Soluções

1 - A expressão significa que quanto mais x se aproxima do valor 2 mais a função $f(x)$ se aproxima do valor 5. Além disso, o limite significa que sempre podemos aproximar x ainda mais do valor 2 para que $f(x)$ se aproxime ainda mais do valor 5. Por exemplo, suponhamos que eu queira obter o valor $f(x) = 4.99$, que é bastante próximo de 5; o limite diz que sempre posso obter algum x tal que $f(x) = 4.99$ - basta pegar um x suficientemente próximo de 2. Se eu quisesse eu também poderia obter, por exemplo, $f(x) = 4.9999999$; bastaria tomar um x ainda mais próximo de 2.

É possível obter uma função tal que $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$ e, ao mesmo tempo, $f(2) = 3$, caso a função f seja descontínua no ponto $x = 2$. Isso pois o limite diz respeito apenas ao que acontece quando x se aproxima de 2, mas não diz nada sobre o que acontece quando x de fato se iguala a 2. Um exemplo de função que satisfaz tal propriedade seria:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{se } x \neq 2 \\ 3, & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

2 - A expressão significa que quando x se aproxima de 1 tomando somente valores menores do que 1 (limite lateral pela esquerda), o valor da função $f(x)$ se aproxima cada vez mais do valor 3; e quando x se aproxima de 1 tomando apenas valores maiores do que 1 (limite lateral pela direita), o valor de f se aproxima cada vez mais de 7.

Um limite existe se, e somente se, ambos os limites laterais existem e são iguais. Como nesse caso os limites laterais, embora existam, são diferentes, o limite não existe.

3 - a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = \quad \to \dfrac{0}{0}$

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$S = 4 \,,\; P = 3$

$\therefore\; x = 1$ ou $x = 3$

$\therefore\; x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1)$

$= \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-3)(x-1)}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3} x - 1 = 2 \;//$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} \cdot \left(\dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{2}}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} \right) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\cancel{x - 2}}{\cancel{(x-2)}(\sqrt{x} + \sqrt{2})} = \quad \to \dfrac{0}{0}$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \;//$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = \dfrac{1 - 4 + 3}{-2} = 0 \;//$

d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2} \quad \to \dfrac{0}{0}$

$x^2 + x - 2 = 0 \;/\; S = -1 \,,\; P = -2$

$\therefore\; x = 1$ ou $x = -2$

$\therefore\; x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$

1 é raiz de $x^3 - x^2 + x - 1$

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^3 - x^2 + x - 1 & x - 1 \\ \hline
- & x^3 - x^2 & x^2 + 1 \\ \hline
 & x - 1 & \\
- & x - 1 & \\ \hline
 & 0 &
\end{array}
$$

$\therefore\; x^3 + x^2 + x - 1 =$

$= (x-1) \cdot (x^2 + 1)$

$\therefore\; \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x^2+1)\cancel{(x-1)}}{(x+2)\cancel{(x-1)}} =$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 1}{x + 2} = \dfrac{2}{3} \;//$

4 - a) A expressão significa que quanto mais x se aproxima do valor 3 maior será o valor de $f(x)$. Se quiséssemos, por exemplo, achar algum valor de x para o qual $f(x)$ tem o valor enorme de 10^{999}, sabemos que isso poderia ser feito tomando um x suficientemente próximo de 3.

b) Significa que quanto mais x se aproxima de 4, com $x > 4$, menor será o valor de $f(x)$. Analogamente ao exemplo do item (a), pelo limite sabemos que poderíamos tomar um $x > 4$ suficientemente próximo a 4 para obter $f(x) = -10^{-999}$, por exemplo.

c) Significa que, para valores de x suficientemente grandes, quanto maior for o valor de x mais $f(x)$ se aproximará do valor $f(x) = 5$. Se quiséssemos, por exemplo, obter algum x para o qual $f(x) = 4.9999$, bastaria tomar um x grande o suficiente.

d) Significa que, para valores de $x < 0$ e com valor absoluto suficientemente grande, quanto menor for o valor de x mais $f(x)$ se aproximará do valor $f(x) = 3$. Se quiséssemos, por exemplo, obter algum x para o qual $f(x) = 2.9999$, bastaria tomar um $x < 0$ cujo módulo é suficientemente grande.

