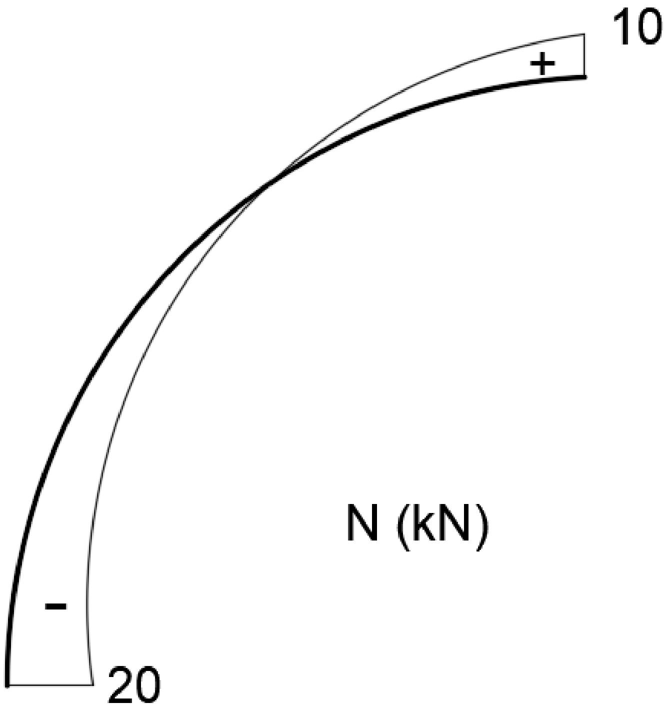
$V''(\alpha) = -10\,\text{sen}\,\alpha - 20\cos\alpha = 0 \rightarrow tg(\alpha) = -2 \quad (\alpha = -63{,}43^\circ)$

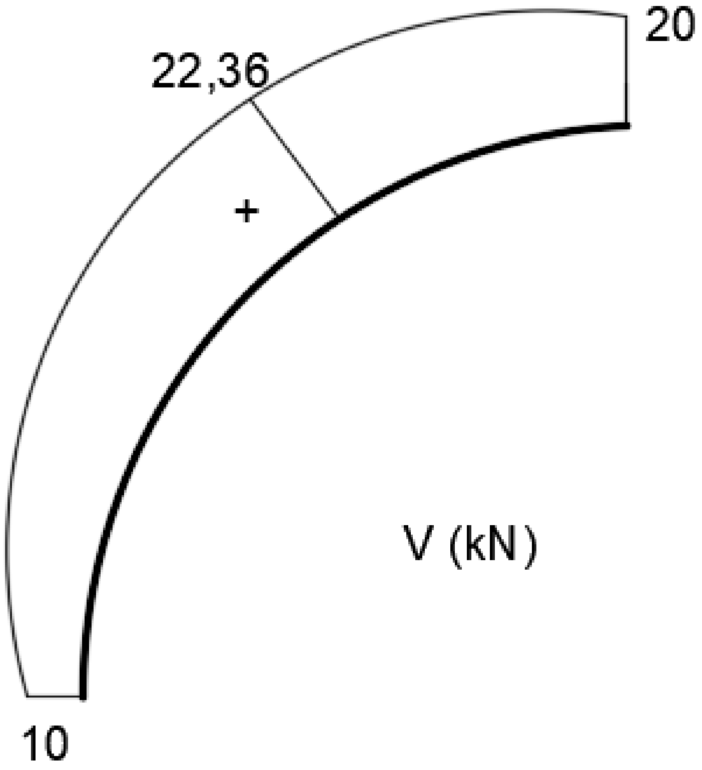
$V(26{,}56^\circ) = 10 \cdot \text{sen}\,26{,}56 + 20\cos 26{,}56 = 22{,}36\ kN$

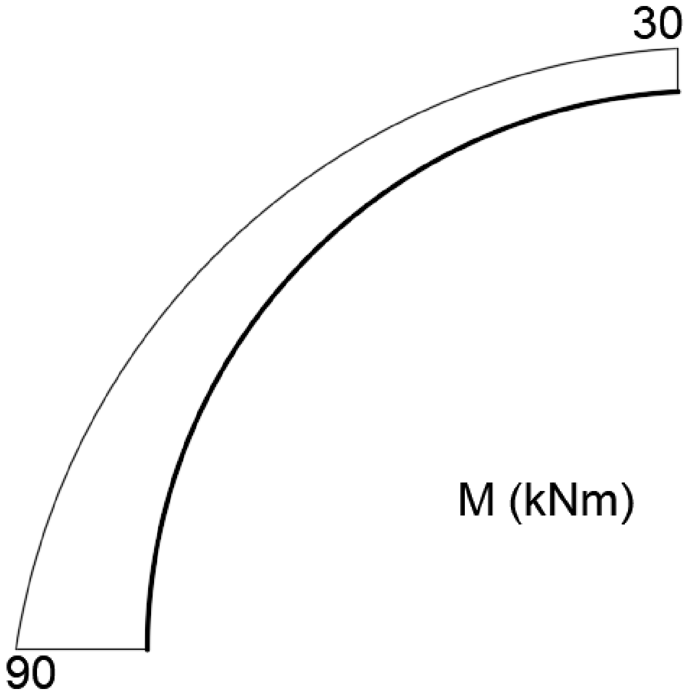
$N'(\alpha) = -10\,\text{sen}\,\alpha - 20\cos\alpha = 0 \rightarrow tg\,\alpha = -2$ (fora intervalo) $(0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ)$

$M'(\alpha) = -20\,\text{sen}\,\alpha - 40\cos\alpha = 0 \rightarrow -\text{sen}\,\alpha = 2\cos\alpha \rightarrow tg\,\alpha = -2$ (fora intervalo)

Exemplo 17





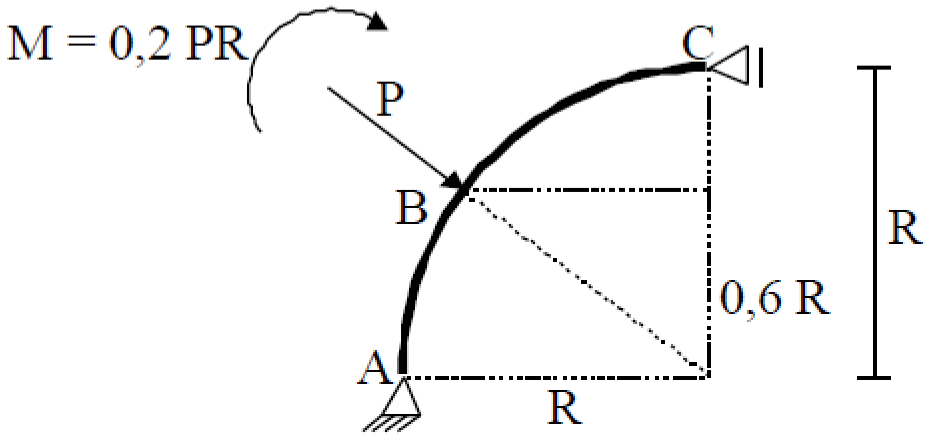


Exemplo 18

2ª QUESTÃO - 1ª PROVA DE 1995

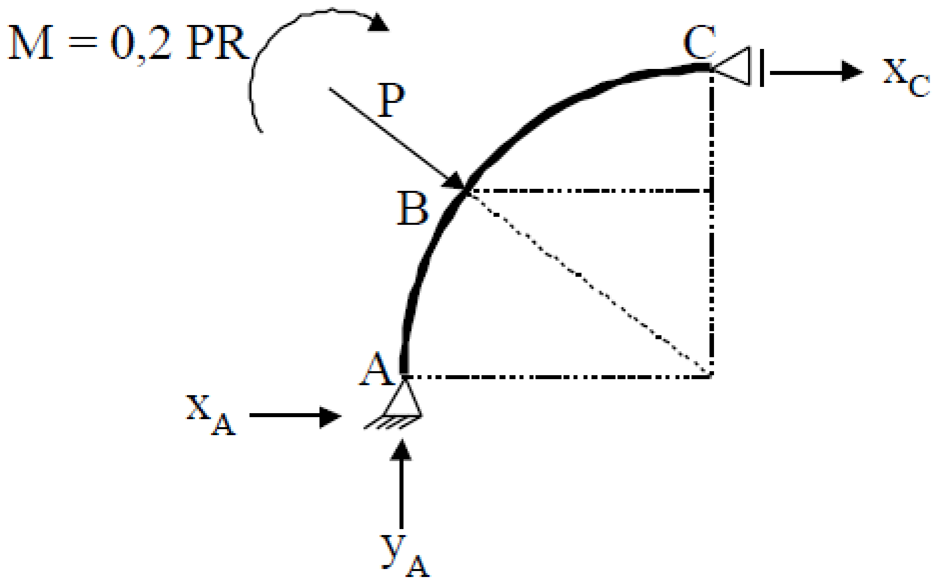
Traçar os diagramas de esforços solicitantes da estrutura da figura abaixo esquematizada e indicar os seus valores nas vizinhanças das seções A, B e C.

Obs.: Os diagramas não precisam ser traçados com muito rigor, bastando esquematizá-los.



