

## EVOLUÇÃO UNITÁRIA X REDUÇÃO DE ESTADO

### 1. Dois Tipos de Evolução Temporal

Estudamos, no capítulo anterior, a noção de estado quântico em um instante de tempo  $t$ , que na notação em termos de “kets” se escreve  $|\psi(t)\rangle$ . A questão agora é: como esse estado evolui no tempo? Um estado da Mecânica Clássica evolui a partir de um único conjunto de leis dinâmicas, por exemplo a 2ª lei de Newton ou as duas leis usadas na descrição de Lagrange. Na Física Quântica, o análogo a isso seria a evolução descrita pela equação de Schrödinger, que chamamos “evolução unitária”. Mas como salientou John von Neumann em 1932, na Mecânica Quântica há também um outro tipo de evolução temporal, que descreve o que acontece após uma medição ser realizada, envolvendo a “redução de estado”. Em suma:

(I) *Evolução unitária*, regida pela equação de Schrödinger, descreve um sistema fechado, antes da ocorrência de uma medição. Ela é caracterizada como sendo contínua, linear, determinista e reversível.

(II) *Postulado da projeção*, descreve a redução de estado associada à realização de uma medição, e explica a repetibilidade de medições de posição. Ela é considerada (praticamente) instantânea, não-linear, indeterminista e irreversível.

Para rever esses dois processos, consideremos novamente o experimento de anticorrelação para um pacote monofotônico, em que se constata a repetibilidade dos resultados de medições de posição (Fig. IV.2). A Fig. VI.1 marca três instantes do tempo em que o estado quântico do pacote monofotônico se modifica bastante.

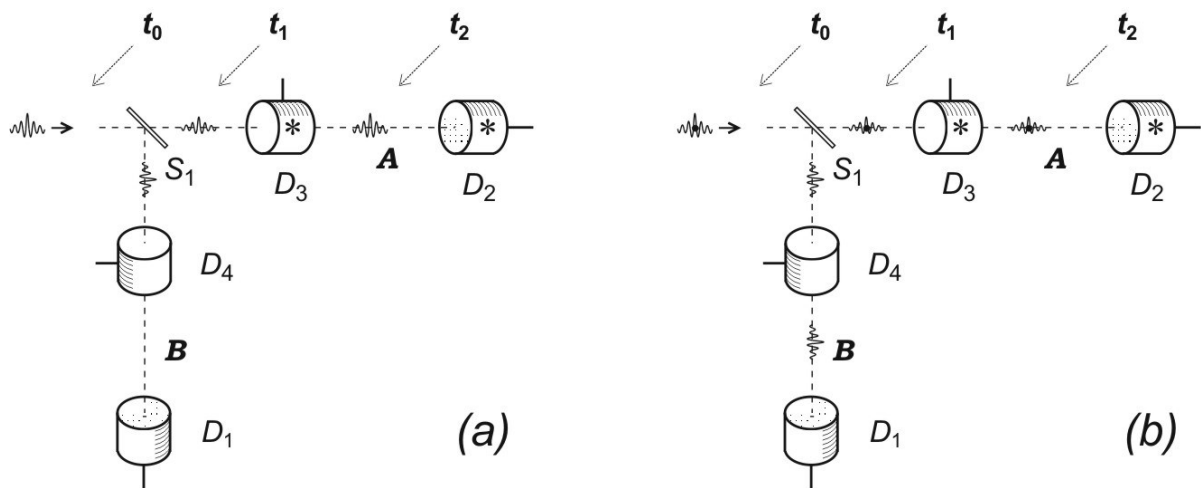


Figura VI.1. Variante do experimento de repetibilidade (Fig. IV.2) em que anotam-se os tempos  $t_0$ ,  $t_1$  e  $t_2$ , supondo que a medição acaba ocorrendo no caminho A. (a) A interpretação ondulatória realista postula uma divisão simétrica de ondas em  $S_1$  (com módulo da amplitude caindo com  $1/\sqrt{2}$ ) e o desaparecimento da onda em B após  $D_1$  (colapso não-local). (b) A interpretação dualista realista postula a mesma divisão simétrica da onda em  $S_1$ , mas com o corpúsculo seguindo por A. Após a detecção em  $D_3$ , a onda vazia em B continua se propagando sem alteração (processo local).