5-

a) $\lim\limits_{x \to 5^+} \dfrac{6}{x-5} = +\infty$, pois $x-5>0$ para $x>5$ $(x \to 5^+)$

b) $\lim\limits_{x \to 5^-} \dfrac{6}{x-5} = -\infty$, pois $x-5<0$ para $x<5$ $(x \to 5^-)$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\overbrace{x-1}^{\to -1}}{\underbrace{x^2(x+2)}_{\to 0\,,\ >0}} = -\infty$, pois $x^2(x+2)>0$ para $x \to 0$

d) $\lim\limits_{x \to 0^-} \underbrace{\dfrac{1}{|x|}}_{\to +\infty} - \overbrace{\dfrac{1}{2x}}^{\to +\infty} = +\infty$

∴ indeterminado

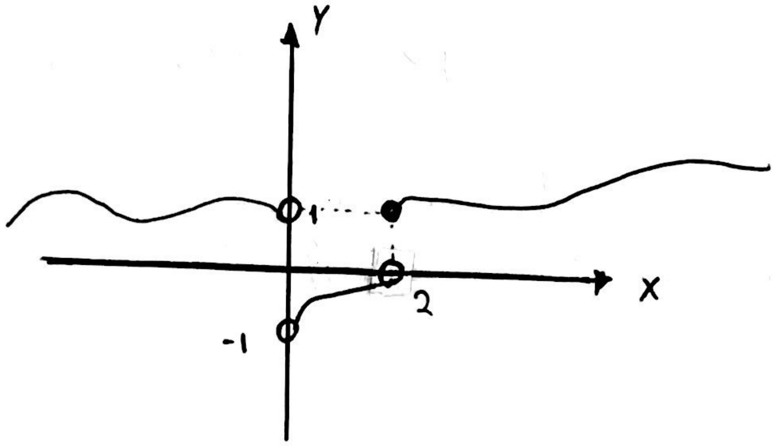
→ pois $|x| = x$ se $x>0$ $(\lim x \to 0^+)$

e) $\lim\limits_{x \to 0^+} \underbrace{\dfrac{1}{|x|}}_{\to +\infty} - \overbrace{\dfrac{1}{2x}}^{\to -\infty} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2-1}{2x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{2x} = +\infty$

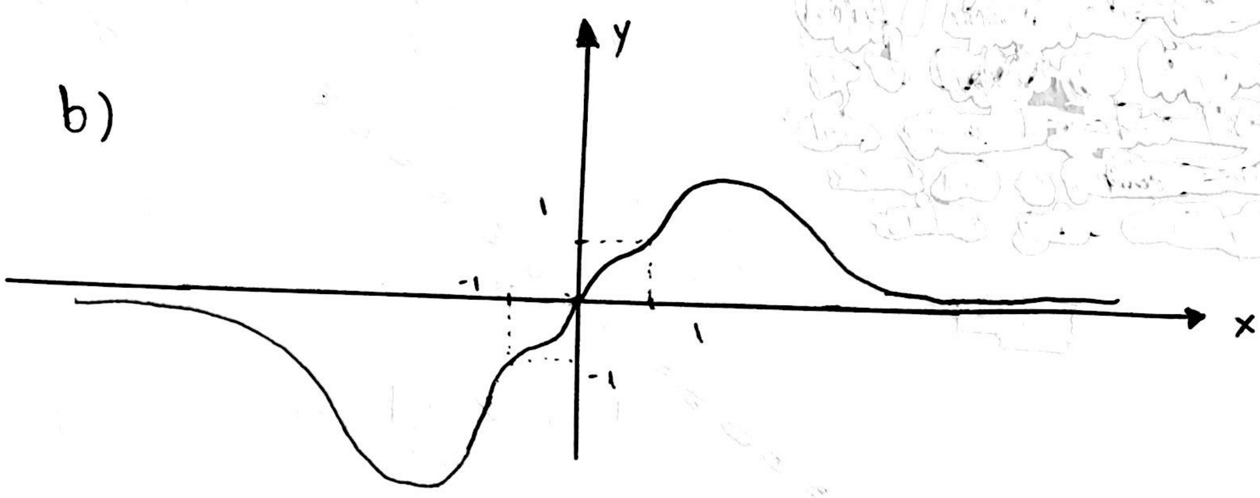
f) De (d) e (e): $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{|x|} - \dfrac{1}{2x} = +\infty$

6 - Aqui evidentemente existem inúmeras possíveis soluções. Abaixo temos uma possível solução para cada item.