Exemplo 18

<u>Resolução:</u>



Reações de apoio:

$\Sigma Fx = 0 ==> x_A + x_C + 0,8P = 0$

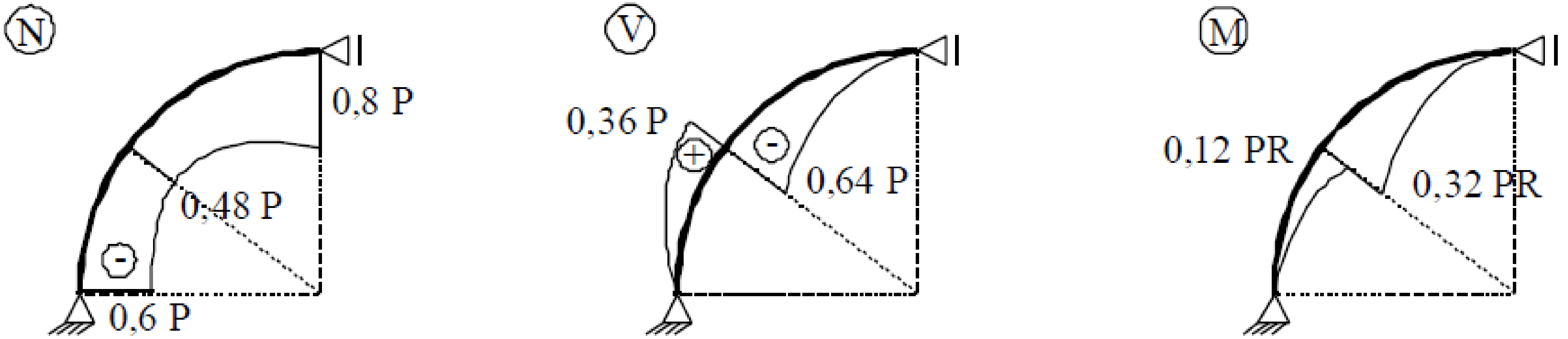
$\Sigma Fy = 0 ==> y_A - 0,6P = 0 ==> y_A = 0,6P$

$(\Sigma M)_A = 0 ==> 0,2PR + 0,8P*0,6R + 0,6P*0,2R + x_C*R = 0 ==> x_C = -0,8P$

$x_A = 0$

Exemplo 18

Diagramas de esforços solicitantes:



Exemplo 19

2ª QUESTÃO - 1ª PROVA DE 1996 - (5,0)

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga da figura abaixo, determinando o valor do máximo momento fletor positivo no trecho AC e a seção transversal em que ele ocorre.

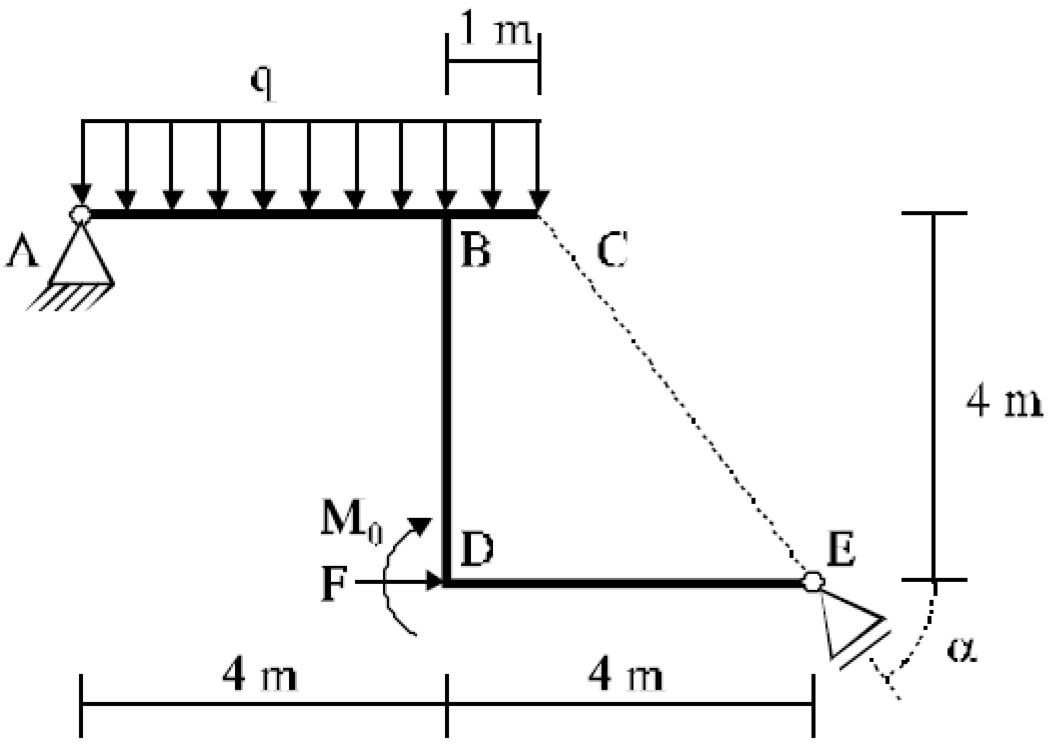
Dados: $q = 8$ kN/m

$F = 20$ kN

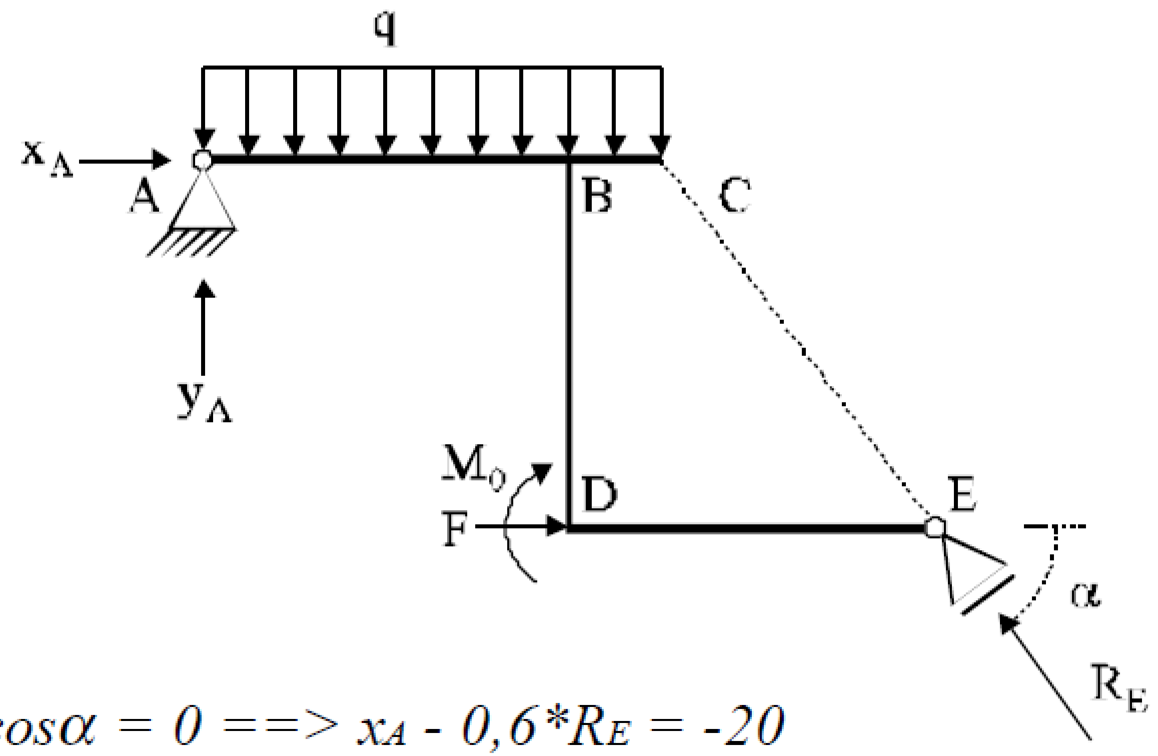
$M_0 = 40$ kNm

$\text{sen}\alpha = 0{,}8$

$\cos\alpha = 0{,}6$



Exemplo 19



<u>Resolução:</u>

Reações de apoio:

$\Sigma Fx = 0 ==> x_A + F - R_E*\cos\alpha = 0 ==> x_A - 0,6*R_E = -20$

$\Sigma Fy = 0 ==> y_A + R_E*\text{sen}\,\alpha - 5*q = 0 ==> y_A + 0,8*R_E = 40$

$\Sigma M_A = 0 ==> - 5*q*2,5 + 4*F - M_0 + R_E*\text{sen}\,\alpha*8 - R_E*\cos\alpha*4 = 0$