A transição de  $t_0$  para  $t_1$  é regida pela equação de Schrödinger, e tal evolução temporal do estado é dita unitária (indicado na expressão abaixo por “U”). Já vimos como escrever essa evolução:

$$|\psi_A(t_0)\rangle \xrightarrow{U} \frac{1}{\sqrt{2}}|\psi_A(t_1)\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|\psi_B(t_1)\rangle . \quad (\text{VI.1})$$

Aqui consideramos o estado inicial antes de  $S_1$  como correspondente ao pacote de onda no caminho A. A evolução descrita é determinista, no nível dos estados, e também reversível. O estado em  $t_1$  é expresso como uma superposição de autoestados de posição, indicados pelos índices A e B. Por outro lado, o resultado da medição nos detectores  $D_3$  e  $D_4$  é imprevisível. A probabilidade de tal detecção em cada caminho é dada pelo módulo quadrado dos coeficientes (Regra de Born, seção I.6), ou seja,  $|\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 = |\frac{i}{\sqrt{2}}|^2 = \frac{1}{2}$ .

Uma vez que a medição se completa nos medidores de não-demolição, sabemos que o detector que está atrás do que disparou irá disparar também (repetibilidade). Isso é expresso por uma transição diferente da anterior, chamada de “redução de estado”:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|\psi_A(t_1)\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|\psi_B(t_1)\rangle \xrightarrow{P.P.} |\psi_A(t_2)\rangle . \quad (\text{VI.2})$$

A expressão indica que o detector de não-demolição  $D_3$  disparou, de maneira que o estado subsequente é  $|\psi_A\rangle$ . Este é um autoestado de posição que será detectado em  $D_2$  com probabilidade 1 (pois estamos supondo detectores 100% eficientes).

A lei que rege a transição da expressão (VI.2) é às vezes chamada de Postulado da Projeção, o que é indicado por “P.P.” Este postulado foi formulado por Dirac, e de maneira mais completa por John von Neumann (1932). Este exprimiu o postulado de maneira errônea para o “caso degenerado”, o que foi corrigido por Günther Lüders em 1951. O nome “postulado da projeção” foi introduzido apenas no final dos anos 50 por Henry Margenau, que criticava sua validade, pois muitas vezes a partícula sendo medida é destruída (absorvida) durante a detecção, não tendo muito sentido, nestes casos, falar em estado do sistema *após* a medição.<sup>42</sup>

## 2. Evolução Unitária

A evolução unitária pode ser expressa por meio de um operador  $\hat{U}(t,t_0)$ , que indica como um estado inicial em  $t_0$  se transforma ao longo do tempo. Para o processo de divisão de feixe óptico, descrito na eq.(VI.1), podemos escrever:

$$\hat{U}(t_1, t_0)|\psi_A(t_0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\psi_A(t_1)\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|\psi_B(t_1)\rangle . \quad (\text{VI.3})$$

Dado o estado inicial, como o estado final é unívoco, pode-se dizer que a evolução unitária é “determinista”. Por *determinismo*, entende-se que se um estado inicial for dado, juntamente com as condições de contorno, então o estado evoluído em qualquer instante do tempo pode em princípio ser determinado. O termo “criptodeterminismo” (determinismo escondido) é usado para situações em que não se têm acesso às condições iniciais precisas,

<sup>42</sup> VON NEUMANN, J. ([1932] 1955), *Mathematical foundations of quantum mechanics*, Princeton U. Press, p. 439. LÜDERS, G. (1951), “Über die Zustandsänderung durch den Messprozess”, *Annalen der Physik* 8, 322-8. MARGENAU, H. (1959), “Philosophical problems concerning the meaning of measurement in physics”, in CHURCHMAN, C.W. & RATOOSH, P. (orgs.), *Measurement: definitions and theories*, Wiley, New York, pp. 163-76. (ver p. 170).

apesar de o sistema ser considerado determinista, então não se podem fazer previsões corretas para casos individuais.<sup>43</sup>

A evolução unitária é usada para descrever sistemas *fechados*, ao passo que o postulado da projeção se refere a uma situação em que o sistema quântico é aberto, pois a medição extrai informação do sistema subnanoscópico, introduzindo algum tipo de distúrbio. Por “sistema fechado” entendem-se duas situações:

(1) Sistemas que estão *isolados* de campos externos. Como sua energia é conservada, o operador associado à energia, o chamado “hamiltoniano”  $\hat{H}$ , é independente do tempo.