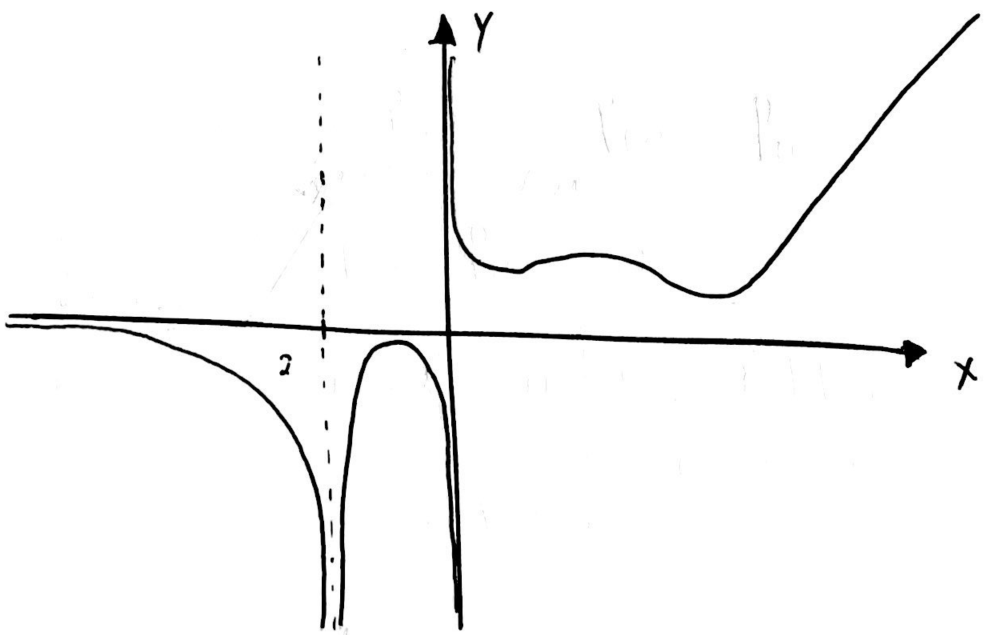
a)



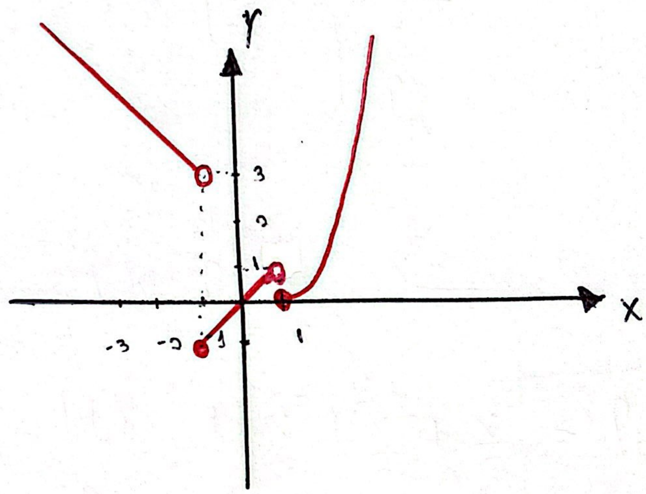
b)



c)



7)



$$f(x) = \begin{cases} 2-x, & \text{se } x < -1 \\ x, & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ (x-1)^2, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

$\nexists \lim_{x \to -1} f(x)$, $\nexists \lim_{x \to 1} f(x)$,

mas tirando esse qlqr limite existe

$\therefore \exists \lim_{x \to a} f(x) \ \forall \ a \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$