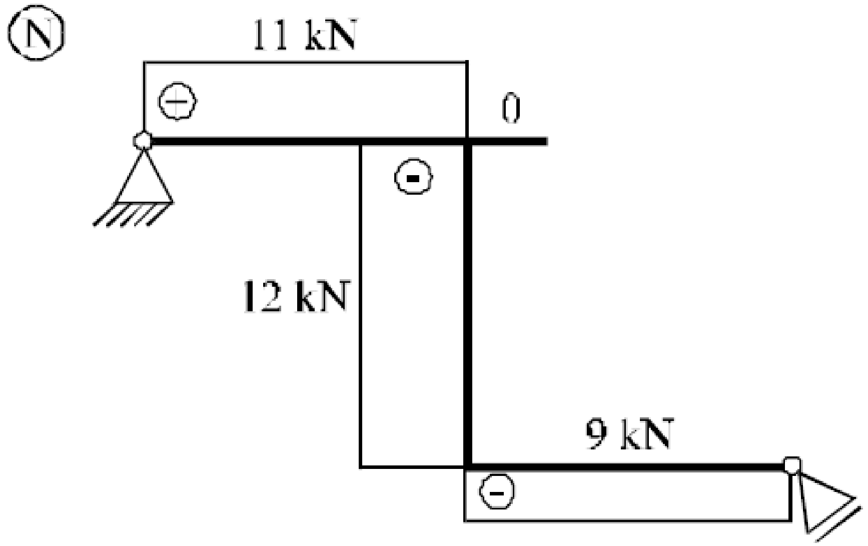
$R_E = 15\ kN$

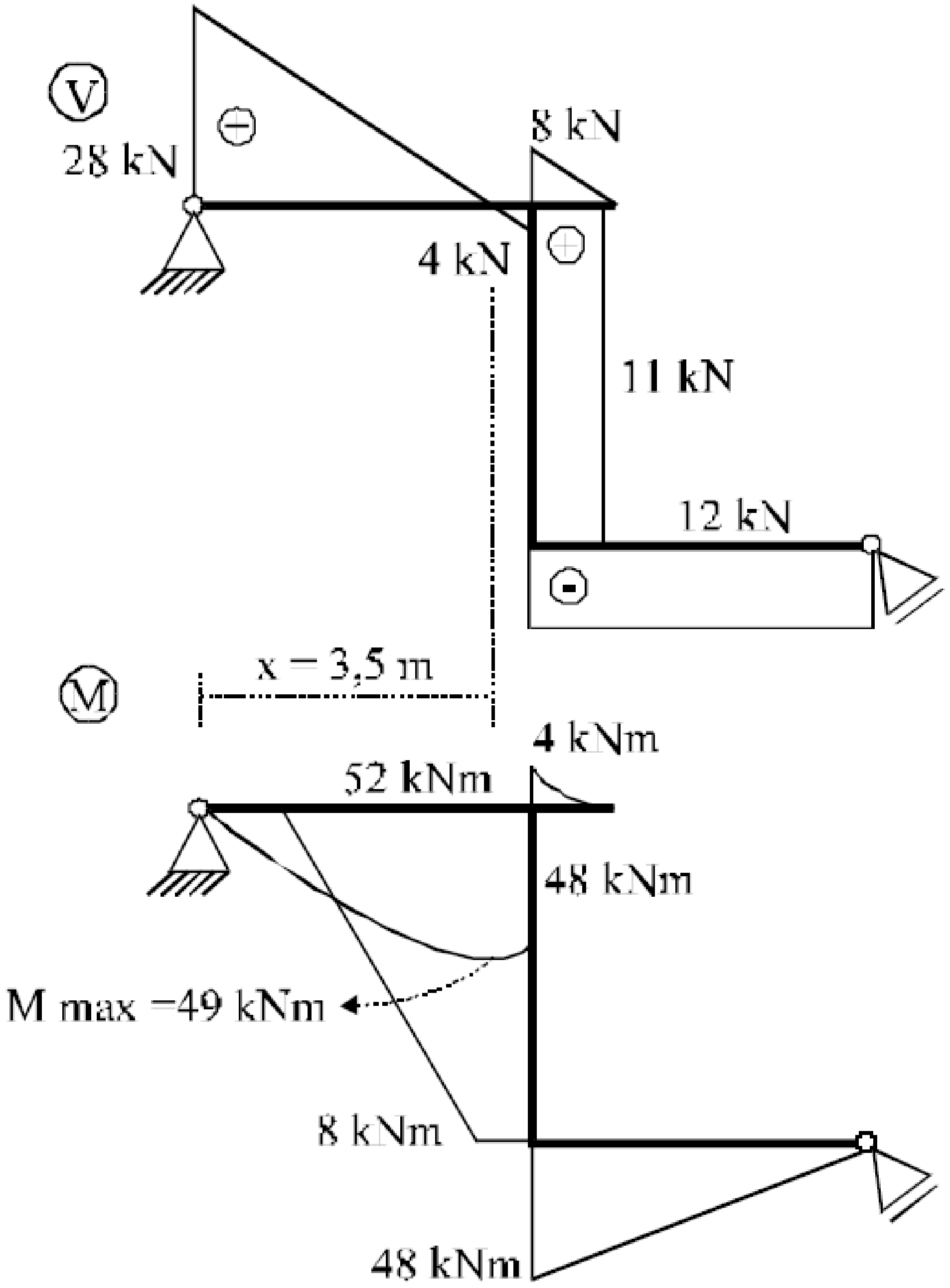
$x_A = -\ 11\ kN$

$y_A = 28\ kN$

Exemplo 19

Diagramas da esforços solicitantes:

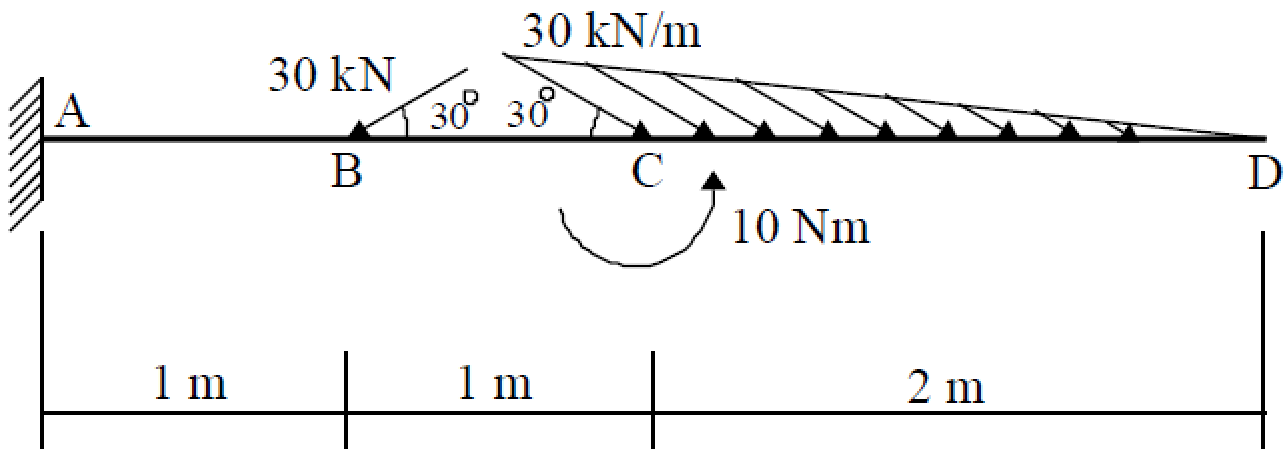




Exemplo 20

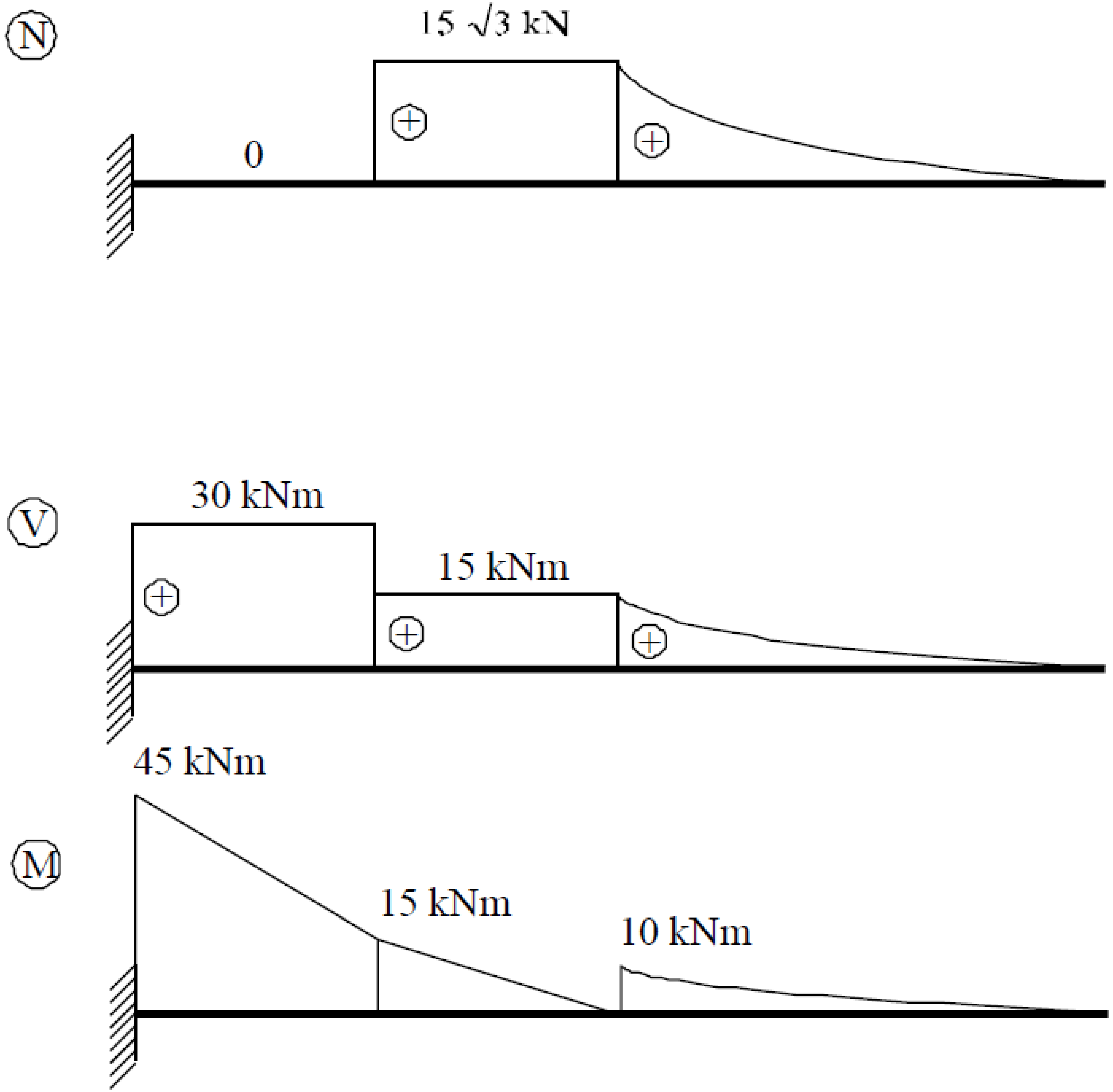
3ª QUESTÃO - 1ª PROVA DE 1993

Traçar os diagramas de esforços solicitantes da estrutura da figura abaixo.
O momento de intensidade de 10 Nm é aplicado em C.