(2) Sistemas que estão sujeitos a campos externos bem determinados, mas que *não reagem* nas entidades físicas que criam os campos. Neste caso pode-se escrever um hamiltoniano que é dependente do tempo:  $\hat{H}(t)$ .<sup>44</sup>

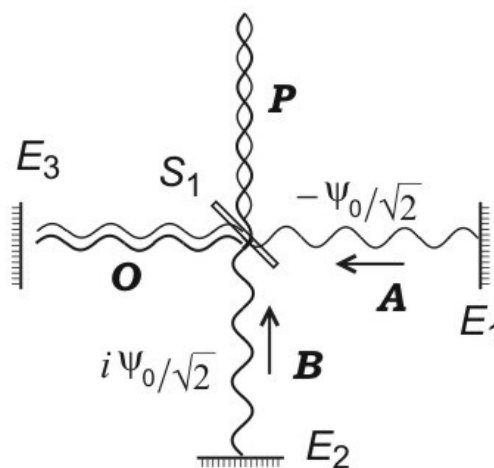
Um exemplo desta última situação é um átomo em um campo elétrico externo oscilante, segundo uma função  $\vec{E}(t)$ . Para que a evolução unitária se aplique, é preciso que o estado do sistema quântico não tenha influência sobre  $\vec{E}(t)$ , que é assim considerado um “campo clássico”.

### 3. Reversibilidade Temporal da Evolução Unitária

A reversibilidade de um sistema físico pode ser estabelecida segundo o seguinte critério. Deixa-se o sistema evoluir entre os instantes  $t_0$  e  $t_1$ , e aí introduz-se uma “inversão do filme” em  $t_1$ , ou seja, faz-se o sistema retrair em sentido inverso o caminho percorrido até então, durante um tempo igual a  $t_1 - t_0$ . Feito isso, inverte-se novamente o filme, e verifica-se se o estado inicial restituído. Na Mecânica Clássica, isso funciona para bolas em uma mesa de bilhar chocando-se sem atrito, mas não se verifica se houver atrito com a mesa.

A reversibilidade pode ser analisada em um divisor de feixe óptico sem perdas, como o da Fig. VI.1. No instante  $t_1$ , pode-se implementar a inversão do feixe por meio de espelhos de reflexão total juntamente com a aplicação do complexo conjugado nas amplitudes (alterando o sinal apenas do componente em  $B$ ), como indicado na Fig. VI.2. O estado inicial acaba sendo restituído, indicando que o sistema é reversível.

*Figura VI.2. Reversão após passagem por espelho semirrefletor. Considere uma situação inicial idêntica ao do interferômetro de Mach-Zehnder, com divisão do feixe em  $S_1$ . O componente que ia pelo caminho A, de amplitude  $\psi_0/\sqrt{2}$ , é invertido em  $E_1$  para  $-\psi_0/\sqrt{2}$ , rumando em sentido oposto; o que ia por B, de amplitude  $i\psi_0/\sqrt{2}$ , é invertido em  $E_2$  para  $i\psi_0/\sqrt{2}$  (neste caso, um sinal adicional é introduzido pelo complexo conjugado, para que a presente definição de reversibilidade funcione). Ao chegarem em  $S_2$ , há superposição destrutiva no caminho P, e o feixe se dirige todo para O, com amplitude  $-\psi_0$ . A inversão final no espelho  $E_3$  leva ao estado  $\psi_0$ , igual ao inicial.*



<sup>43</sup> Termo introduzido por WHITTAKER, E.T. (1943), “Chance, freewill and necessity in the scientific conception of the universe”, *Proceedings of the Physical Society* 55, 459-71.

