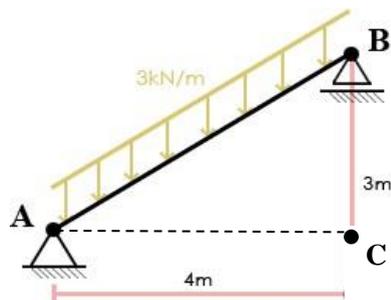




# ESCOLA POLITÉCNICA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

## PEF3208 Fundamentos de Mecânica das Estruturas 07/05/2021 Prof. Osvaldo Nakao



**1. Vigas Inclinadas:** Determinar as reações nos apoios e esboçar os diagramas dos esforços solicitantes na estrutura da figura.

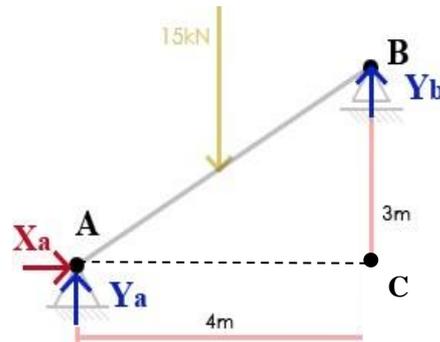
### 1.1. Reações nos apoios

Observe que, devido à inclinação da viga, o carregamento de 3 kN/m não está sobre 4 m, mas sim, sobre o valor do comprimento da viga, que pode ser obtido por Pitágoras. Resulta em

5 m. Logo, a força resultante é de  $3 \text{ kN/m} \cdot 5 \text{ m} = 15 \text{ kN}$  no meio da barra.

Impõe-se a condição para que haja equilíbrio: o momento em torno de qualquer ponto deve ser igual a zero. Neste caso, adota-se como pólo o ponto C para eliminar as incógnitas  $Y_b$  e  $X_a$ .

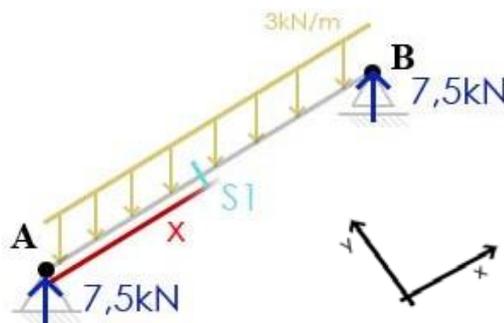
- $\Sigma F_H = 0 = X_a \Rightarrow X_a = 0$
- $\Sigma M_{(A)} = 0 = -15 \cdot 2 + Y_b \cdot 4 \Rightarrow Y_b = 7,5 \text{ kN}$
- $\Sigma M_{(C)} = 0 = -Y_a \cdot 4 + 15 \cdot 2 \Rightarrow Y_a = 7,5 \text{ kN}$



### 1.2. Diagrama de corpo livre

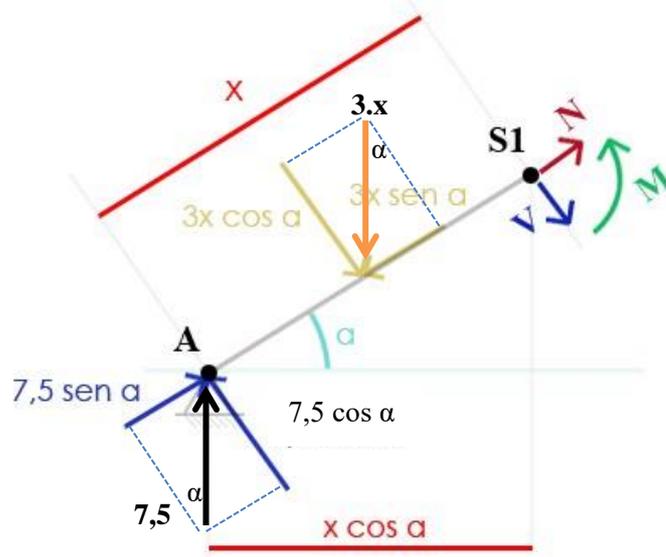
Como eixo dos x para traçar os diagramas dos esforços solicitantes utiliza-se o eixo da própria viga com origem em A e a variável x como sendo a medida desde A. Portanto,  $0 \leq x \leq 5$   
**Seção S1:**

