PEF 2601

Conceito do corte fundamental. Diagramas de estado: vigas isostáticas

Prof. Valério Almeida

valerio.almeida@usp.br

Abril/2023

Conteúdo da aula

- » O conceito de tensão
- » Esforços solicitantes
- » Teorema fundamental
- » Diagramas de esforços solicitantes de estruturas planas

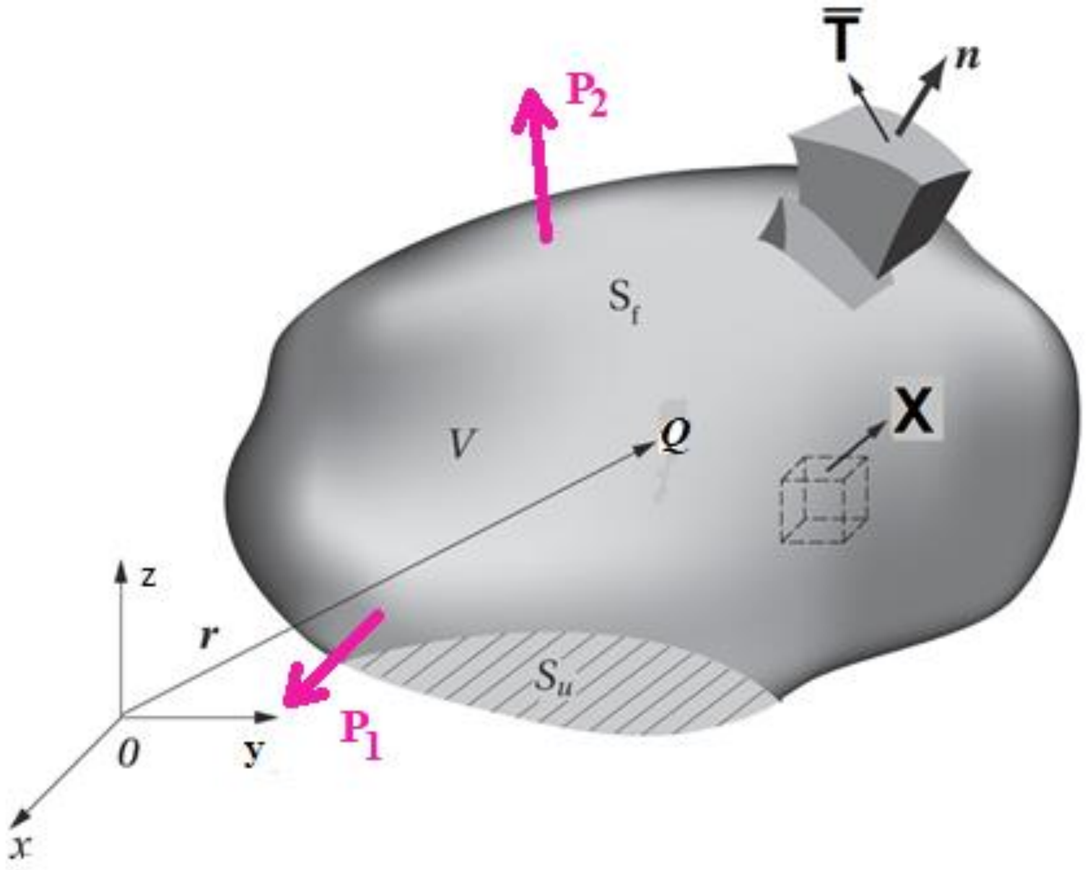
Bibliografia: Apostila de Teoria (pdf no e-disciplinas)

Capítulo 2: O conceito de tensão
Capítulo 3: Esforços solicitantes
Capítulo 4: Teorema fundamental
Capítulo 5: Diagramas de esforços solicitantes de estruturas planas

Tensão

Sólido deformável (V) em **equilíbrio estático**

Sujeito a forças de contato: P_1, P_2....



Realize um corte imaginário que passe dentro do corpo

Tensão

Corte imaginário

Vetor tensão em **Q** no plano de normal *n*

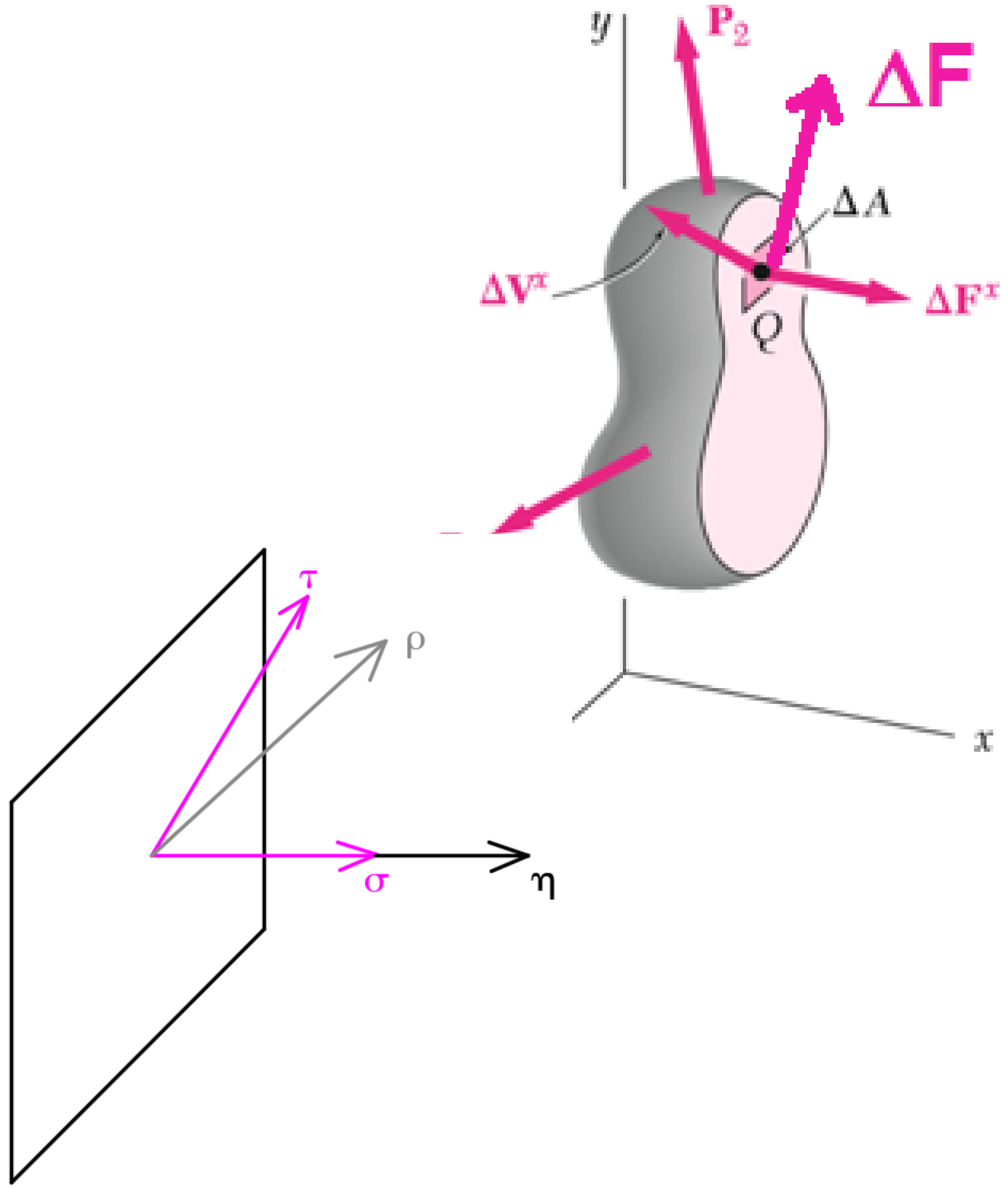
$$\rho_n = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

$$\rho_n = \sigma + \tau$$

σ: *tensão normal (perpendicular ao plano da ST)*

τ: *tensão cisalhante* (paralelo *ao plano da* ST)

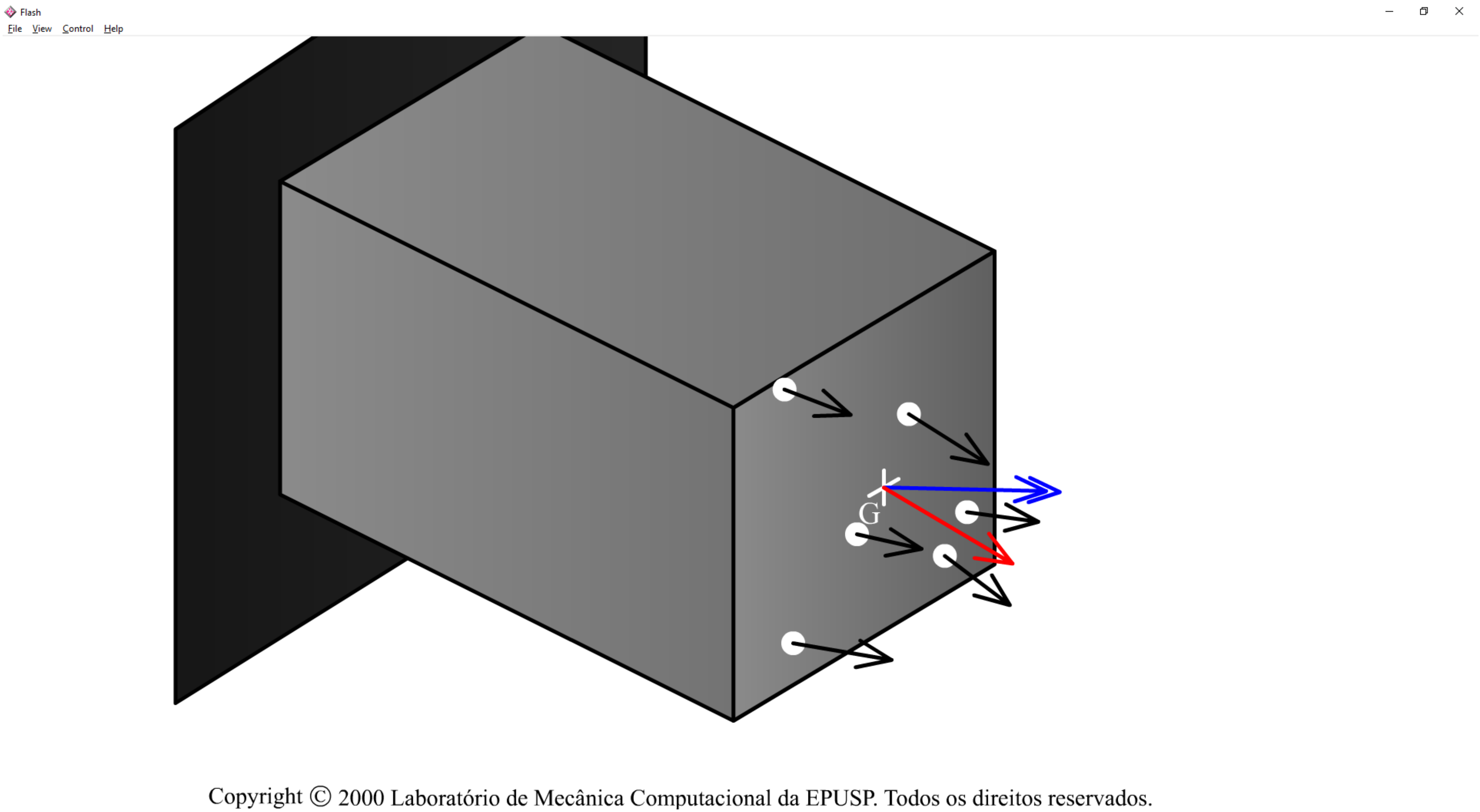
ΔA: área



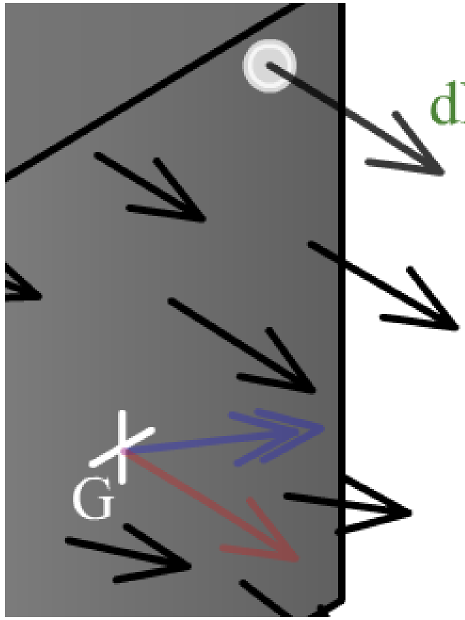
Conhecer 3 tensões em Q: estado de tensão completamente determinado