<sup>44</sup> Ver por exemplo BLUM, K. (1981), *Density matrix theory and applications*, Plenum, New York, pp. 67-69.

#### 4. Representação de Estado no Espaço de Hilbert

Na Fig. V.3, ao exprimir o estado quântico como um vetor que pode ser expresso em diferentes bases de representação, fizemos isso em um espaço vetorial. Como as amplitudes dos estados quânticos podem adotar valores complexos, podem-se representar todos os estados quânticos possíveis de um sistema (e também os estados ondulatórios clássicos, se quiséssemos) como vetores em um espaço vetorial linear complexo, chamado “espaço de Hilbert”. Uma maneira de intuir um espaço vetorial complexo de  $N$  dimensões é imaginar um espaço euclidiano de dimensão  $N$  no qual cada vetor tem  $N-1$  fases associadas, onde cada fase pode variar entre  $0$  e  $2\pi$  (Fig. V.2).

A cada instante, o estado de um sistema quântico fechado é representado por um único vetor no espaço de Hilbert correspondente. Conforme já vimos (seção V.4), o *princípio de superposição* afirma que dados dois estados possíveis para um sistema quântico, então qualquer combinação linear deles também é um estado possível.

Por exemplo, imaginemos que um átomo com um elétron no nível  $p$  se encontra em um campo magnético externo fraco. Este elétron tem acesso (no nível  $p$ ) a 3 subníveis discretos de energia. Portanto, seu estado pode ser representado em um espaço de Hilbert de 3 dimensões, como o da Fig. VI.3. Cada um desses valores de energia está associado a um autoestado de energia. Cada um destes autoestados é representado por vetores ortogonais  $|\phi_i\rangle$  no espaço de Hilbert, com  $i=1,2,3$ . Pois bem, pelo princípio de superposição, qualquer combinação linear  $|\phi\rangle$  destes vetores representa um estado admissível:

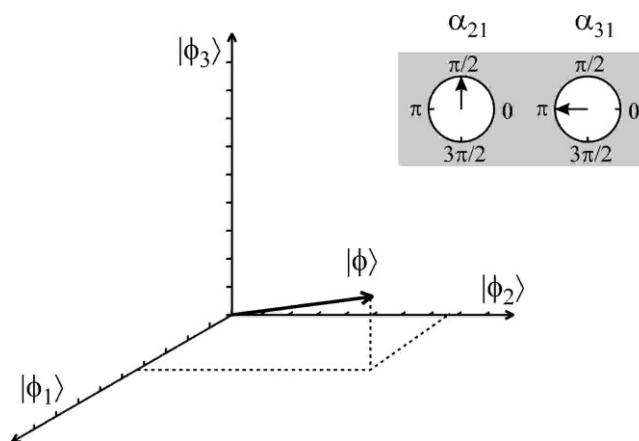
$$|\phi\rangle = a_1 \cdot |\phi_1\rangle + a_2 \cdot |\phi_2\rangle + a_3 \cdot |\phi_3\rangle, \quad (\text{VI.4})$$

onde os coeficientes  $a_i$  são números complexos que satisfazem uma condição de *normalização*:

$$\sum_i |a_i|^2 = 1. \quad (\text{VI.5})$$

Figura VI.3. Vetor de estado em um espaço de Hilbert de 3 dimensões. Dada uma base  $|\phi_i\rangle$ , qualquer vetor  $|\phi\rangle$  pode ser caracterizado por suas componentes complexas em relação a esta base. O desenho deve ser visto como um espaço euclidiano, onde associam-se 2 fases ao vetor de estado ( $\alpha_{21}=\pi/2$ , entre  $|\phi_2\rangle$  e  $|\phi_1\rangle$ , e  $\alpha_{31}=\pi$ , entre  $|\phi_3\rangle$  e  $|\phi_1\rangle$ ). O vetor representado no desenho é:

$$|\phi\rangle = \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot |\phi_1\rangle + i\frac{3}{4} \cdot |\phi_2\rangle - \frac{1}{4} \cdot |\phi_3\rangle.$$



