Cálculo III - Poli - 2023

Gláucio Terra
glaucio@ime.usp.br
https://www.ime.usp.br/∼glaucio

Departamento de Matemática
IME - USP

26 de abril de 2023

Curvas

Ideia Intuitiva

Uma *curva* em $\mathbb{R}^m$ é um subconjunto “unidimensional” de $\mathbb{R}^m$.

Definição

Uma *curva parametrizada* em $\mathbb{R}^m$ é uma aplicação $\gamma : I \to \mathbb{R}^m$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo.

- Diz-se que γ é uma *parametrização* para sua imagem $\operatorname{Im}\gamma \subset \mathbb{R}^m$.
- É frequente usar a nomenclatura *curva* para designar tanto “curvas parametrizadas” como “subconjuntos unidimensionais de $\mathbb{R}^m$ ”, ficando o significado implícito pelo contexto.

Comprimento de Curvas

Definição

Seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ uma curva de classe C^1. Definimos o *comprimento de* γ por

$$\ell = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t$$

- Chamamos "$\|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t$" de *elemento de arco*.
- Podemos relaxar a regularidade de γ; por exemplo, basta que seja C^1 *por partes*.

Integrais de Linha de Campos Escalares, com respeito ao comprimento de arco

Definição

Sejam $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ uma curva de classe C^1 e $f : \operatorname{Im}\gamma \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida na imagem de γ. Definimos a *integral de f ao longo de γ* por

$$\int_\gamma f \, \mathrm{d}s = \int_a^b f \circ \gamma(t) \, \|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t$$

- Interpretando f como "densidade linear", $\int_\gamma f \, \mathrm{d}s$ é a "massa" da curva.
- Podemos definir *centro de massa* e *momentos de inércia* de forma análoga aos casos já estudados no contexto de integrais duplas e triplas.

Integrais de Linha de Campos Vetoriais (integrais do tipo trabalho)

Considere:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ contínua (*campo de forças*)
- $\gamma : [a, b] \to \Omega$ de classe C^1 (*função horária*).

Definição (integral de linha de campo vetorial)

Definimos a *integral de linha de F ao longo de* γ por:

$$\int_\gamma F \cdot \mathrm{d}\gamma = \int_a^b \langle F \circ \gamma(t), \gamma'(t) \rangle \, \mathrm{d}t$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno canônico de $\mathbb{R}^3$.
INTERPRETAÇÃO: *trabalho* do campo F ao longo de γ.

Exemplo: o Teorema da Energia Cinética

Considere uma partícula de massa m que se desloca no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ sob ação de um campo de forças contínuo $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$. Suponha que a função horária $\gamma : [a, b] \to \Omega$ da partícula seja solução da EDO

$$mx'' = F(x)$$

i.e. o movimento respeita a lei de Newton. Então o trabalho realizado por F ao longo de γ coincide com a variação de energia cinética:

$$\int_\gamma F \cdot \mathrm{d}\gamma = \frac{1}{2}m\|\gamma'(b)\|^2 - \frac{1}{2}m\|\gamma'(a)\|^2$$

Outra notação para integrais de linha de campos vetoriais

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, $F = (P, Q, R) : \Omega \to \mathbb{R}^3$ contínua e $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ curva de classe C^1. A integral $\int_\gamma F \cdot \mathrm{d}\gamma$ também pode ser denotada por

$$\int_\gamma P(x, y, z)\,\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\,\mathrm{d}y + R(x, y, z)\,\mathrm{d}z$$

Invariância sob Reparametrizações

Definição

Sejam $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ e $\gamma_2 : [c, d] \to \mathbb{R}^m$ curvas de classe C^1. Diz-se que

- γ_1 e γ_2 diferem por uma *reparametrização que preserva orientação* se existir $g : [c, d] \to [a, b]$ de classe C^1 tal que $\gamma_2 = \gamma_1 \circ g$, $g(c) = a$ e $g(d) = b$.
- γ_1 e γ_2 diferem por uma *reparametrização que inverte orientação* se existir $g : [c, d] \to [a, b]$ de classe C^1 tal que $\gamma_2 = \gamma_1 \circ g$, $g(c) = b$ e $g(d) = a$.