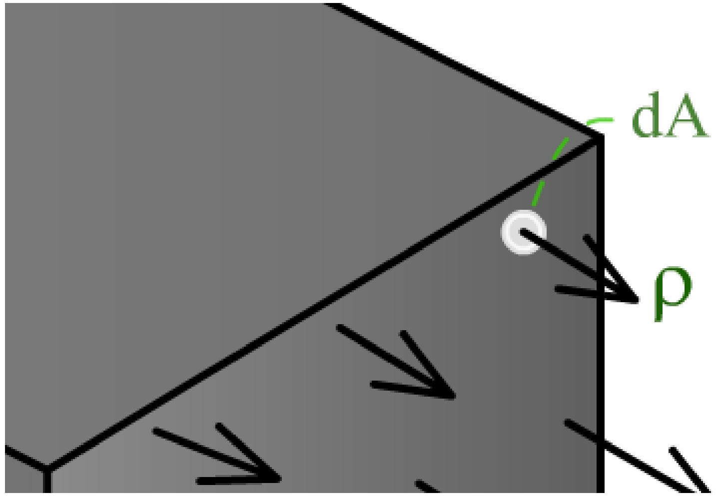
ST: seção transversal

TENSÕES E ESFORÇOS SOLICITANTES: ELEMENTOS LINEARES



Tensões no plano





Tensão: $\vec{\rho} = \vec{\sigma} + \vec{\tau}$

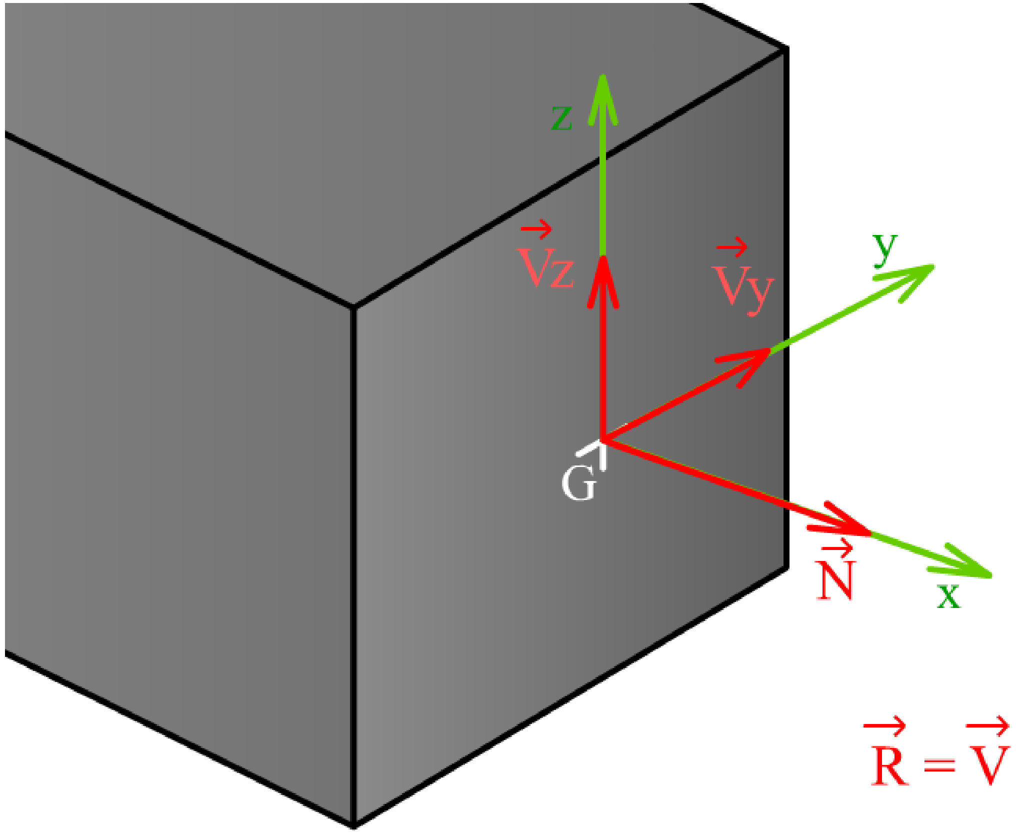
Tensão normal a seção: $\vec{\sigma}$

Tensão paralela a seção: $\vec{\tau}$

$$\vec{\rho}_{média} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta F}}{\Delta A}$$

ESFORÇOS SOLICITANTES

Esforços solicitantes: força/momento resultante das tensões transferidos para o centroide (G) de cada ST