A evolução unitária pode ser imaginada como uma “rotação” contínua do vetor de estado no espaço de Hilbert (Fig. VI.4), podendo incluir inversões de vetor. A expressão algébrica deste operador de evolução, no caso de um hamiltoniano  $\hat{H}$  independente do tempo, assume a seguinte forma simplificada (com  $t_0 = 0$ , ver seção VI.1):

$$\hat{U}(t) = \exp(-i\hat{H}t/\hbar). \quad (\text{VI.6})$$

Pensando na evolução unitária como rotações e inversões no espaço de Hilbert, fica fácil intuir que o “ângulo” entre dois vetores no espaço de Hilbert (e portanto seu produto escalar) permanece constante se ambos forem submetidos à mesma evolução linear. Como corolário disto, podemos dizer que uma evolução unitária leva estados ortogonais a estados ortogonais.

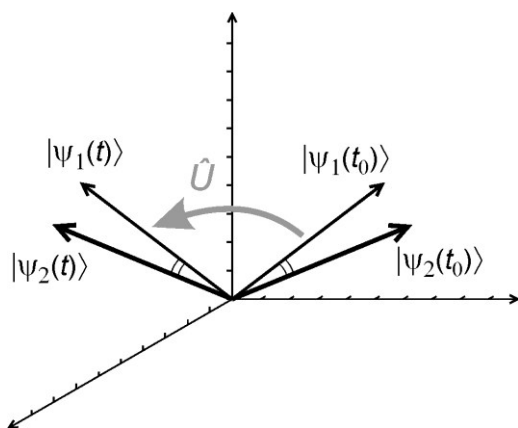


Figura VI.4. Evolução unitária de vetores no espaço de Hilbert.

Por outro lado, a redução de estado (que ocorre com uma medição) é representada no espaço de Hilbert como um salto entre um vetor de estado e um autoestado do observável sendo medido. Na Fig. VI.5, o estado  $|\phi\rangle$  é uma superposição dos estados  $|\phi_i\rangle$ , conforme a eq.(VI.4). Supondo que a medição fornece o valor correspondente a  $|\phi_2\rangle$ , o estado após a redução será o próprio  $|\phi_2\rangle$ . A probabilidade de isto acontecer acaba sendo o módulo quadrado do produto escalar  $\langle\phi_2|\phi\rangle$ , que é o coeficiente  $a_2$  expresso de acordo com a eq.(VI.4), e que na figura aparece como a projeção de um vetor sobre o outro.

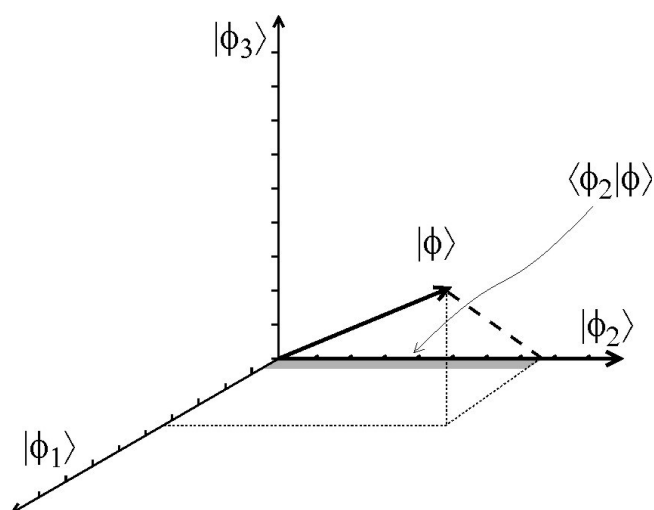


Figura VI.5. A projeção  $\langle\phi_2|\phi\rangle$  está indicada pela área cinza.

## 5. Origens da Noção de Colapso e o Papel do Observador

As origens da noção de “colapso de onda” se encontram no chamado “paradoxo da quantidade” encontrado por J.J. Thomson (1897) e por W.H. Bragg (1906) em suas pesquisas com raio X.<sup>45</sup> A ideia de “saltos quânticos” associada ao trabalho de Max Planck (1900) e Niels Bohr (1913) envolve uma questão semelhante, só que de um ponto de vista corpuscular.