- $\text{sen } \alpha = 3/5 = 0,6$
- $\text{cos } \alpha = 4/5 = 0,8$

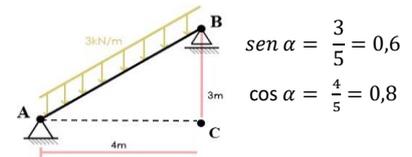
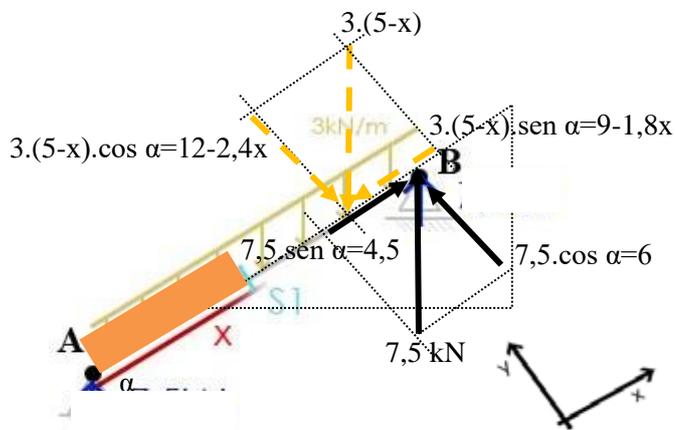


Pode-se determinar os esforços solicitantes por meio do equilíbrio impondo que na seção transversal S1 há uma força normal  $N(x)$ , uma força cortante  $V(x)$  e um momento fletor  $M(x)$  conforme a figura.

- $\Sigma X = 0 = N(x) + 7,5 \text{sen } \alpha - 3x \cdot \text{sen } \alpha$   
 $\Rightarrow N(x) = -4,5 + 1,8x$
- $\Sigma Y = 0 = 7,5 \cdot \text{cos } \alpha - 3x \cdot \text{cos } \alpha - V(x)$   
 $\Rightarrow V(x) = 6 - 2,4x$
- $\Sigma M_{(S1)} = 0 = (-7,5 \cdot \text{cos } \alpha) \cdot x + (3x \cdot \text{cos } \alpha) \cdot x/2 + M(x)$   
 $\Rightarrow M(x) = 6x - 1,2x^2$



Há ainda a possibilidade de se reduzir (transferir) os esforços da parte da direita que se descarta para a seção S1.



$$N(x) = 4,5 - (9 - 1,8x) = -4,5 + 1,8x$$

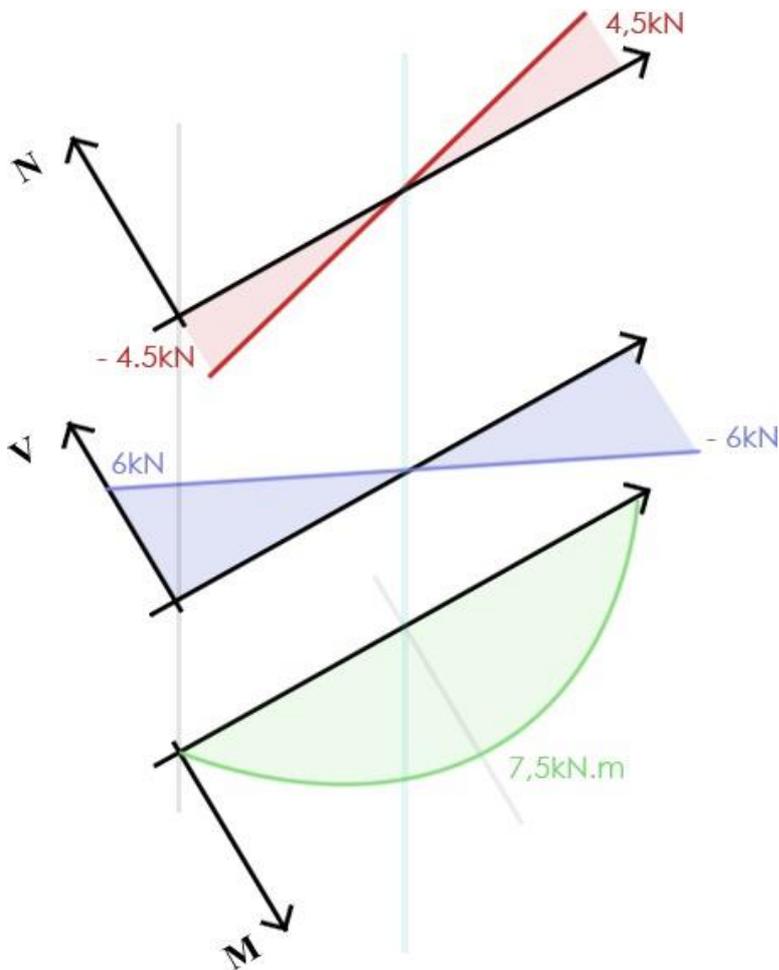
$$M(x) = 6 \cdot (5 - x) - (12 - 2,4x) \cdot (5 - x)/2 = 6x - 1,2x^2$$