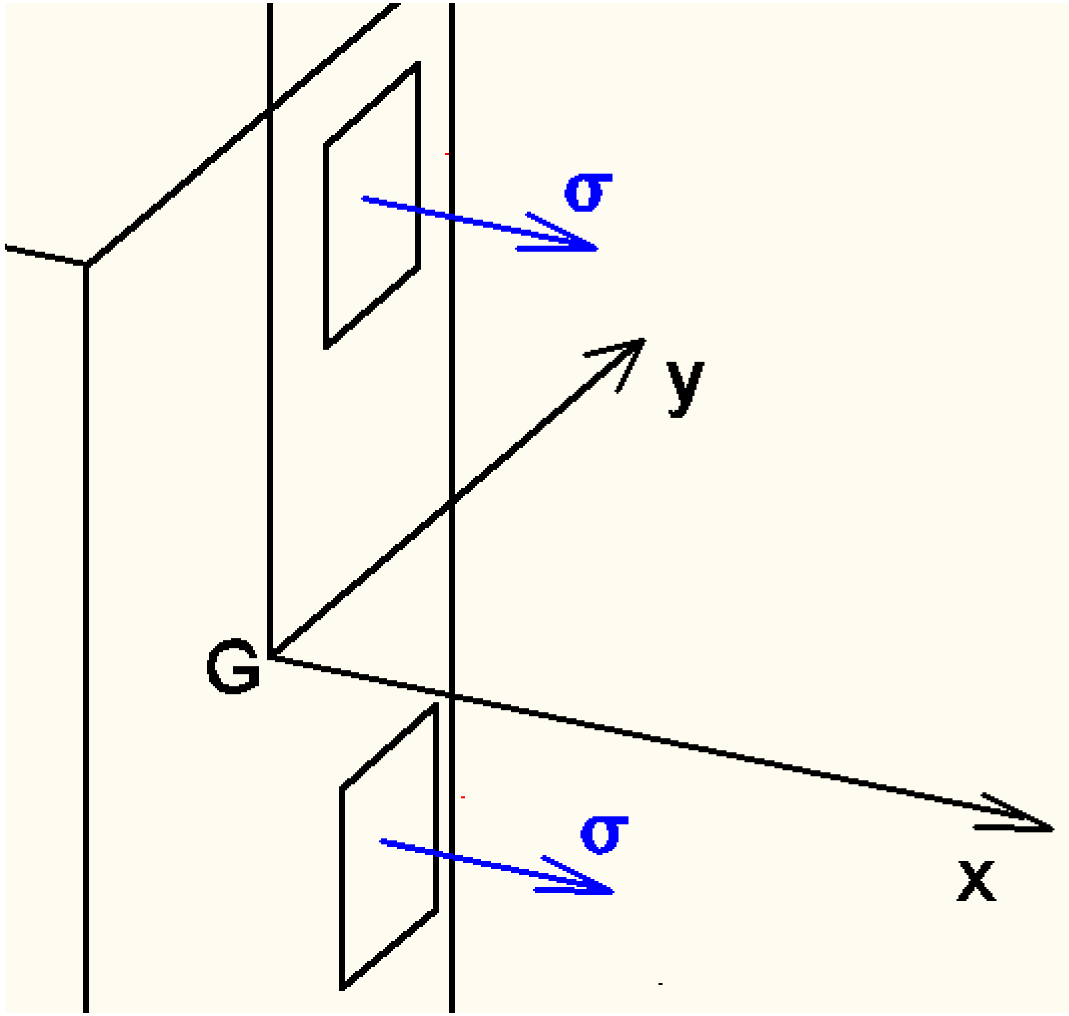
$$\vec{R} = \vec{V} + \vec{N}$$

$$\vec{V} = \vec{V_y} + \vec{V_z}$$

N: Esforço Normal

V: Esforço Cisalhante ou Cortante

ESFORÇO NORMAL

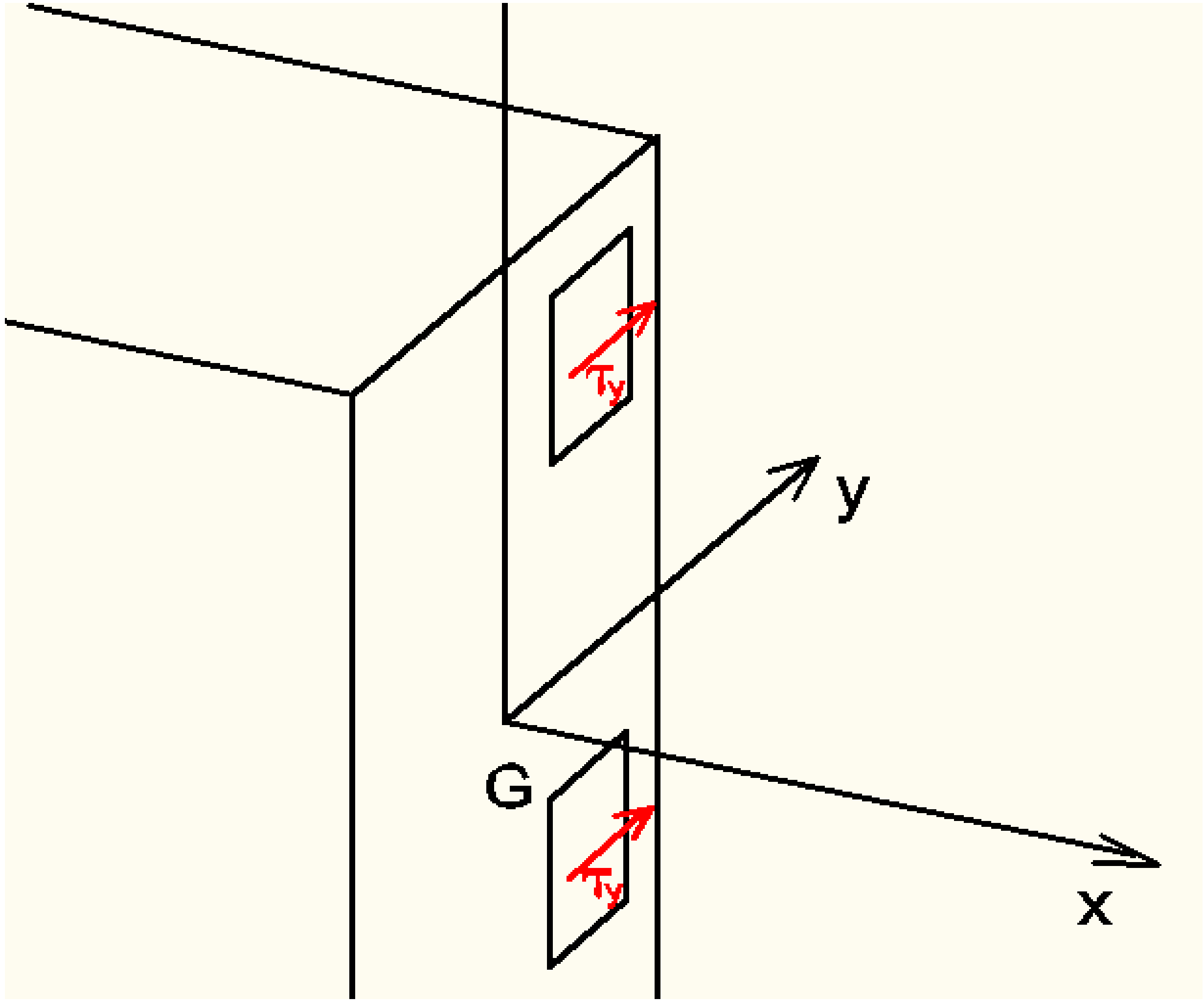


$$N = \int_A \sigma \, dA$$

N: ESFORÇO NORMAL

σ: TENSÃO NORMAL

ESFORÇO CISALHANTE (Cortante)