Ao desenvolver sua Mecânica Ondulatória, Schrödinger não precisou considerar as mudanças da função de onda decorrentes de uma medição. Quem fez isso pela primeira vez foi Heisenberg, ao analisar a medição de posição de um elétron, no famoso artigo de 1927.<sup>46</sup> Introduziu a noção de que “cada determinação de posição reduz o pacote de onda de volta a sua extensão original”.

Esta seria a chave para descrever as trajetórias lineares da radiação em uma câmara de nuvem de Wilson (Fig. VI.6), conforme discutido no 5º Congresso de Solvay, daquele mesmo ano. Nesta conferência, Max Born considerou uma formulação dada por Einstein ao “paradoxo da quantidade”, associado à dualidade onda-partícula: “Uma preparação radioativa emite em todas as direções partículas  $\alpha$ ; faz-se com que estas fiquem visíveis através do método da nuvem de Wilson. Ora, se se associar a cada processo de emissão uma onda esférica, como se pode compreender que o rastro de cada partícula  $\alpha$  se mostra como uma linha (mais ou menos) reta?”

Born em seguida explicou “como o caráter corpuscular do fenômeno pode ser conciliado aqui com a representação por ondas”, fazendo uso da “noção de ‘redução do pacote de probabilidade’ desenvolvida por Heisenberg”, que não ocorre “durante o tempo em que não se observa ionização alguma”. Para descrever o que ocorre após a observação, deve-se “reduzir” o pacote de ondas para a vizinhança imediata dessas gotículas”.<sup>47</sup>

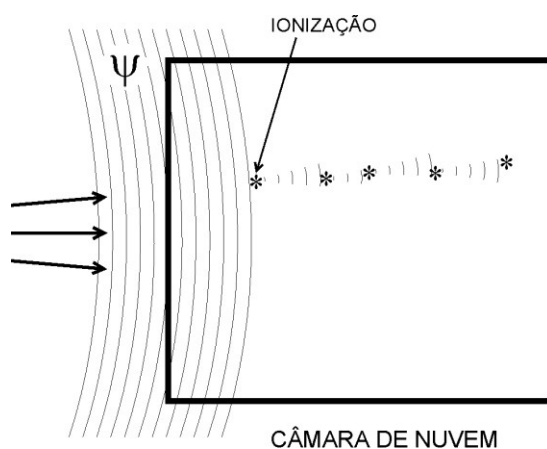


Figura VI.6. Colapso em uma câmara de nuvem de Wilson. Ionizações estão indicadas por asterisco.

<sup>45</sup> WHEATON, B.R. (1983), *The tiger and the shark: empirical roots of wave-particle dualism*, Cambridge University Press, pp. 76, 86. Discutimos isso nas aulas paralelas de História da Física Quântica, Cap.II.

<sup>46</sup> HEISENBERG, W. (1927), “Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik”, *Zeitschrift für Physik* 43, 172-198. Tradução em inglês: “The physical content of quantum kinematics and mechanics”, in WHEELER & ZUREK (1983), op. cit. (nota 15), pp. 62-84. Citação da p. 74.

<sup>47</sup> SOLVAY, INSTITUT INTERNATIONAL DE PHYSIQUE (1928), *Electrons et photons – Rapports et discussions du Cinquième Conseil de Physique tenu a Bruxelles de 24 au 29 Octobre 1927*, Gauthier-Villars, Paris. Em inglês: BACCIAGALUPPI, G. & VALENTINI, A. (orgs.) (2009), *Quantum theory at the crossroads: reconsidering the 1927 Solvay Conference*, Cambridge U. Press. Tradução em português do capítulo “Discussão geral das novas ideias formuladas”, in PESSOA JR., O. (org.) (2001), *Fundamentos da física 2 - Simpósio David Bohm*, Livraria da Física, São Paulo, pp. 139-72; citação da pp. 250-1 do original.