Exemplo 20

Solução:



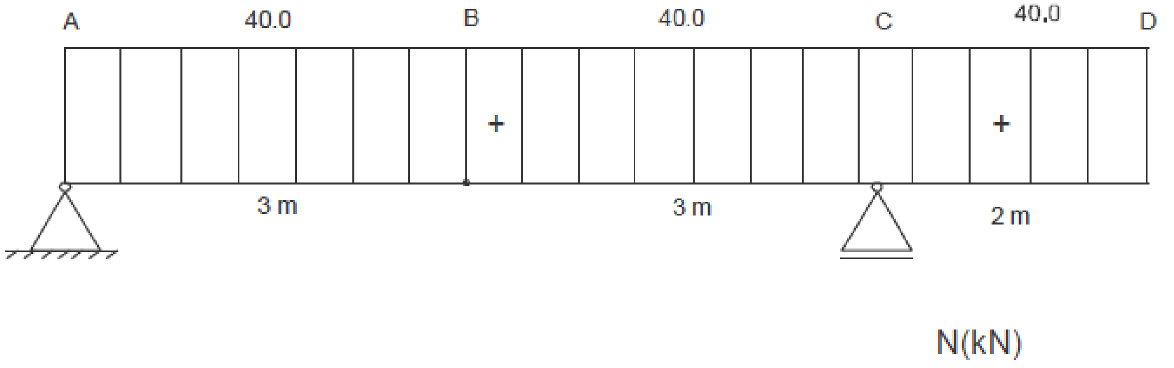
Exemplo 21

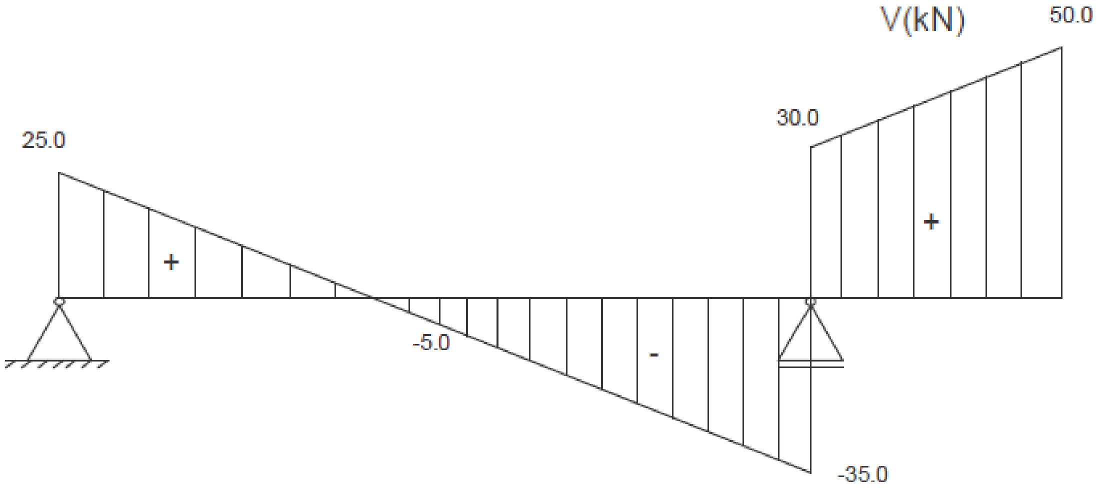
PEF 2200 – "Introdução à mecânica das estruturas" – 1ª Prova – 31/03/2011

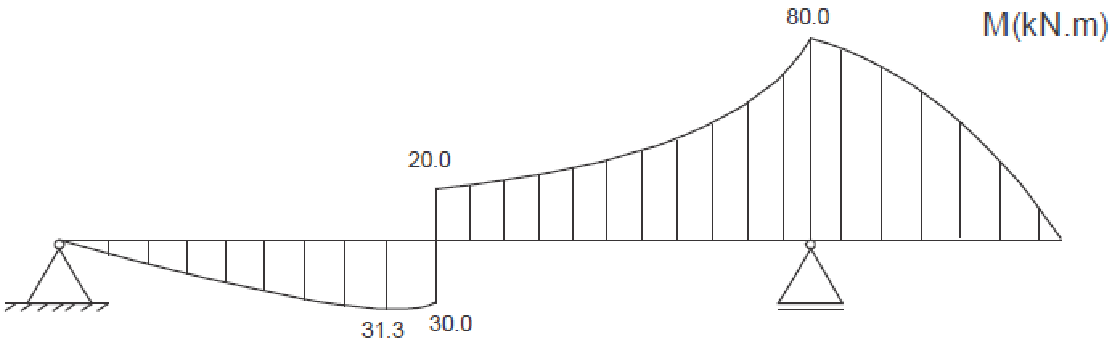
Nº USP: ___________ Nome:____

2ª Questão (3,0):

Determine os carregamentos correspondentes aos diagramas indicados a seguir:

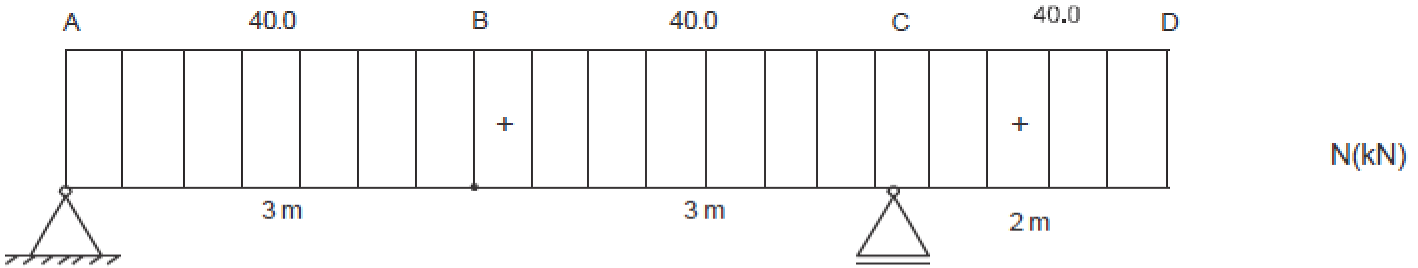




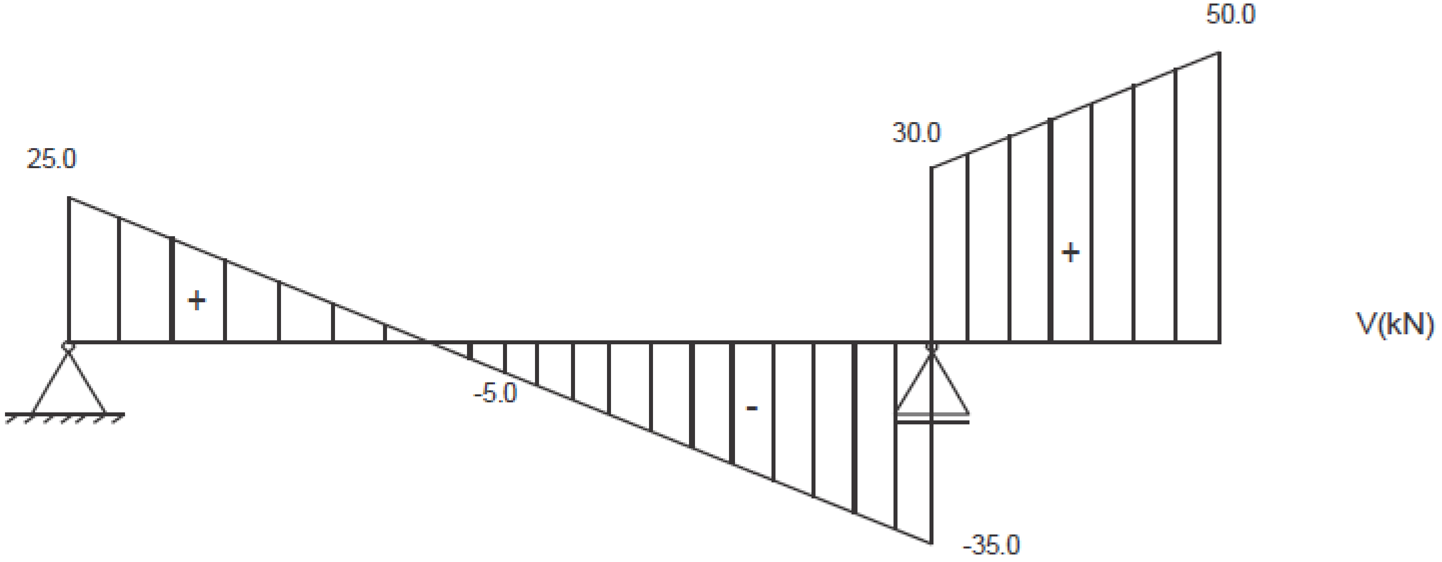


Exemplo 21

Solução:

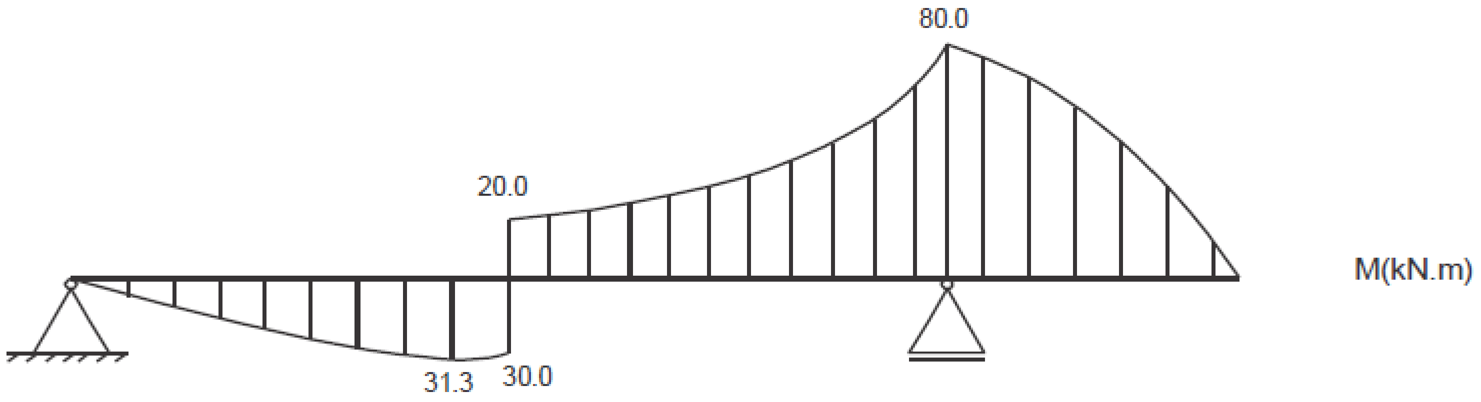


Como a força normal é constante e positiva em toda a viga, há uma força longitudinal orientada para a direita aplicada na extremidade do balanço de 40 kN.