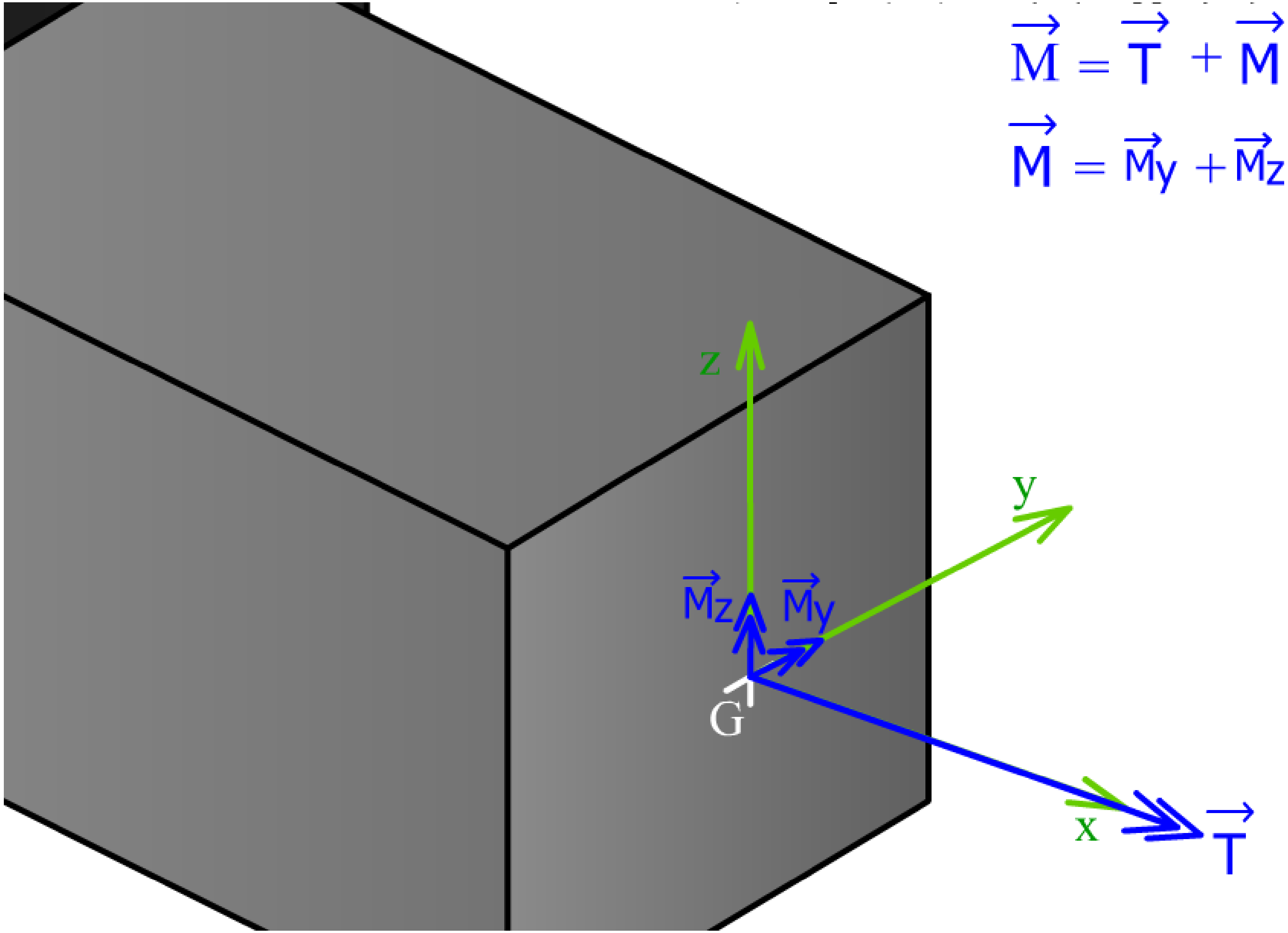


$$V_y = \int_A \tau_y \, dA$$

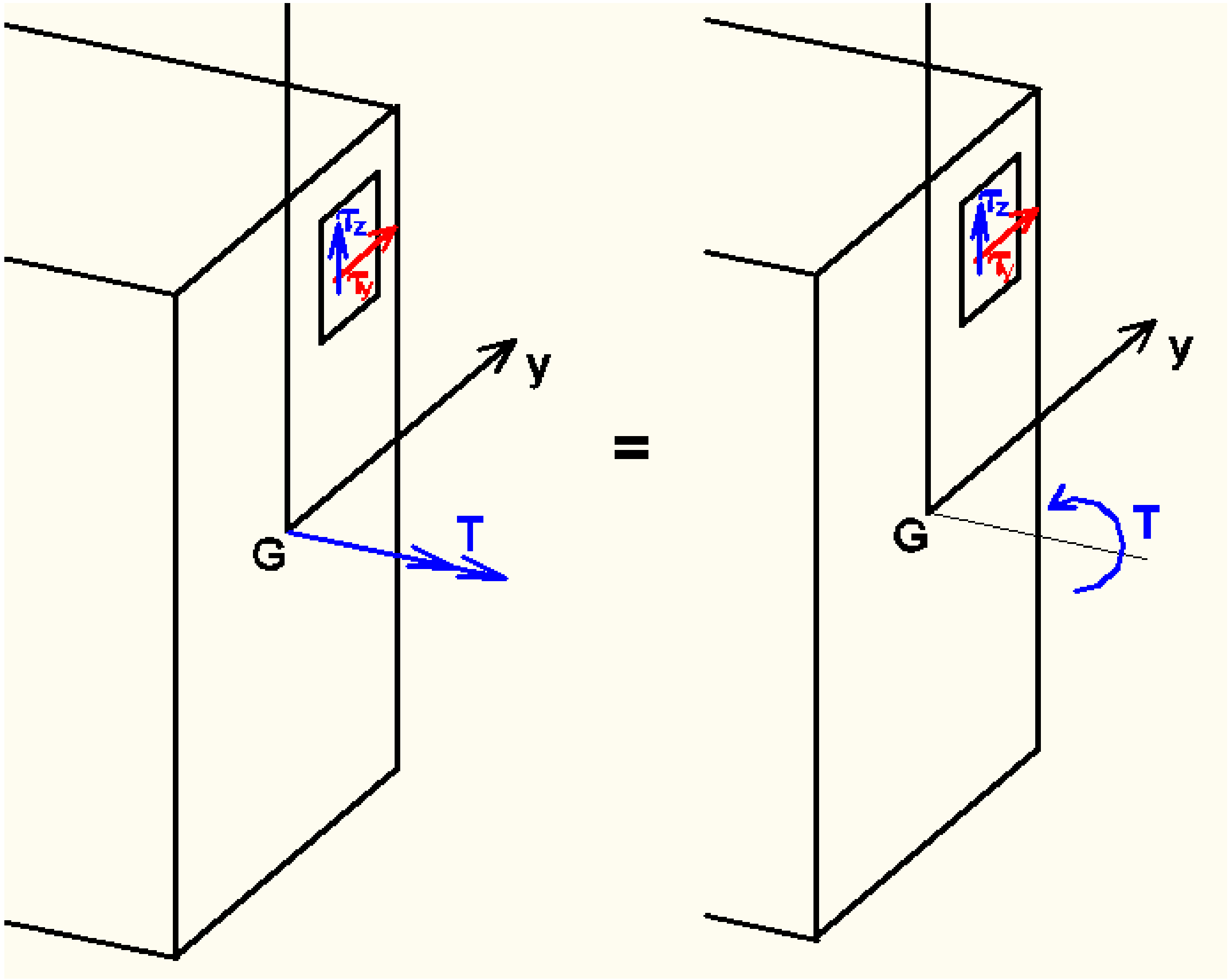
$$V_z = \int_A \tau_z \, dA$$

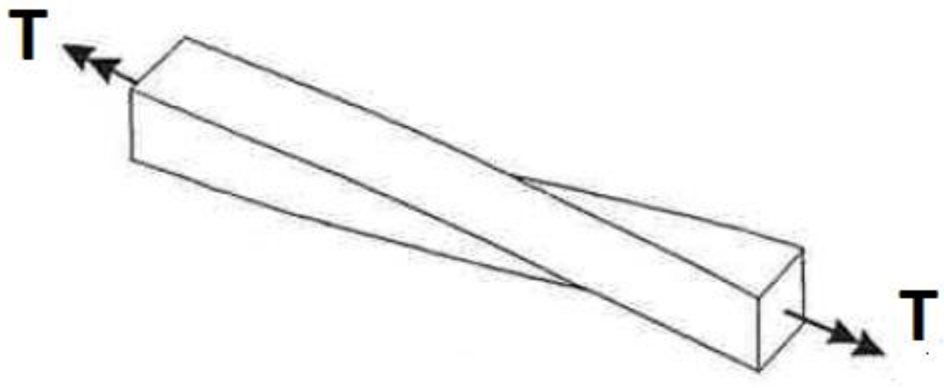
Tensão Cisalhante: τ

ESFORÇOS DE MOMENTO



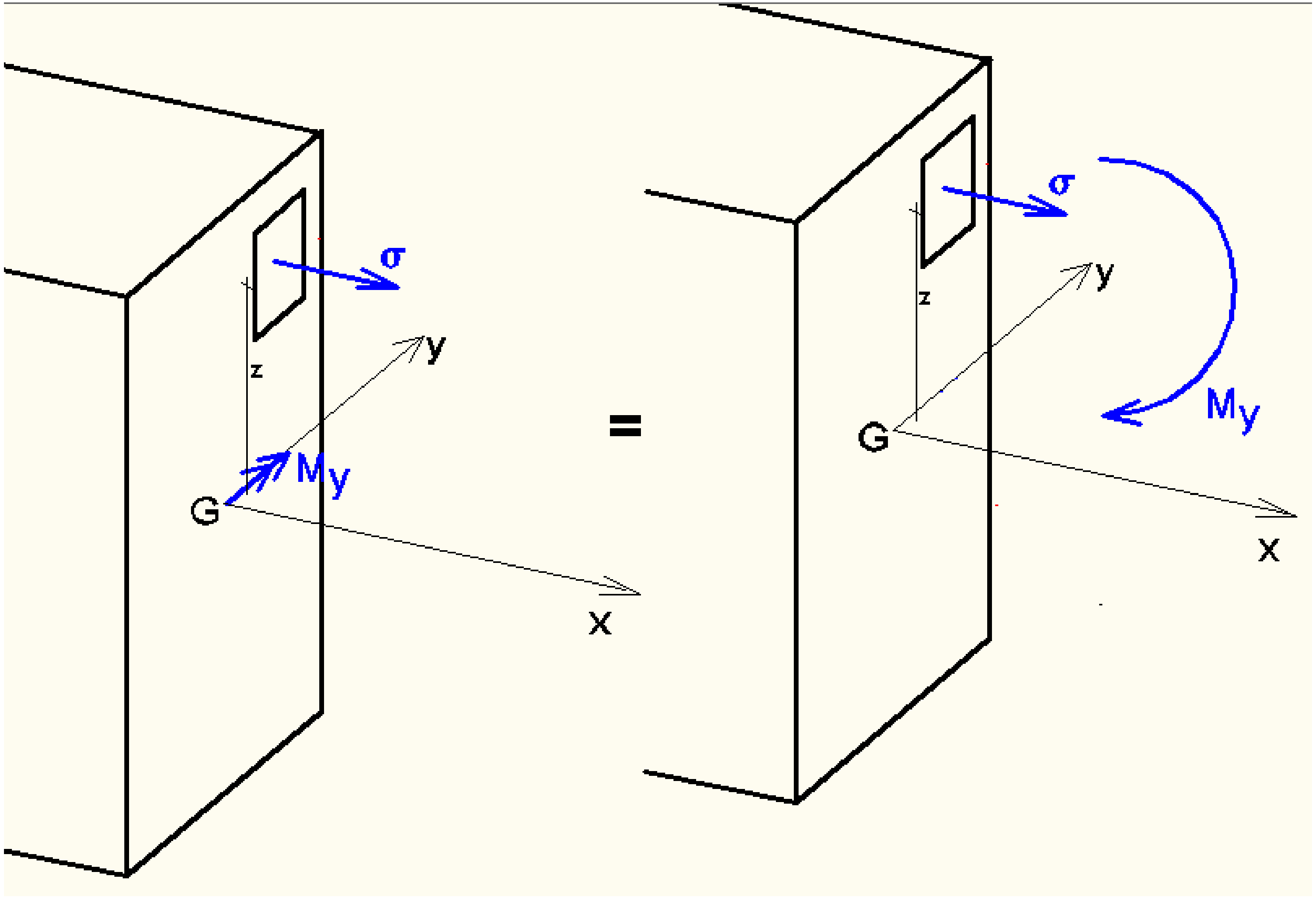
MOMENTO TORÇOR (T) - TORQUE





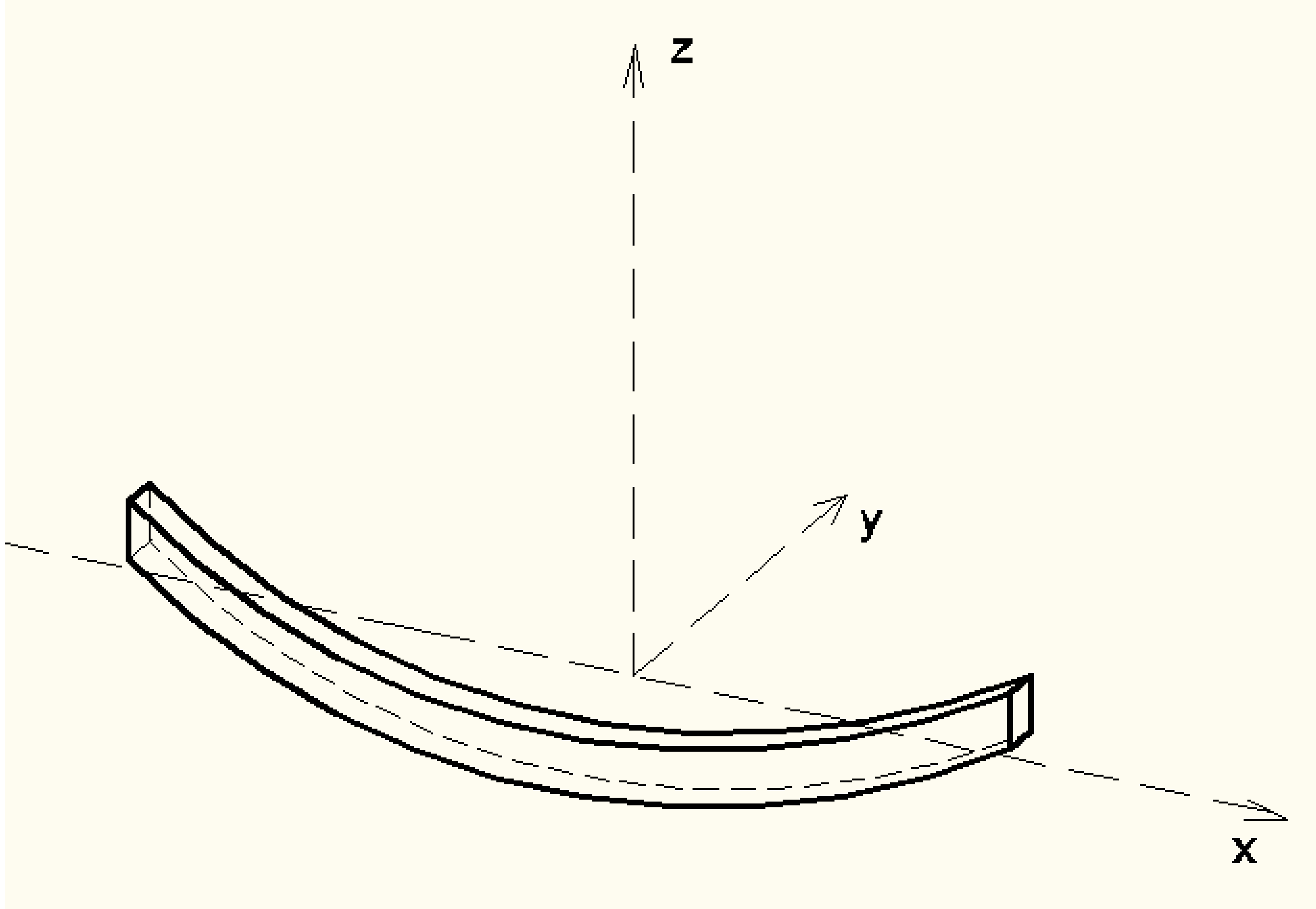
$$T = \int_A \left(\tau_z \, y - \tau_y \, z \right) dA$$

MOMENTO FLETOR (My)

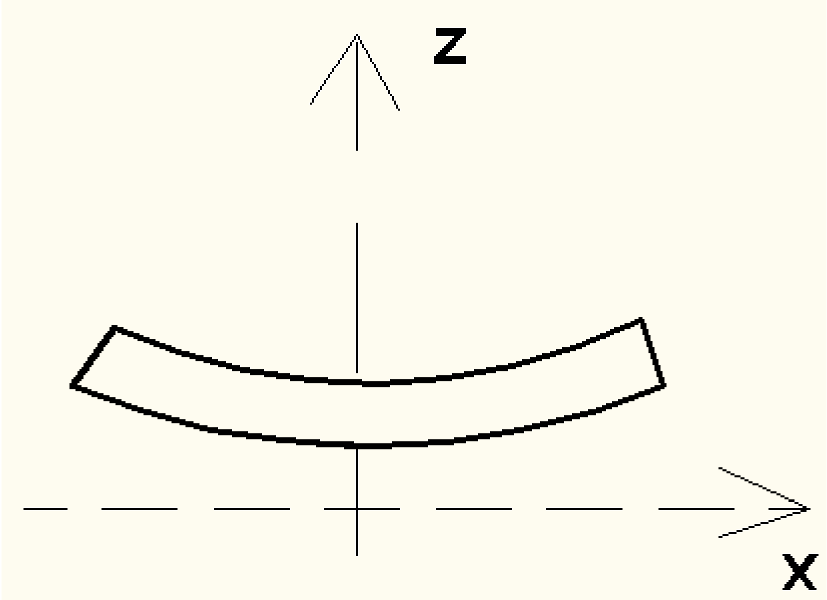


$$M_y = \int_A \sigma \cdot z \, dA$$

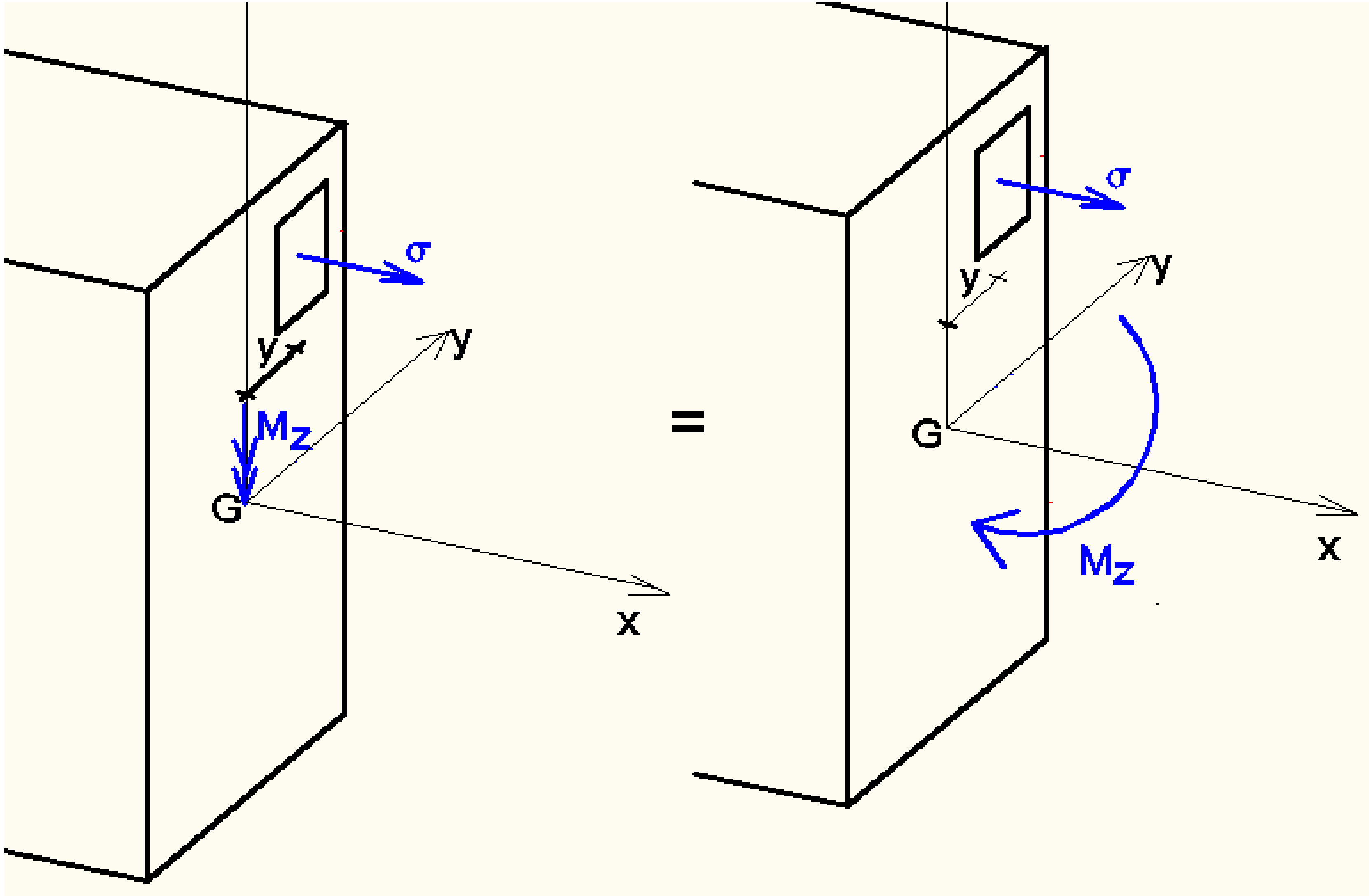
MOMENTO FLETOR (M_y)