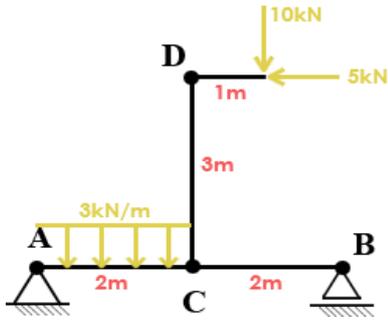
$$V(x) = (12 - 2,4x) - 6 = 6 - 2,4x$$

Para  $x$  entre 0 e 5 (lembrar que o eixo  $x$  é o mesmo da barra, que tem 5m):

- $N(x) = -4,5 + 1,8x$ 
  - $N(0) = -4,5 \text{ kN}$
  - $N(5) = 4,5 \text{ kN}$
- $V(x) = 6 - 2,4x$ 
  - $V(0) = 6 \text{ kN}$
  - $V(5) = -6 \text{ kN}$
- $M(x) = 6x - 1,2x^2$ 
  - $M(0) = 0$
  - $M(5/2) = 7,5 \text{ kN.m}$
  - $M(5) = 0$

### 1.3. Diagrama de esforços solicitantes



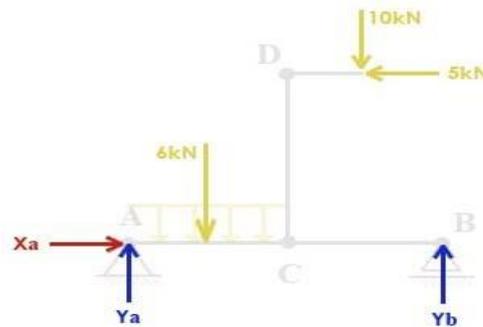


**2. Vigas poligonais:** Determinar as reações nos apoios e esboçar os diagramas dos esforços solicitantes na estrutura da figura. Considere que A é uma articulação fixa, B é uma articulação móvel e C e D são engastamentos.

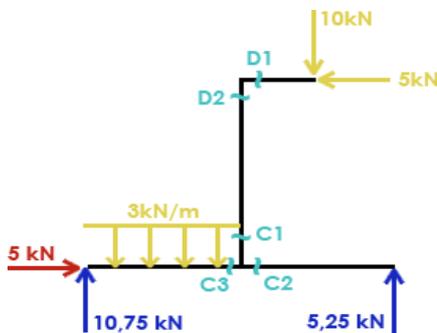
### 2.1 Calcular as reações nos apoios

O carregamento na barra AC gera uma força resultante de 6kN, a 1m do ponto A. Impondo-se o equilíbrio na estrutura tem-se:

- $\Sigma F_H = 0 = X_a - 5$   
 $\Rightarrow X_a = 5 \text{ kN}$
- $\Sigma M_{(A)} = 0 = -6 \cdot 1 - 10 \cdot 3 + 4Y_b$   
 $\Rightarrow Y_b = 5,25 \text{ kN}$
- $\Sigma M_{(B)} = 0 = -4Y_a + 6 \cdot 3 + 10 \cdot 1 + 5 \cdot 3$   
 $\Rightarrow Y_a = 10,75 \text{ kN}$

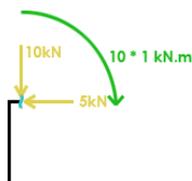


### 2.2 Diagrama de corpo livre



Devido aos vários trechos da viga poligonal (em direções e com carregamentos diferentes), para se obter o diagrama dos esforços solicitantes são necessários vários cortes (com as respectivas seções) para perceber as transferências dos esforços (caminhamento das forças) até os apoios.

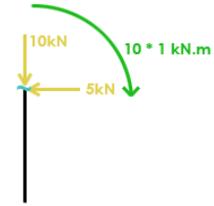
### 2.3 Seção D1



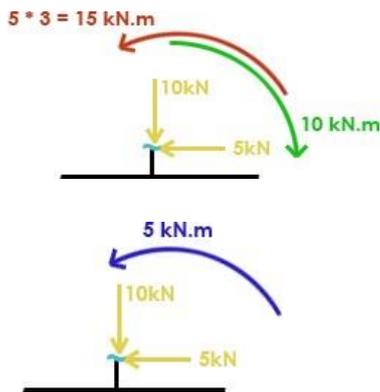
Transferindo as forças da extremidade livre da viga até o ponto D, tem-se, além das forças previamente existentes, os efeitos dessa transferência. Aplicar tais forças na extremidade livre é diferente de aplicá-las em D. A força cortante de 10 kN quando transferida para D é mecanicamente equivalente a uma força de 10 kN e a um momento. Como a distância de D1 à linha de aplicação da força é de 1 m, esse momento é de 10 kN x 1 m = 10 kN.m. Além disso, em D1, há a força normal de 5 kN que é transferida da extremidade livre e não gera nenhum efeito (forças normais transferem-se por todas as seções ortogonais a essas forças sem gerar nenhum efeito adicional).