Como a força cortante varia linearmente na viga toda a uma taxa de 10 kN/m, há nela uma carga uniformemente distribuída de 10 kN/m. Além disso, como a força cortante na extremidade do balanço é de 50 kN, há nessa seção uma força aplicada de 50 kN para baixo.

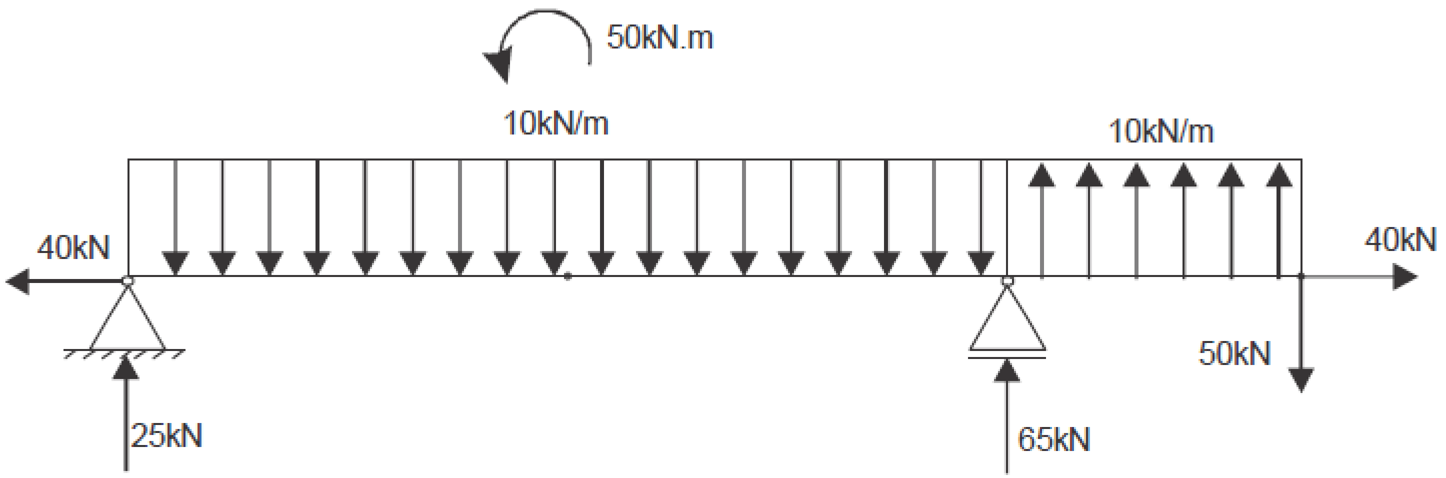
Exemplo 21



Como a concavidade do diagrama de momentos fletores do trecho AC é para cima, a carga uniformemente distribuída é para baixo, já no trecho CD como a concavidade é para baixo, a carga é para cima.

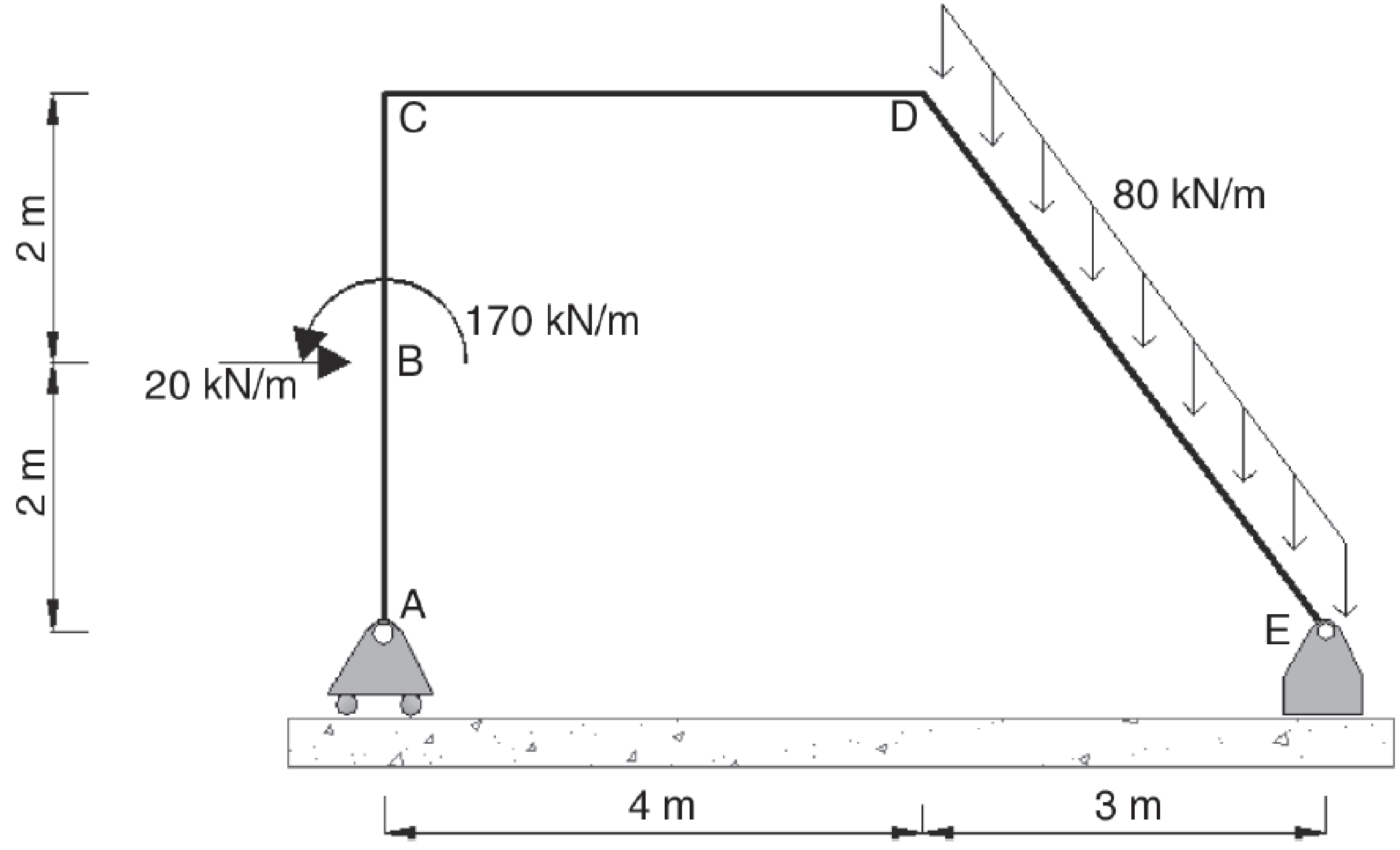
Além disso, como há uma descontinuidade no diagrama no ponto B de 50 kN.m, portanto nessa seção há um momento aplicado de 50 kN.m.

Sendo assim, os carregamentos dessa viga são:



Exemplo 22

- Determinar os diagramas de esforços solicitantes de toda a estrutura plana*



*Resistência do Materiais: Um guia prático. Valerio Almeida; Marcelo Greco, Daniel Maciel. Elsevier, 2018