Curvatura em torno de y

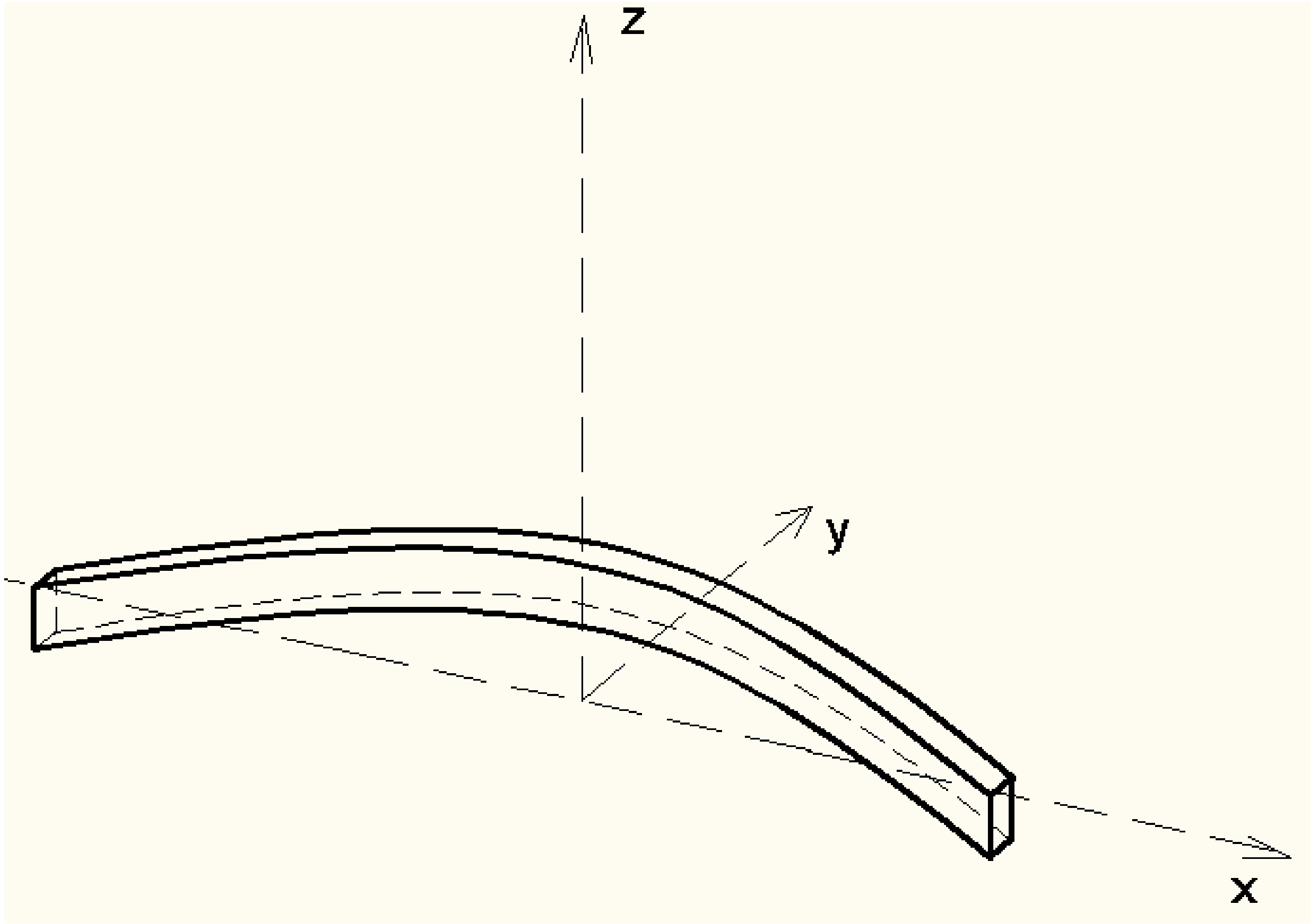


MOMENTO FLETOR (M_z)

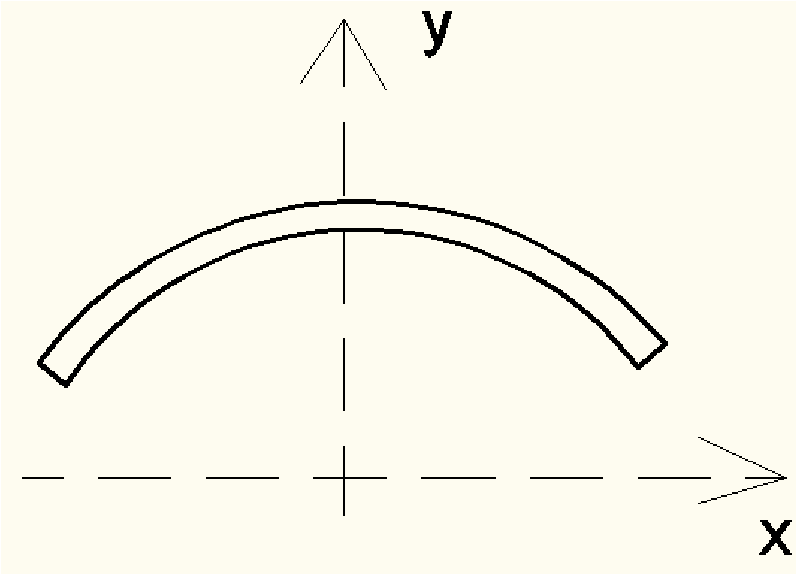


$$M_z = \int_A \sigma \cdot y \, dA$$

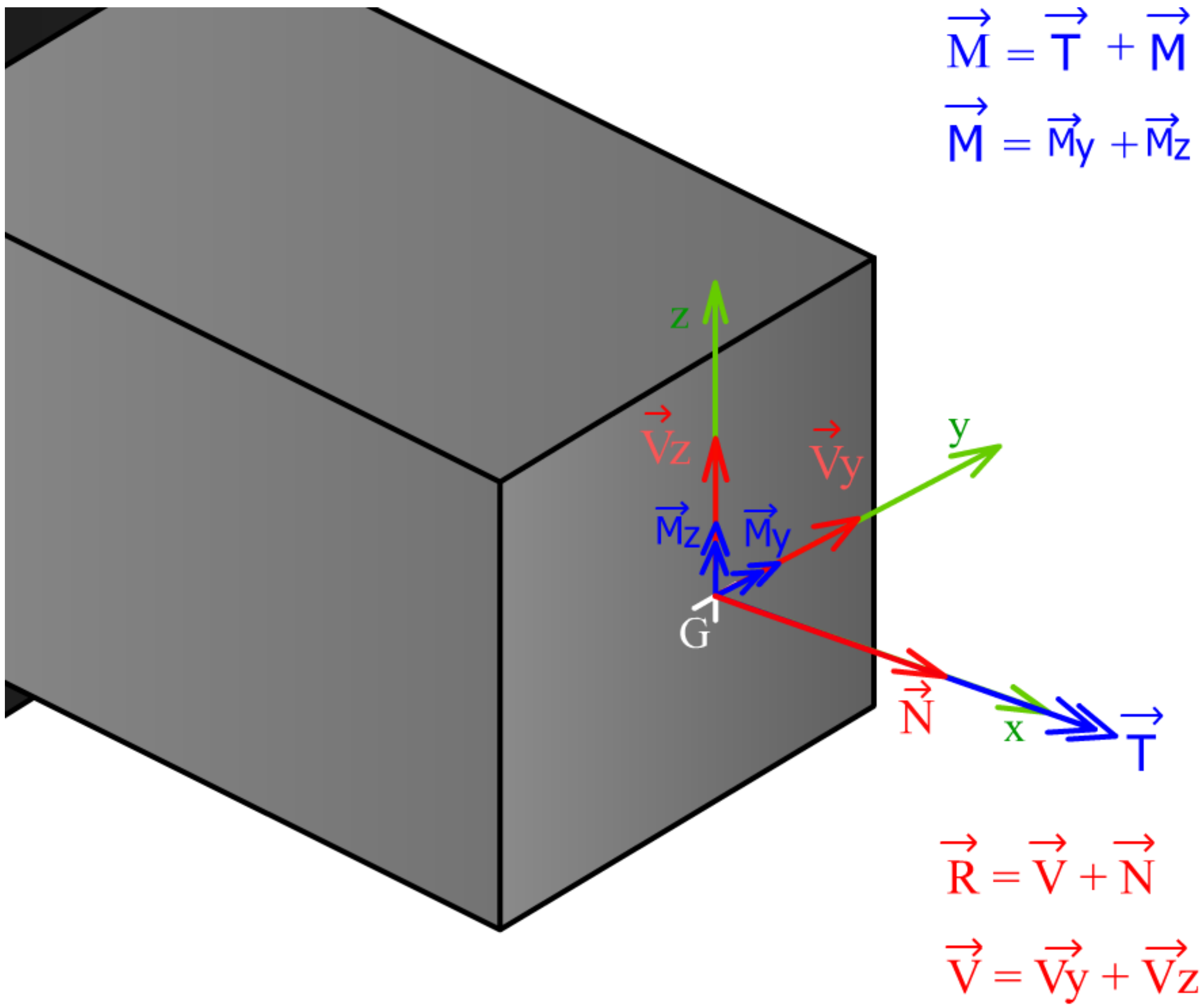
MOMENTO FLETOR (M_z)