Na Fig. VI.6, antes da redução de estado, o sistema quântico pode ser detectado em qualquer posição do eixo vertical. Porém, logo após a primeira ionização, se ocorrer outra ionização, ela ocorrerá na mesma posição vertical (no caso de uma onda plana propagando-se na horizontal), exprimindo a repetibilidade das medições de posição. Porém, tal repetibilidade só é garantida para uma segunda medição que ocorra “imediatamente” depois da primeira; pois se um tempo razoável transcorrer, a onda associada ao sistema quântico em questão irá difratar, espalhando-se como uma onda esférica. Na figura, como as detecções ocorrem frequentemente, a série de pontos forma uma trajetória quase retilínea.

Neste mesmo congresso, Paul Dirac considerou o problema do colapso enfocando a perda da capacidade das componentes da função de onda de interferir entre si. “Pode-se dizer que a natureza escolhe aquele dentre os  $\psi_n$  que convém [...] A escolha, uma vez feita, é irrevogável e afetará todo o estado futuro do mundo” (p. 262).

Heisenberg criticou esta ideia de que “a natureza faz uma escolha”. “Eu diria, preferencialmente, conforme fiz em meu último artigo, que o *próprio observador* faz a escolha, pois é só no momento em que a observação é feita que a ‘escolha’ se torna uma realidade física e que a relação das fases nas ondas, o poder de interferência, é destruída” (pp. 264-5).

Esta ênfase no papel do observador teria seu auge nos anos 1930, com a “abordagem subjetivista” de Fritz London & Edmond Bauer (1939), segundo a qual a consciência humana seria responsável pelo colapso (ver seção IX.2).

## 6. A Não-Localidade no Colapso

Em sua intervenção neste 5º Congresso de Solvay, Einstein apresentou o seguinte experimento mental (Fig. VI.7). Um pacote de onda incide em uma fenda e é difratado, passando a ser representado por uma onda esférica. Esta onda se propaga então em direção a um detector circular (uma tela fosforescente).

“Se  $|\psi|^2$  fosse simplesmente encarada como a probabilidade de que em um certo lugar uma partícula determinada se encontre em um instante determinado, poderia acontecer que *um mesmo* processo elementar produzisse uma ação *em dois ou mais* lugares do anteparo. Porém, a interpretação, segundo a qual  $|\psi|^2$  exprime a probabilidade de que *esta* partícula se encontre em um lugar determinado, supõe um mecanismo de ação à distância muito particular, que impede que a onda continuamente repartida no espaço produza uma ação em *dois* lugares da tela” (p. 255).

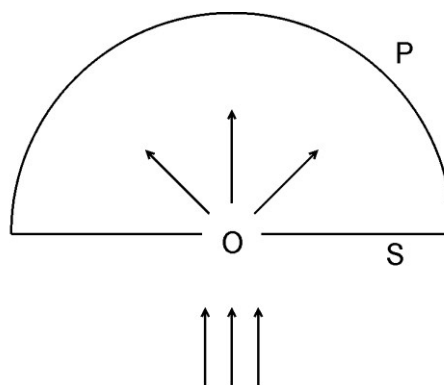


Figura VI.7. Não-localidade no colapso da onda, segundo Einstein.

Esta constatação se aplica especialmente à interpretação ondulatória, que atribui uma realidade a  $\psi$ . A redução do pacote de onda por si só já estaria associada a uma *ação à distância* ou efeito *não-local*. Esta incômoda situação pode ser considerada uma “anomalia” da interpretação ondulatória,<sup>48</sup> assim como o silêncio com relação à realidade antes da medição seria uma anomalia da interpretação da complementaridade (e a atualização do passado no presente, seção III.4, uma anomalia da versão realista da complementaridade), e as ondas vazias (seção III.1) seriam uma anomalia de certas interpretações dualistas realistas. Veremos adiante, porém, quando estudarmos a desigualdade de Bell, que a não-localidade que está associada ao colapso também está presente em qualquer interpretação realista da Teoria Quântica, mesmo as dualistas.

---

<sup>48</sup> O termo “anomalia” era usado por REICHENBACH, H. (1944), *Philosophical foundations of quantum mechanics*, University of California Press, Berkeley. Ele também explorava as distinções entre as interpretações “ondulatória” e “corpuscular”.