Invariância sob Reparametrizações

Proposição

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ aberto, $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$ contínua, $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ e $\gamma_2 : [c, d] \to \mathbb{R}^m$ curvas de classe C^1.

- se γ_1 e γ_2 diferem por uma reparametrização que preserva orientação, então $\int_{\gamma_1} F \cdot \gamma_1 = \int_{\gamma_2} F \cdot \gamma_2$.
- se γ_1 e γ_2 diferem por uma reparametrização que inverte orientação, então $\int_{\gamma_1} F \cdot \gamma_1 = -\int_{\gamma_2} F \cdot \gamma_2$.

Divergente

Definição

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ aberto e $F = (F_1, \ldots, F_m) : \Omega \to \mathbb{R}^m$ campo vetorial cujas componentes $F_1, \ldots, F_m$ admitem derivadas parciais em Ω. O *divergente de F* é o campo escalar $\operatorname{div} F : \Omega \to \mathbb{R}$ dado por

$$(\forall x \in \Omega) \ \operatorname{div} F(x) = \sum_{i=1}^{m} \partial_{x_i} F_i(x).$$

Se F for derivável em $x \in \Omega$, tem-se

$$\operatorname{div} F(x) = \operatorname{tr} \mathrm{D}F(x).$$

Rotacional

Definição

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto e $F = (F_1, F_2, F_3) : \Omega \to \mathbb{R}^3$ campo vetorial cujas componentes F_1, F_2, F_3 admitem derivadas parciais em Ω. O *rotacional de F* é o campo vetorial $\text{rot } F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

i.e. as componentes de $\text{rot } F$ são obtidas expandindo-se o "determinante simbólico" acima.

Exercício

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ campo escalar e $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ campo vetorial. Com hipóteses de regularidade adequadas a serem colocadas sobre φ e F, prove as seguintes identidades:

a) $\operatorname{div} \varphi F = \varphi \operatorname{div} F + \operatorname{grad} \varphi \cdot F$

b) $\operatorname{rot} \varphi F = \varphi \operatorname{rot} F + \operatorname{grad} \varphi \times F$

c) $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0$

d) $\operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0$

Campos Conservativos

Definição

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Um campo vetorial $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$ diz-se *conservativo* se existir $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ derivável tal que

$$\operatorname{grad} \varphi = F.$$

Caso afirmativo, uma tal φ chama-se *potencial* para F.

Condição Necessária para Existência de Potencial

Proposição

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ aberto e $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$ um campo conservativo de classe C^1, com $m = 2$ ou $m = 3$. Então $\operatorname{rot} F = 0$.

Formas Diferenciais Exatas

Formas Diferenciais de Grau 1

Uma *forma diferencial* de grau 1 num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é uma expressão

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

onde $P, Q : \Omega \to \mathbb{R}$.

- Diz-se que a forma diferencial $\eta = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ é *exata* se existir uma função derivável $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ cuja diferencial total $\mathrm{d}\varphi = \partial_x \varphi\,\mathrm{d}x + \partial_y \varphi\,\mathrm{d}y$ coincida com η, i.e. se

$$\partial_x \varphi = P \quad \text{e} \quad \partial_y \varphi = Q.$$

- Noutras palavras, η é exata se, e somente se, o campo $F = (P, Q) : \Omega \to \mathbb{R}$ for conservativo; caso afirmativo, a condição acima é equivalente a ser φ potencial para F.