Curvatura em torno de z



TOTAL DE ESFORÇOS (6)



$$N = \int_A \sigma \, dA$$

$$V_y = \int_A \tau_y \, dA$$

$$V_z = \int_A \tau_z \, dA$$

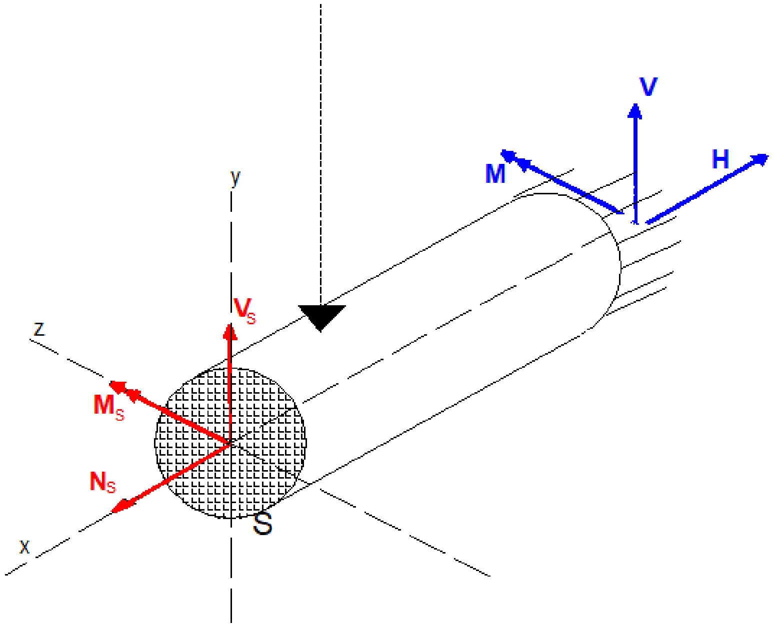
$$M_z = \int_A \sigma \cdot y \, dA$$

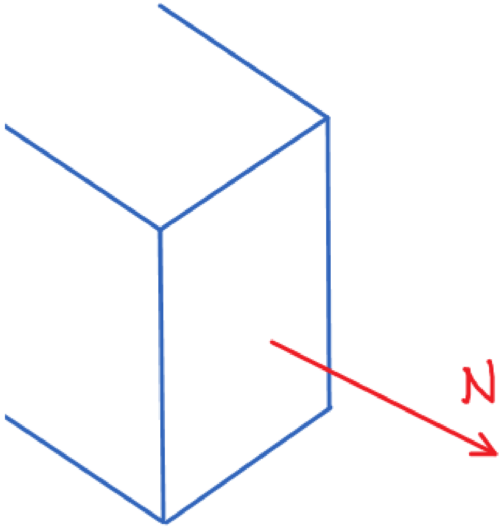
$$M_y = \int_A \sigma \cdot z \, dA$$

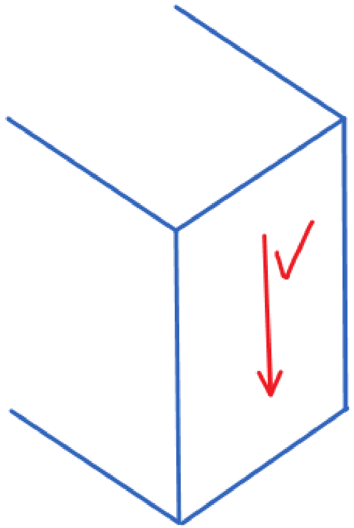
$$T = \int_A \left(\tau_z \, y - \tau_y \, z \right) dA$$

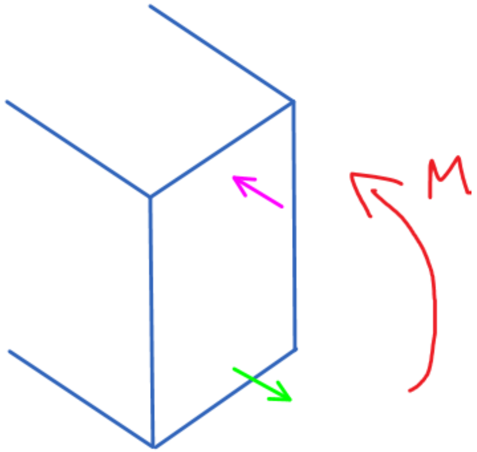
ESFORÇOS SOLICITANTES – SISTEMAS PLANOS

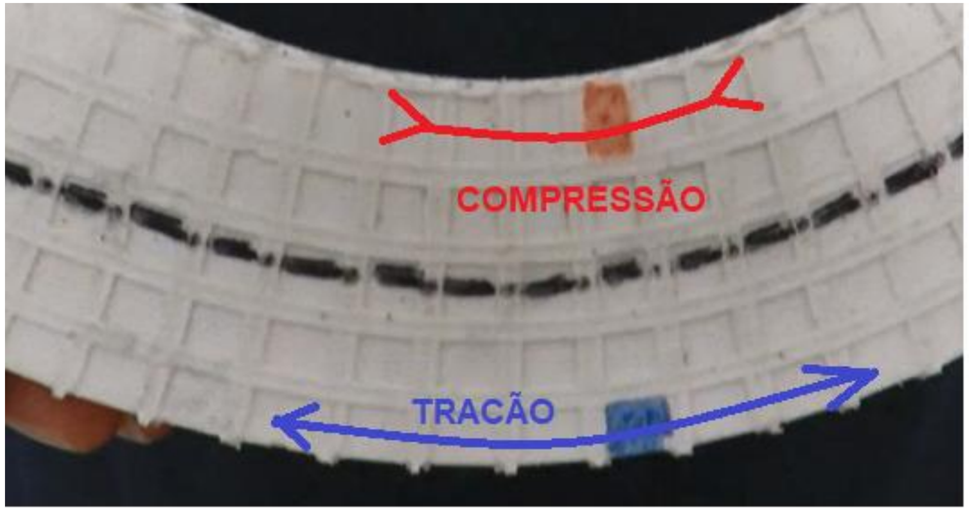
Para o caso de cargas/geometria contidas no plano, vamos estudar por agora 3 componentes: **M, V e N**, dispensando os índices.