## 2.4 Seção D2

D2 está a um infinitésimo de D1 e, portanto não se produz nenhum efeito além do que se observa na própria transferência. Vale a pena notar que a força de 10 kN na viga horizontal era cortante e na viga vertical transforma-se em uma força normal. A força normal de 5 kN em D1 transforma-se em força cortante em D2. O momento fletor que em D1 tracionava a fibra superior, em D2 traciona a fibra da esquerda.



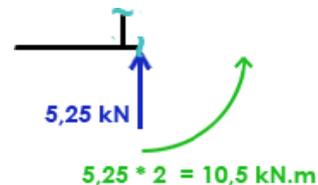
## 2.5 Seção C1



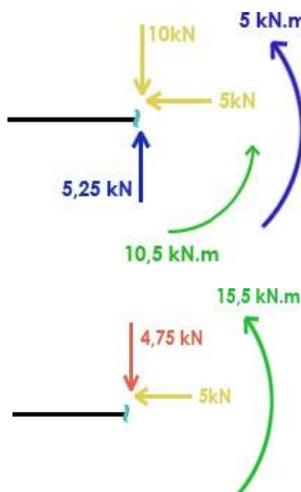
Transferindo as forças do ponto D para o ponto C, para que sejam mecanicamente equivalentes além das forças existentes em D, em C vai surgir o momento de  $5 \text{ kN} \times 3 \text{ m} = 15 \text{ kNm}$ . Há ainda o momento aplicado em D que é transferido para a seção C. Não surge nenhum efeito além do próprio momento, pois cada momento se transfere para cada uma das seções transversais ao eixo, integral e isoladamente. Assim, em C, o momento fletor resultante é de 5 kNm em sentido anti-horário, a força normal (de compressão) é de 10 kN e a força cortante é de 5 kN.

## 2.6 Seção C2

Aplicando o teorema do corte, para a seção C2 transferem-se as forças que estavam no apoio B. Assim, em C2 além da força cortante de 5,25 kN vai surgir o momento fletor de valor  $5,25 \text{ kN} \times 2 \text{ m} = 10,5 \text{ kNm}$ .



## 2.7 Seção C3:



Aplicando o teorema do corte, para a seção C3 transferem-se todas as forças e momentos obtidos em C1 e C2, e obtêm-se os esforços resultantes.

Apenas para lembrar, quando se aplica o teorema do corte, a estrutura original fica dividada em duas. Os esforços que surgem na seção da metade considerada são efeitos dos esforços que ficaram na metade desconsiderada. Ou ainda, os esforços que surgem na seção da metade considerada são os esforços que equilibram os esforços que ficaram nessa metade considerada. É por isso que as forças no apoio A não são transferidas para C3 no corte feito.

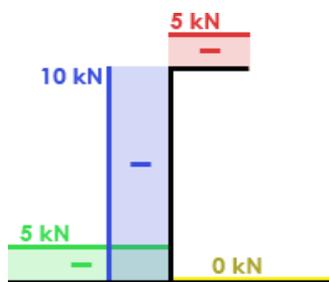
## 2.8 Diagrama dos esforços solicitantes

Por haver várias seções, os gráficos que representam a variação das forças normais e cortantes podem ser desenhadas em qualquer lado da viga, pois não se estabelece um eixo como positivo ou negativo. Porém, o sinal deverá indicar se a força é positiva ou negativa.

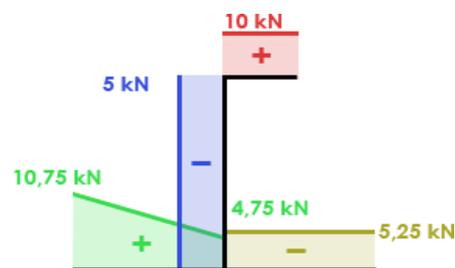
De acordo com a convenção adotada, no caso das forças normais, forças de tração (de dentro para fora da seção da viga) possuem sinal positivo e forças de compressão (de fora para dentro da seção da viga) possuem sinal negativo.

Para forças cortantes, o sinal positivo é atribuído para aquela força que tende a girar a estrutura/seção no sentido horário. A força cortante será negativa se essa força tende a girar a estrutura/seção no sentido anti-horário.

**Normal:**



**Cortante:**



**Momento fletor:**

Para o momento fletor, a convenção estabelece que os gráficos que mostram a sua variação devem ser desenhados do lado tracionado. Não se colocam os sinais de positivo ou negativo. A figura que descreve a variação do momento fletor é desenhada do lado da viga em que a fibra é tracionada. O diagrama dos momentos fletores da estrutura analisada mostra claramente quais as fibras tracionadas.