A integral de linha de um campo conservativo independe do caminho

Proposição

Sejam F um campo vetorial contínuo no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ e $\gamma : [a, b] \to \Omega$ de classe C^1. Suponha que F admita potencial φ. Então:

$$\int_\gamma F \cdot \mathrm{d}\gamma = \varphi\big(\gamma(b)\big) - \varphi\big(\gamma(a)\big).$$

Exemplo (Conservação da Energia Mecânica)

Sejam F um campo de forças contínuo num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Suponha que F admita potencial $-\varphi$ e que uma partícula de massa m se desloque em Ω sob ação de F com função horária $\gamma : [t_0, t_1] \to \Omega$ governada pela lei de Newton. Então a energia mecânica se conserva, i.e.

$$\frac{1}{2} m \|\gamma'(t_0)\|^2 + \varphi\big(\gamma(t_0)\big) = \frac{1}{2} m \|\gamma'(t_1)\|^2 + \varphi\big(\gamma(t_1)\big).$$

Independência do Caminho de Integração

Definição (conexidade)

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Diz-se que Ω é *conexo por caminhos* se, para quaisquer $p, q \in \Omega$, existir uma poligonal contida em Ω ligando p e q.

Definição (independência do caminho)

Seja $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$ um campo vetorial contínuo no aberto conexo por caminhos $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Diz-se que F satisfaz a *propriedade da independência do caminho de integração* se, para quaisquer $p, q \in \Omega$ e γ_1, γ_2 curvas C^1 por partes em Ω ligando p a q, tem-se

$$\int_{\gamma_1} F \cdot \mathrm{d}\gamma_1 = \int_{\gamma_1} F \cdot \mathrm{d}\gamma_2.$$

Independência do Caminho de Integração

Proposição

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ aberto conexo por caminhos e F campo vetorial contínuo em Ω. Então F é conservativo se, e somente se, satisfizer a propriedade da independência do caminho de integração. Caso afirmativo, fixado $p \in \Omega$, F admite a função potencial $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x) := \int_{\gamma} F \cdot \mathrm{d}\gamma$$

onde γ é um caminho C^1 por partes qualquer ligando p a x.

Condições Necessárias e Suficientes para um Campo Vetorial ser Conservativo

Proposição

Seja F um campo vetorial contínuo no aberto conexo por caminhos $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Considere as seguintes condições:

I) F é conservativo.

II) F satisfaz a propriedade da independência do caminho de integração.

III) $\int_\gamma F \cdot \mathrm{d}\gamma = 0$ para todo caminho fechado C^1 por partes γ com imagem contida em Ω.

IV) (caso $m = 2, 3$ e $F \in \mathrm{C}^1$) F é irrotacional, i.e. $\mathrm{rot}\ F = 0$.

Então *I*) $\Leftrightarrow$ *II*) $\Leftrightarrow$ *III*) $\Rightarrow$ *IV*), valendo a última implicação caso $m = 2$ ou $m = 3$ e $F \in \mathrm{C}^1$.

Caso $m = 2$ ou $m = 3$ e $F \in \mathrm{C}^1$, vale a recíproca da última implicação se Ω for um aberto *simplesmente conexo*.

Mais Nomenclatura sobre Curvas

Definição

Seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ uma curva. Diz-se que γ é:

- *simples* se $x < y$ em $[a, b]$ e $\gamma(x) = \gamma(y)$ implica $x = a$ e $y = b$.
- *fechada* se $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Teorema da Curva de Jordan

Teorema

Seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ uma curva contínua fechada simples. Então $\mathbb{R}^2 \setminus \operatorname{Im} \gamma$ é a união de dois abertos conexos dos quais $\operatorname{Im} \gamma$ é fronteira, sendo um deles limitado (chamado *interior* de γ) e outro ilimitado (chamado *exterior* de γ).

Teorema de Green

Teorema

Seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ uma curva fechada simples, C^1 por partes, orientada no sentido anti-horário, e K o interior de γ. Sejam P e Q funções de classe C^1 num aberto contendo $K \cup \operatorname{Im}\gamma$. Então

$$\int_\gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_K (\partial_x Q - \partial_y P)\,\mathrm{d}A(x, y).$$