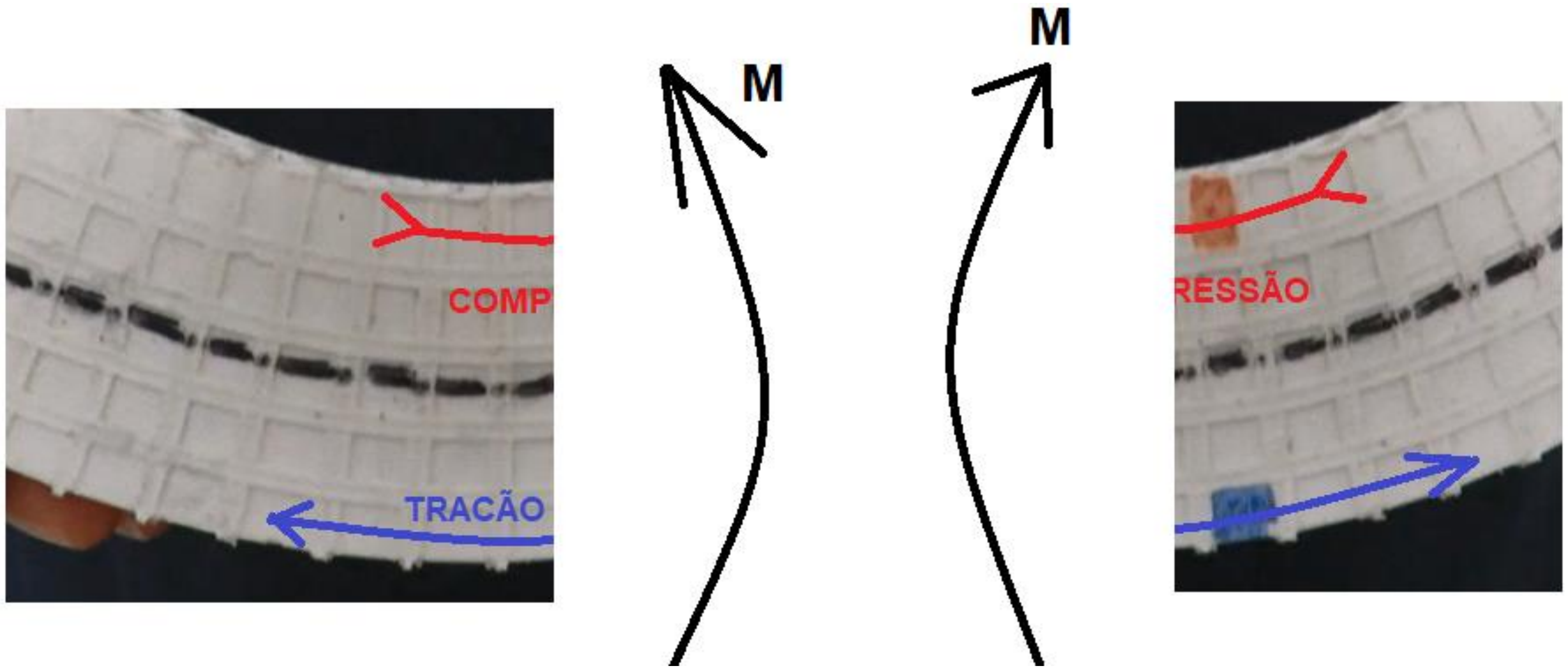


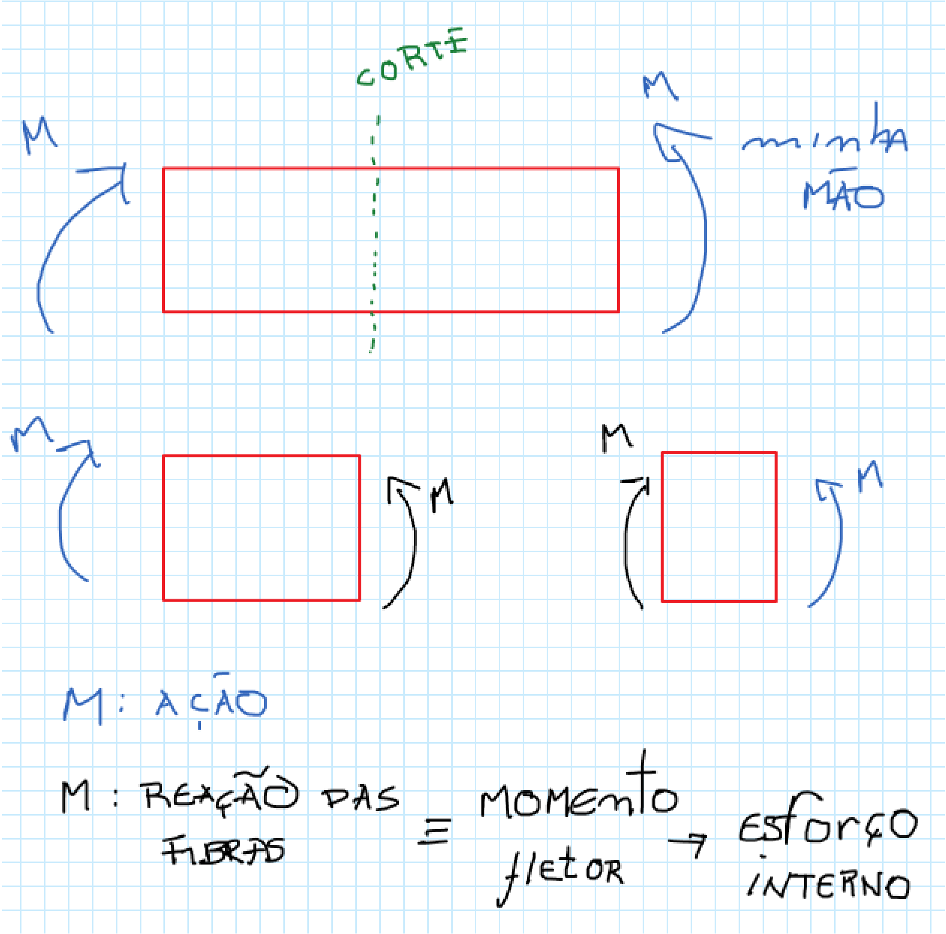








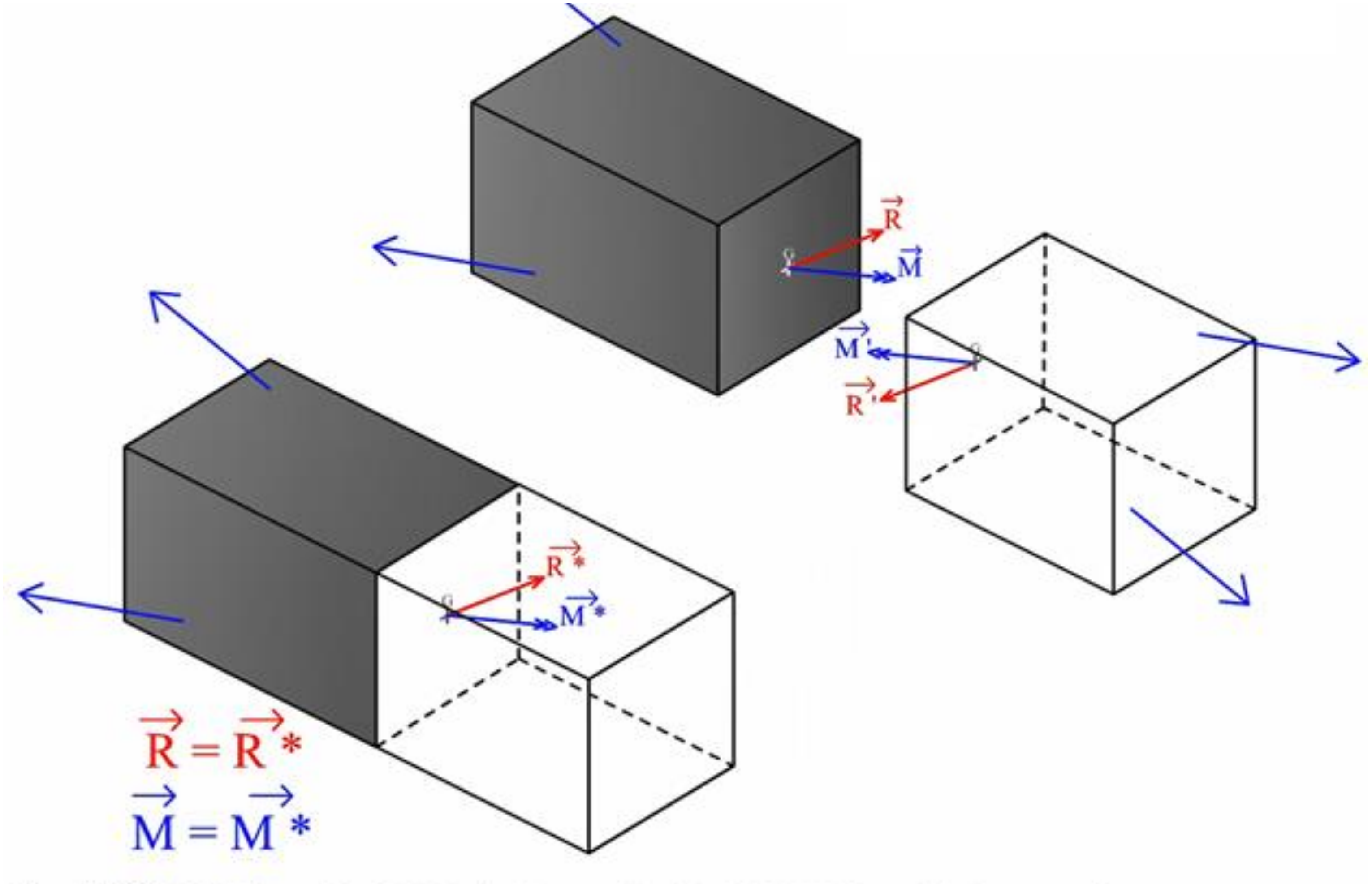




Momento traciona as fibras inferiores, em ambos os cortes

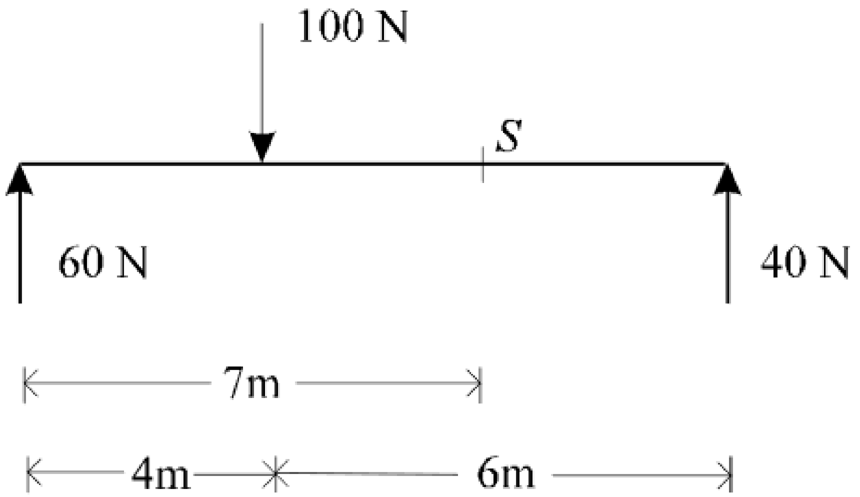
Enunciado fundamental

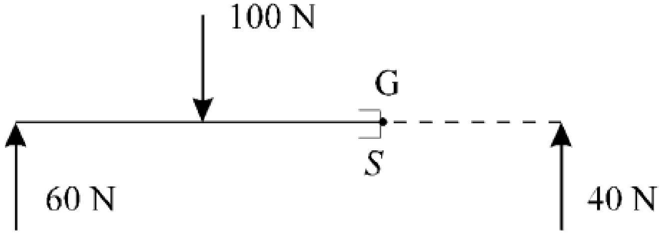
Os esforços solicitantes que atuam em uma seção transversal de uma barra podem ser obtidos cortando a barra nesta seção e reduzindo no seu centro de gravidade ou todos os esforços externos aplicados de um lado do corte ou então todos os esforços externos aplicados do outro lado do corte.



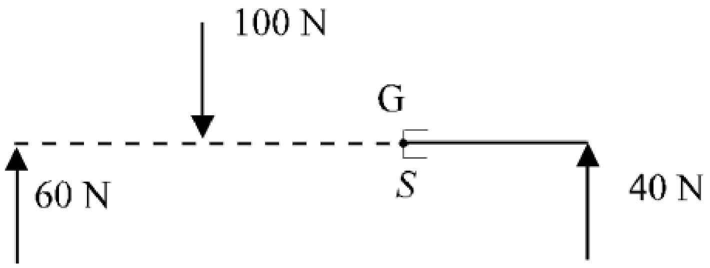
Conceito fundamental: exemplo

Seja o caso:



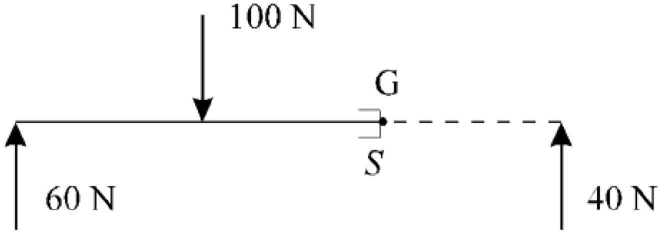


Corte à esquerda

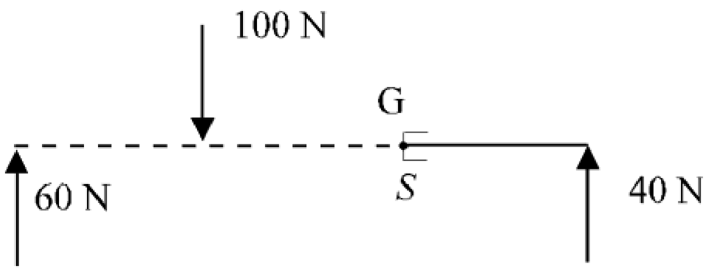


Corte à direita

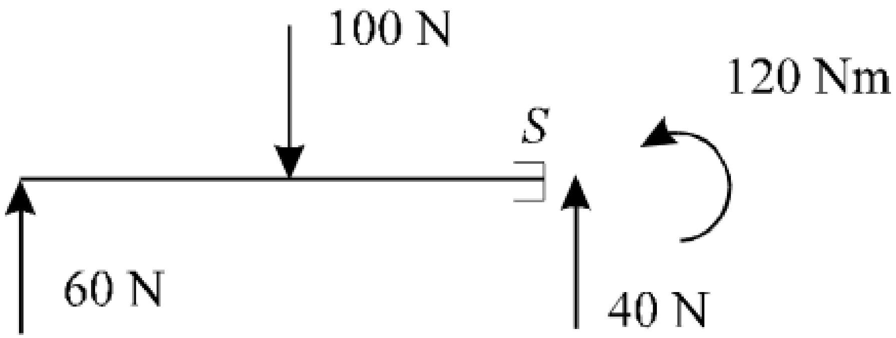
Conceito fundamental: exemplo

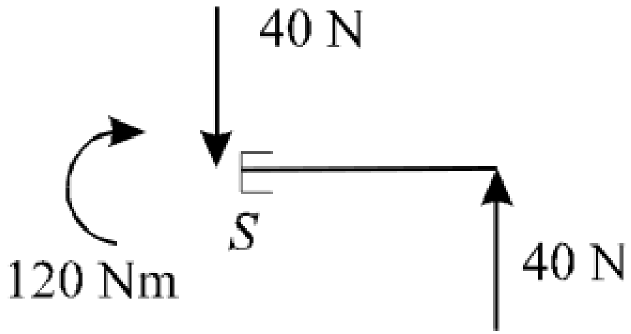


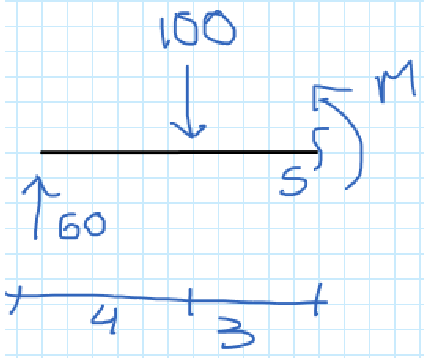
Corte à esquerda



Corte à direita



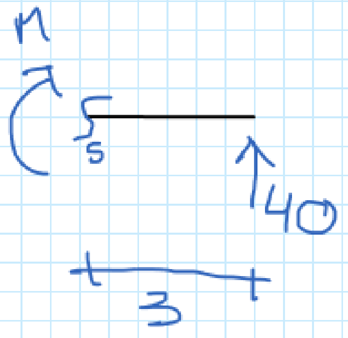




$\Sigma M_S = 0$ (+)