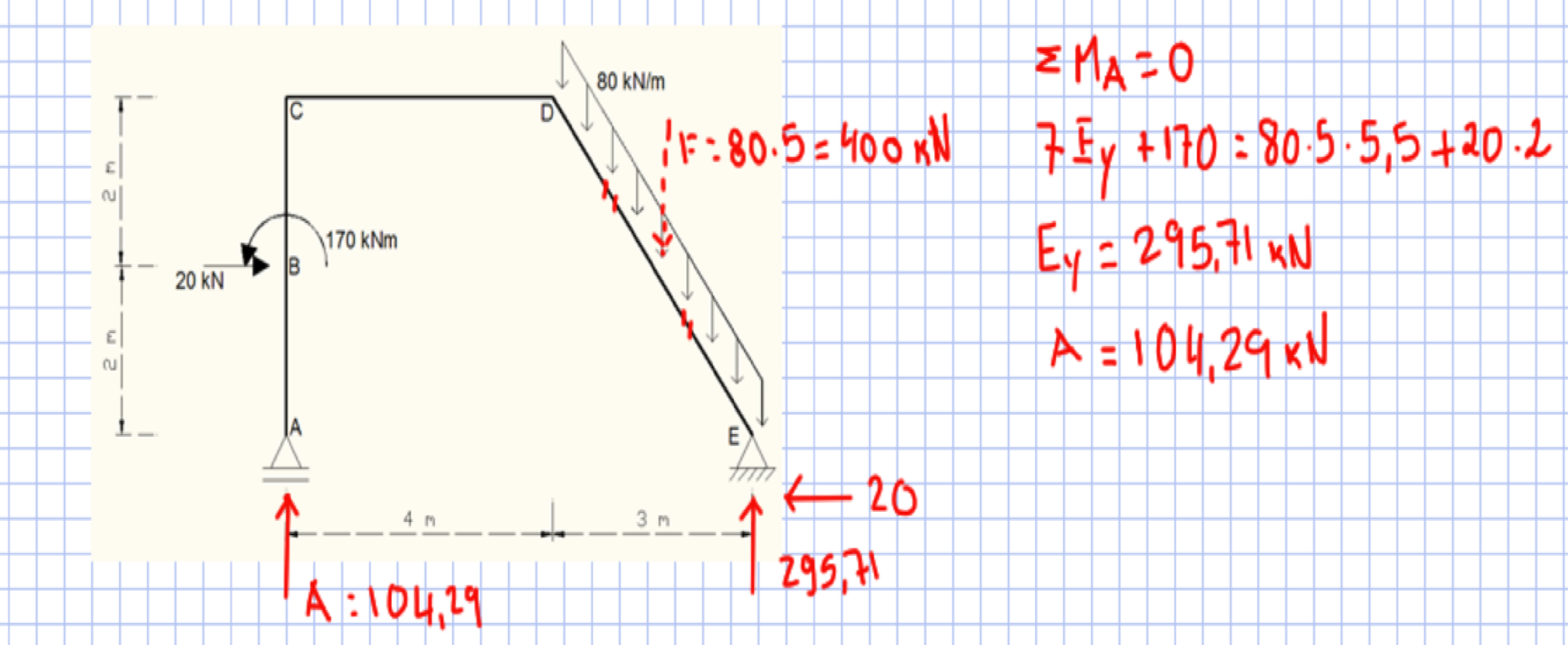
Exemplo 22

Usando as três equações de equilíbrio para determinar as reações:

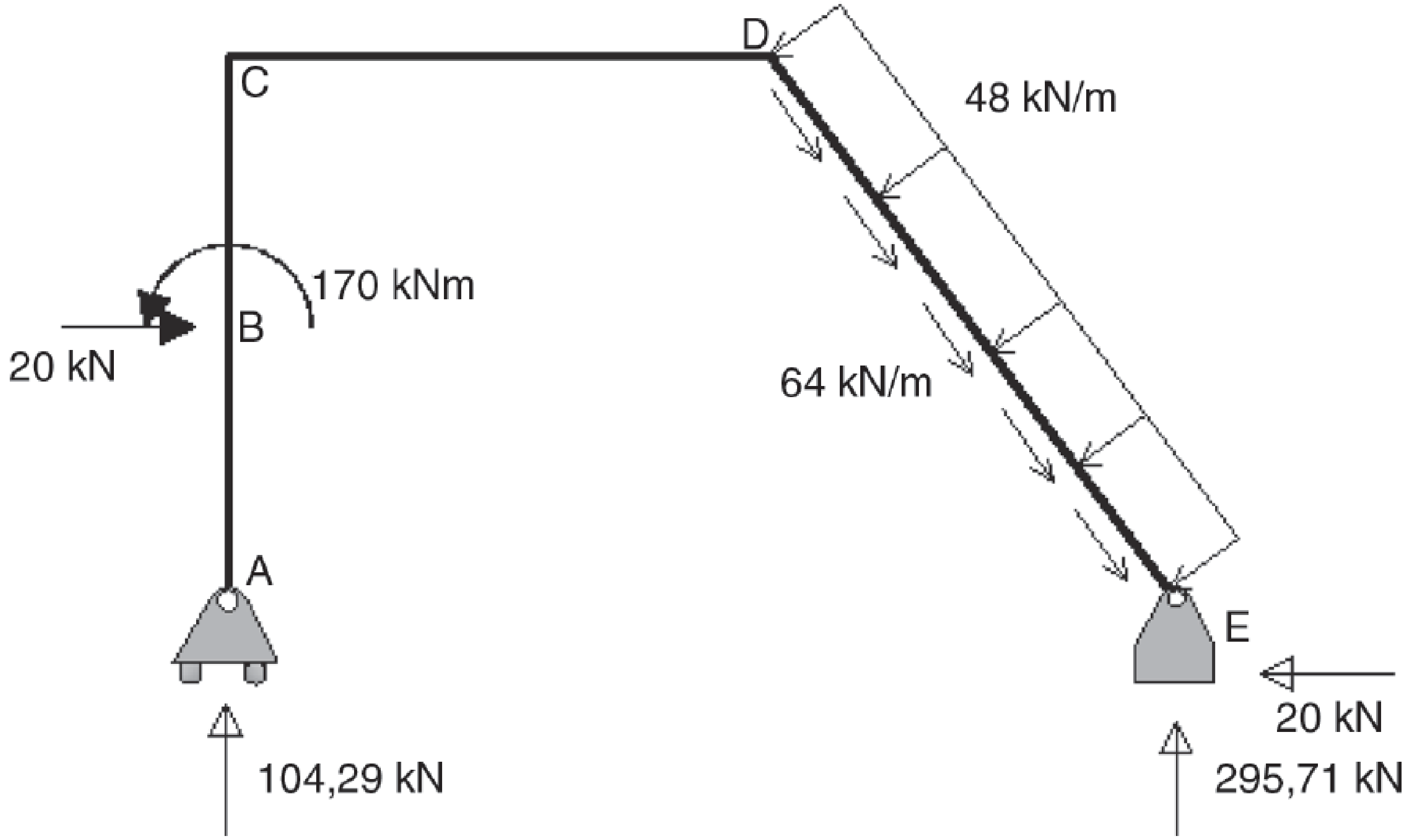
$$\sum F_X = 0 : \rightarrow 20 - E_x = 0 \rightarrow E_x = 20 \text{ kN } (\leftarrow)$$

$$\sum M_A = 0 : \rightarrow 7 \cdot E_y + 170 = 80 \cdot 5 \cdot 5{,}5 + 20 \cdot 2 \rightarrow E_y = 295{,}71 \text{ kN } (\uparrow)$$

$$\sum F_y = 0 : \rightarrow A_y + E_y = 80 \cdot 5 \quad \rightarrow A_y = 104{,}29 \text{ kN } (\uparrow)$$



Exemplo 22



Decompor a carga distribuída paralelo (x') e perpendicular (y') ao seu eixo. A sua resultante é de $80 \cdot 5 = 400$ kN, que a decompondo fica: $F_{x'} = 320$ kN, $F_{y'} = 240$ kN, e pode-se obter a força distribuída como: $q_{x'} = 320/5 = 64$ kN/m, $q_{y'} = 240/5 = 48$ kN/m.

Exemplo 22

Para os trechos: AB, BC, CD e DE, fazer cortes no início e fim, de modo a aplicar as três equações de equilíbrio, no sentido da convenção positiva, veja trecho AB:

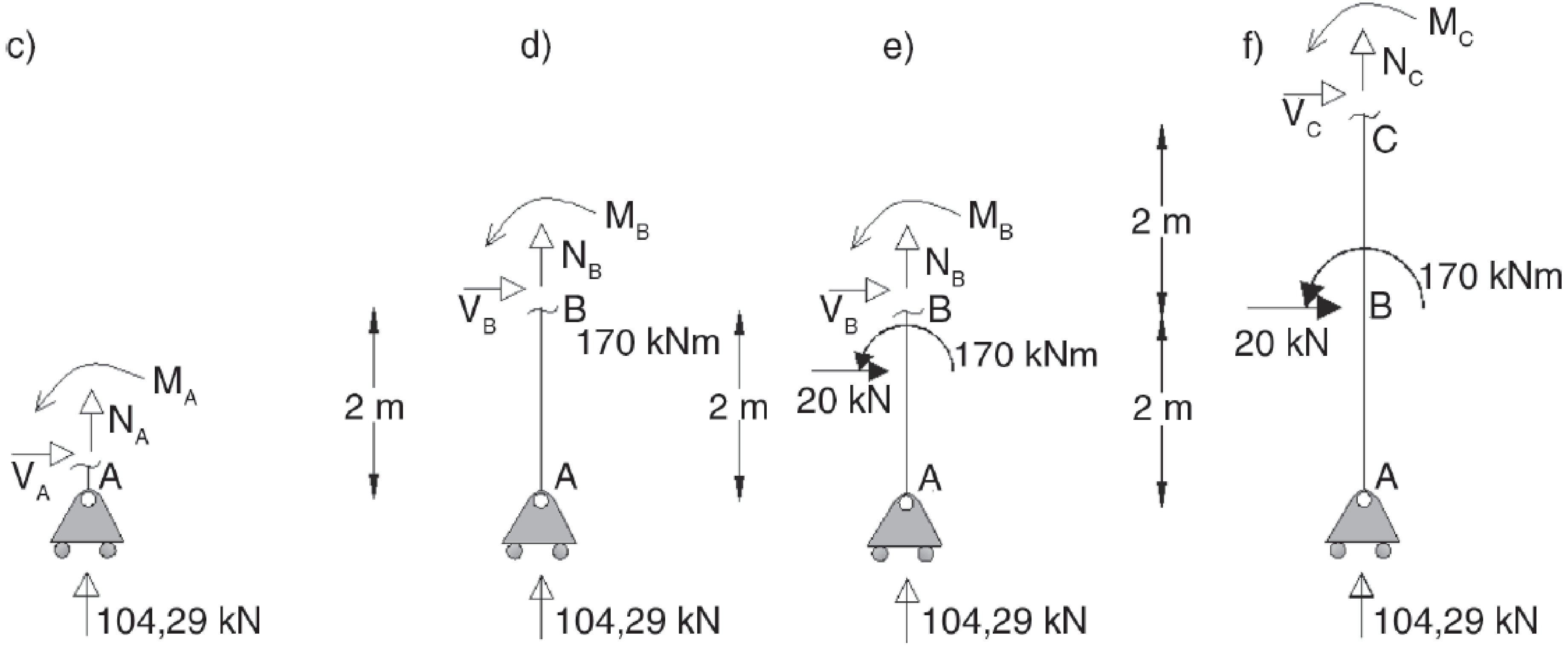
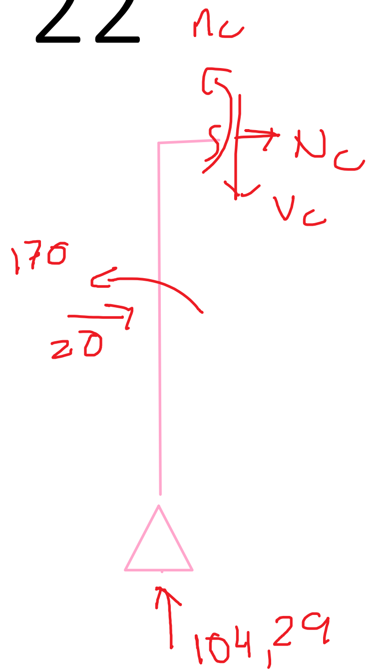


Figura 1.58C-F **Esquema do corte: (c) início do trecho AB; (d) fim do trecho AB; (e) início do trecho BC; (f) fim do trecho BC.**

Exemplo 22



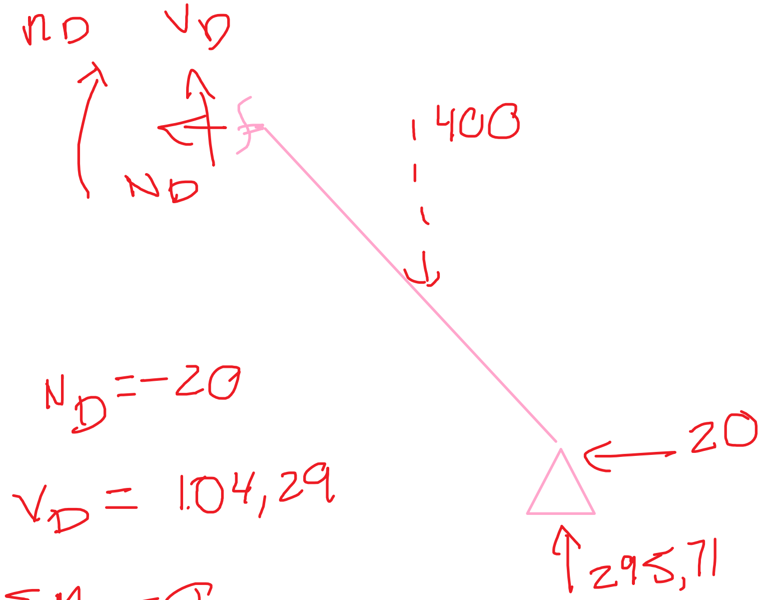
$N_c = -20$

$V_c = 104{,}29$

$\Sigma M_s = 0$:

$M_c + 20 \cdot 2 + 170 = 0$

$M_c = -210$



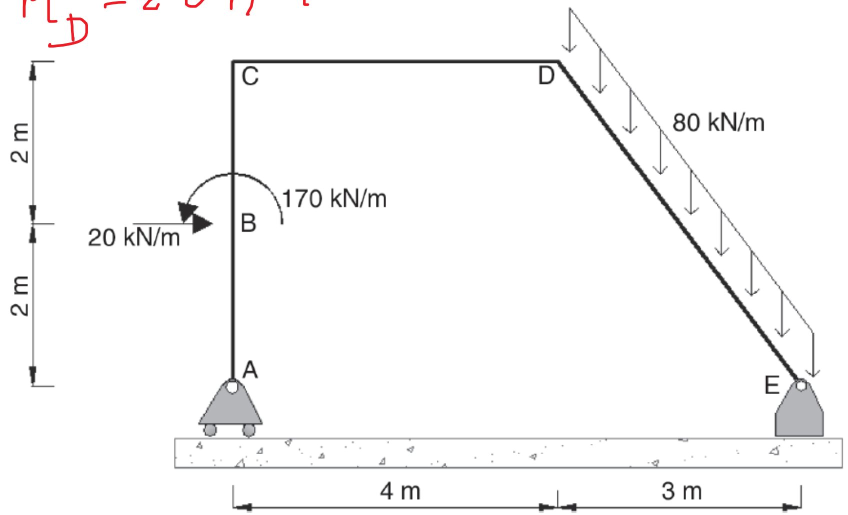
$N_D = -20$

$V_D = 104{,}29$

$\Sigma M_D = 0$

$M_D + 400 \cdot 1{,}5 + 20 \cdot 4 = 295{,}71 \cdot 3$

$M_D = 207{,}14$



Conforme Figura 1.58C: $N_A = -104{,}29$ kN; $V_A = 0$; $M_A = 0$

Conforme Figura 1.58D: $N_B = -104{,}29$ kN; $V_B = 0$; $M_B = 0$

Trecho BC:

Conforme Figura 1.58E: $N_B = -104{,}29$ kN; $V_B = -20$ kN; $M_B = -170$ kNm

Conforme Figura 1.58F: $N_C = -104{,}29$ kN; $V_C = -20$ kN; $M_C = -210$ kNm

Exemplo 22

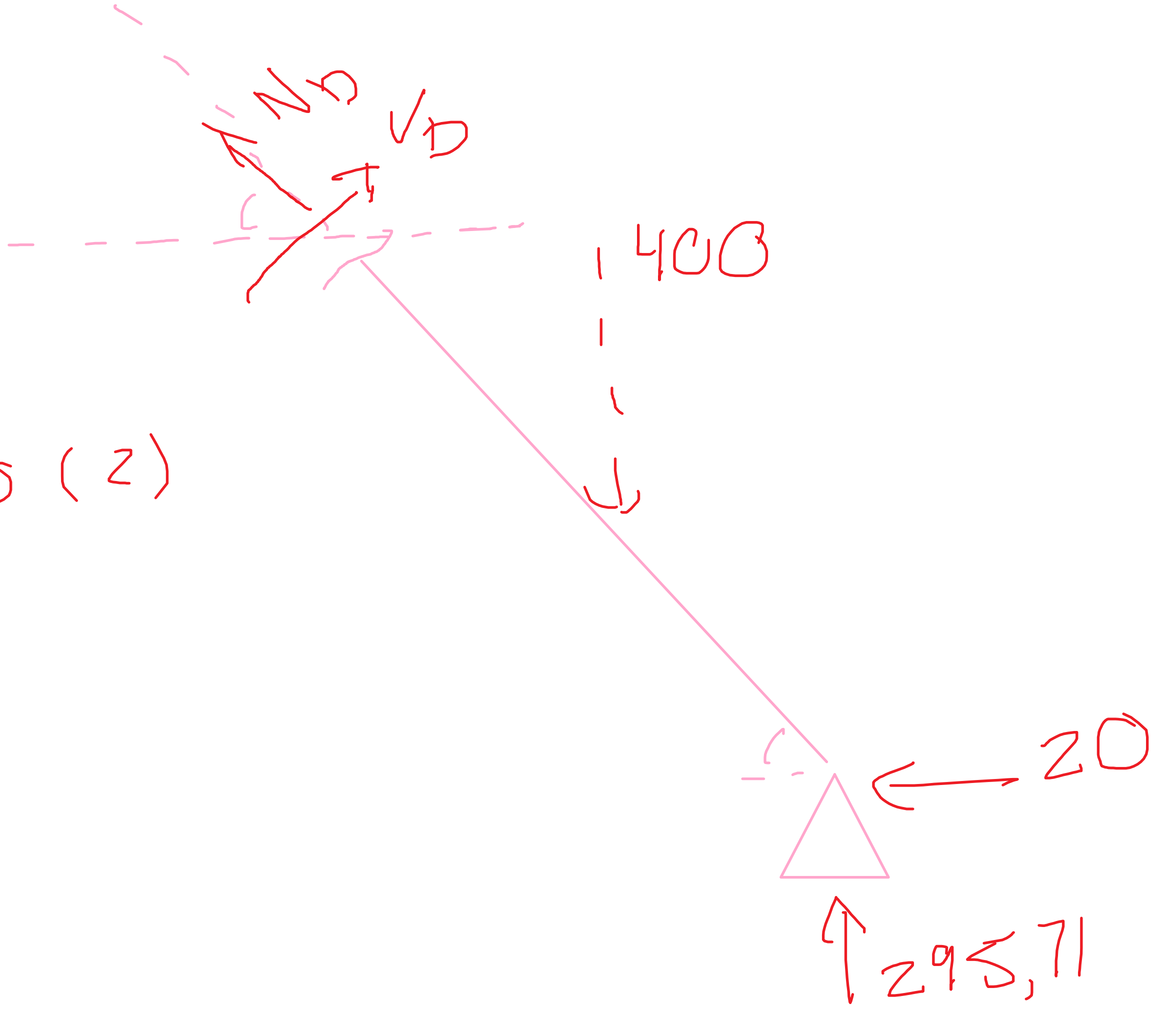
$\Sigma F_x = 0$

$N_D \cos\alpha + 20 - V_D \operatorname{sen}\alpha = 0 \quad (1)$

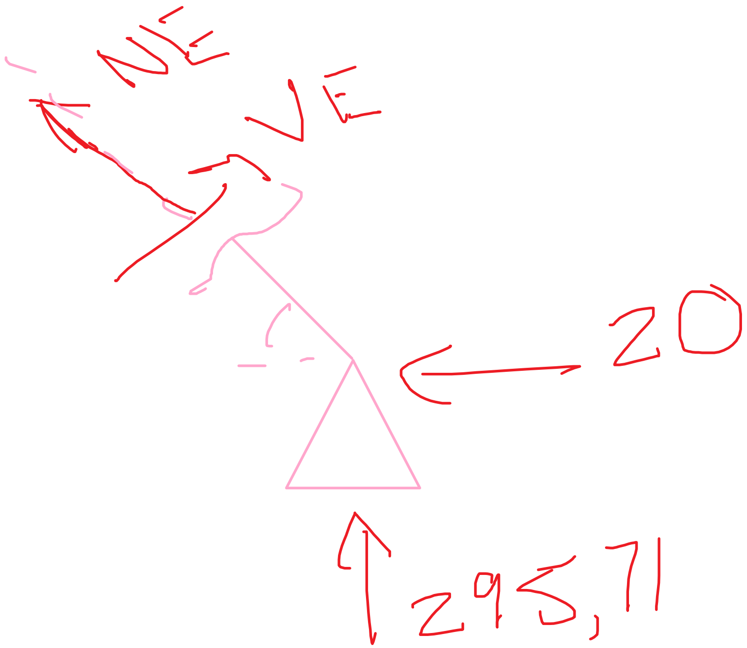
$\Sigma F_y = 0$

$N_D \operatorname{sen}\alpha + V_D \cos\alpha + 295{,}71 - 400 = 0 \quad (2)$

$N_D = 71{,}43 \; ; \; V_D = 78{,}57$



Exemplo 22

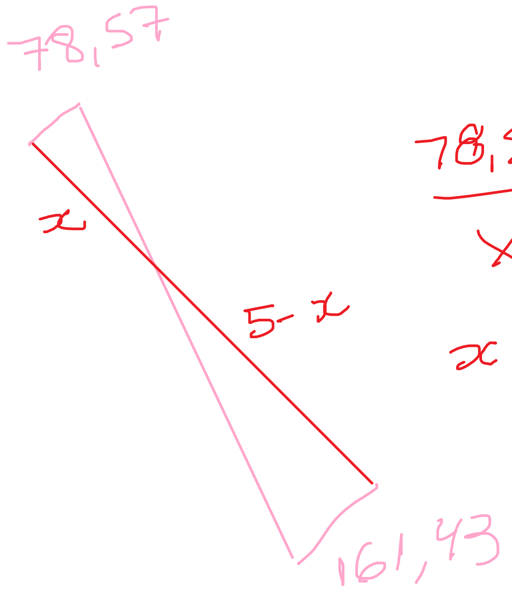


$N_E = -248,57$

$V_E = -161,43$

$M_E = 0$

Exemplo 22



$$\frac{78,57}{x} = \frac{161,43}{5-x}$$

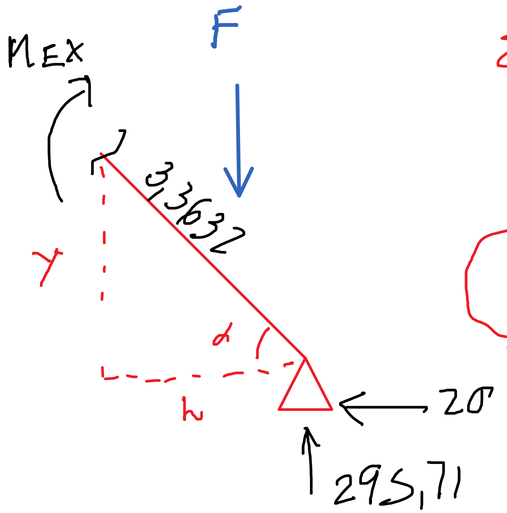
$x = 1,6368\,m$ $(5-x = 3,3632\,m)$

$F = 80 \cdot 3,3632$

$F = 269,06\,kN$

$\sin\alpha = 0,8 \rightarrow y = 2,6906\,m$

$\cos\alpha = 0,6 \rightarrow h = 2,0179\,m$



$\Sigma M_S = 0$

$M_{Ex} + F \cdot \frac{h}{2} + 20 \cdot y = 295,71 \cdot h$

$M_{Ex} = 271,44\,kNm$

Exemplo 22

$$\frac{dM}{dx} = V(x) \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \frac{dM}{dx} = \int_{x_1}^{x_2} V(x)$$

$$M_{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} V(x)\,dx + C$$

$$M_{x_2} = \text{Área}(V)\Big|_{x_1}^{x_2} + \sum_{i=1}^{\text{conc.}} M_i$$

* Área(V) : ALGÉBRICO (tem sinal!!)

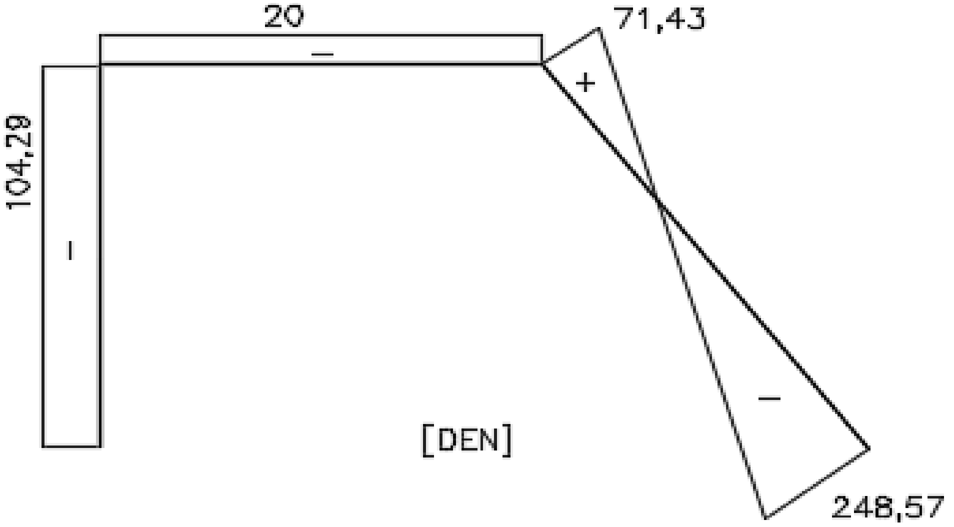
$$M_x = (-20 \cdot 2) + (104{,}29 \cdot 4) + \frac{78{,}57}{2} x - 170$$

$$M_x = 271{,}44 \text{ kNm}$$

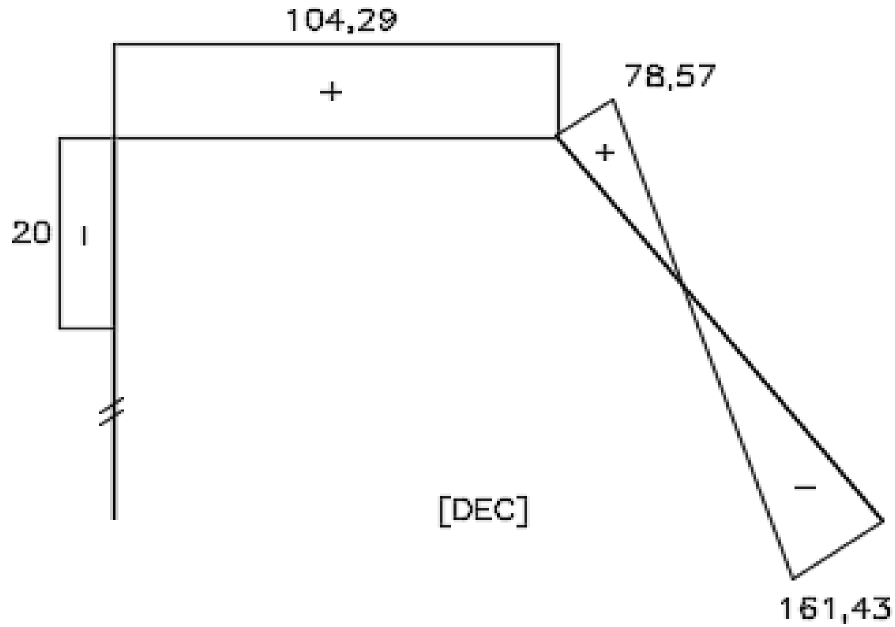
$$M_x = -\left[-\frac{161{,}43}{2} \cdot (5 - x)\right] = 271{,}44$$

(−) : integrando da direita p/ esquerda)

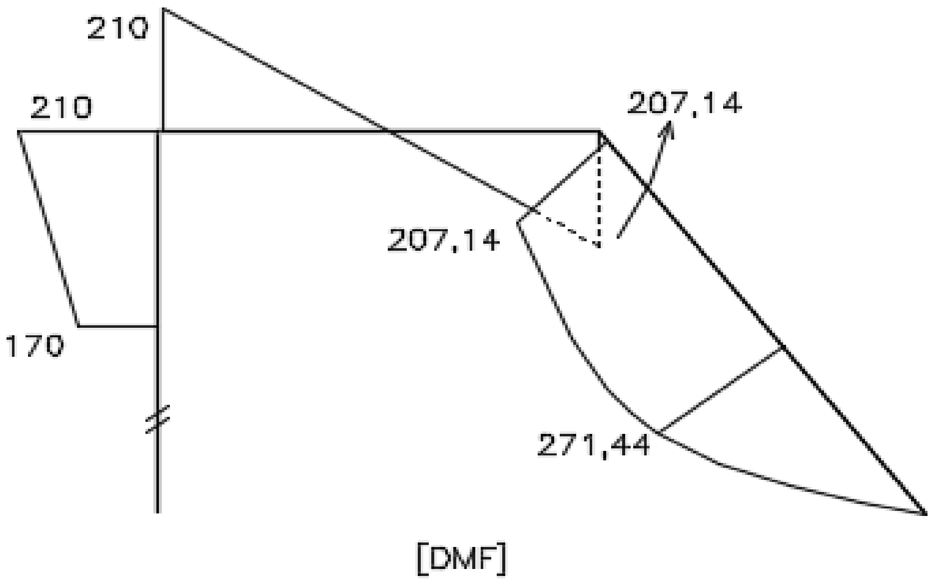
Exemplo 22



20
71,43
104,29
+
–
248,57
[DEN]



104,29
78,57
+
20
–
[DEC]
161,43



210
210
207,14
207,14
170
271,44
[DMF]