$M + 100 \cdot 3 - 60 \cdot 7 = 0$

$M = 120$ Nm

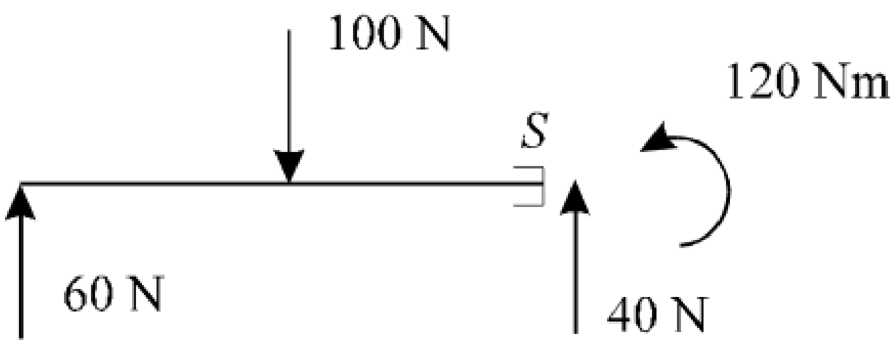


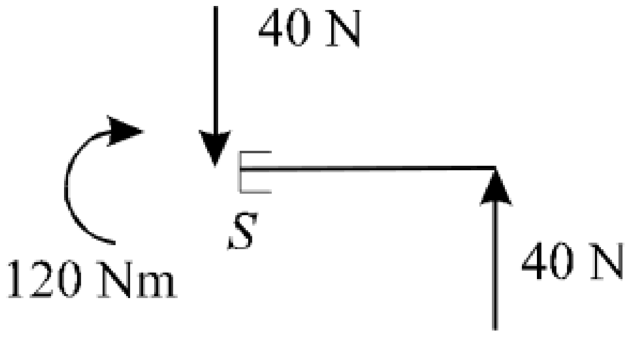
$\Sigma M_S = 0$ (+)

$40 \cdot 3 - M = 0$

$M = 120$ Nm

Exemplo



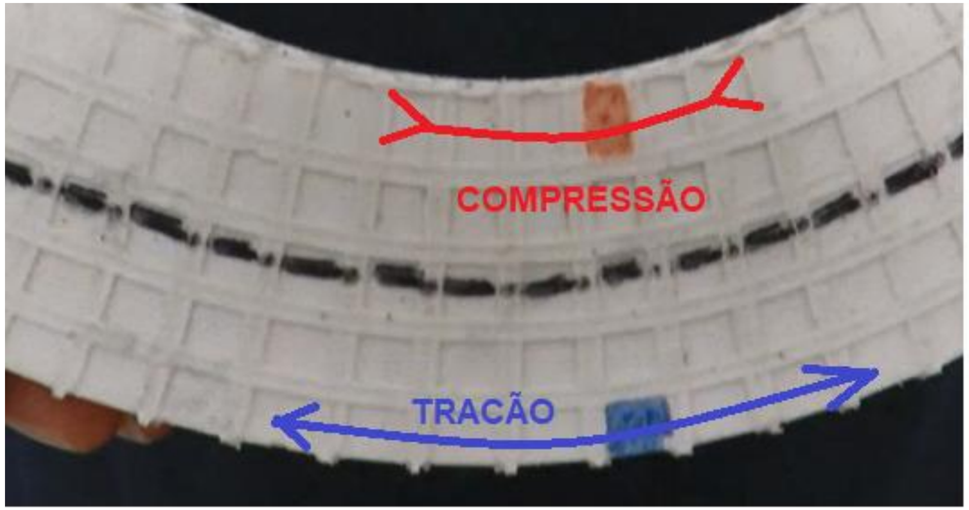


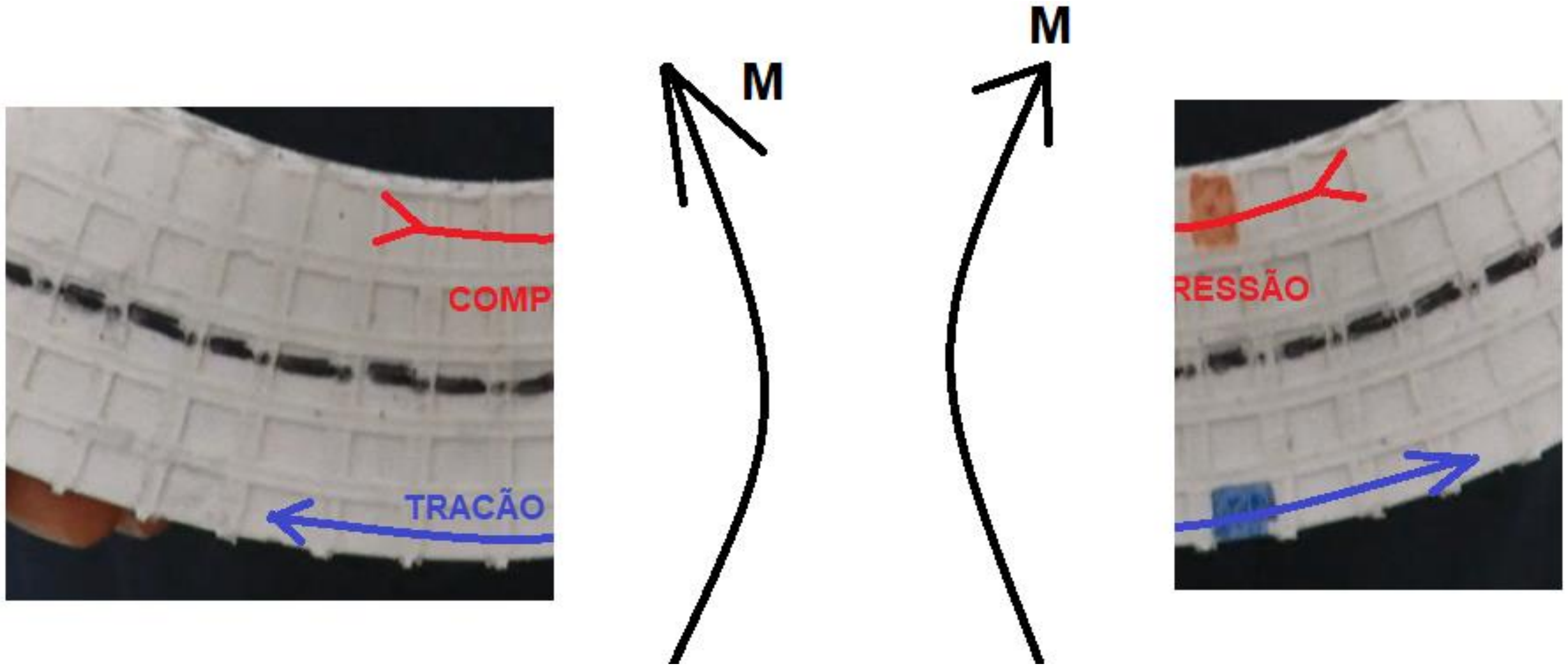
Em ambos os cortes:

Momento traciona as fibras inferiores

Cortante gira a seção no sentido anti-horário

Sentido físico do momento fletor

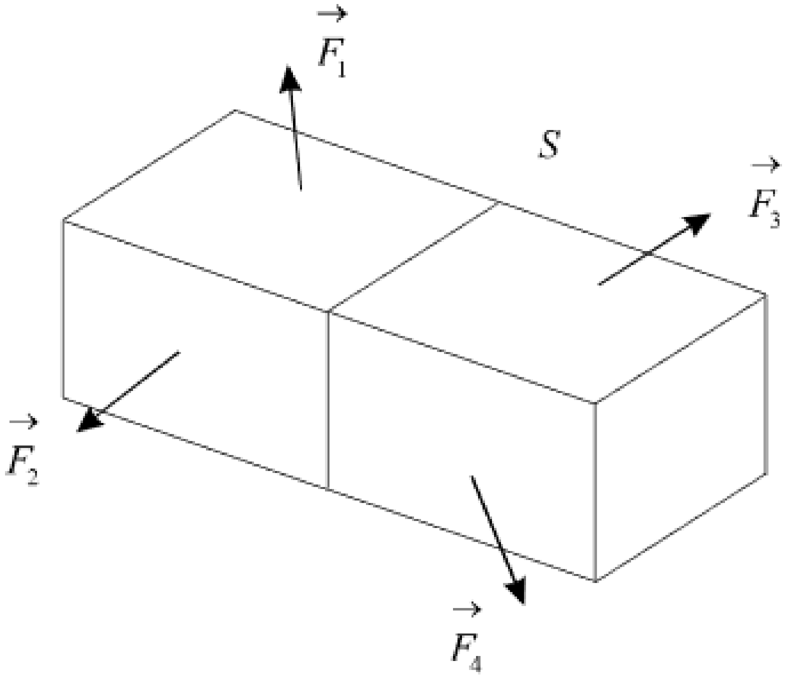




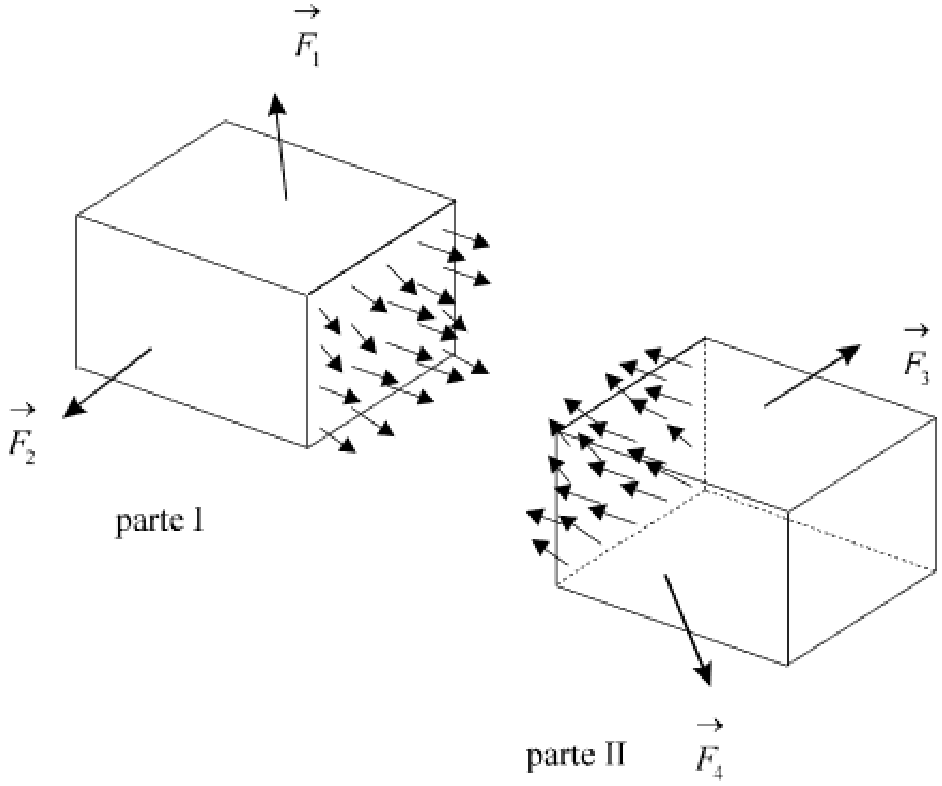
Momento traciona as fibras inferiores, em ambos os cortes

Demonstração

Seja o sistema em equilíbrio de ações ativas a reativas:

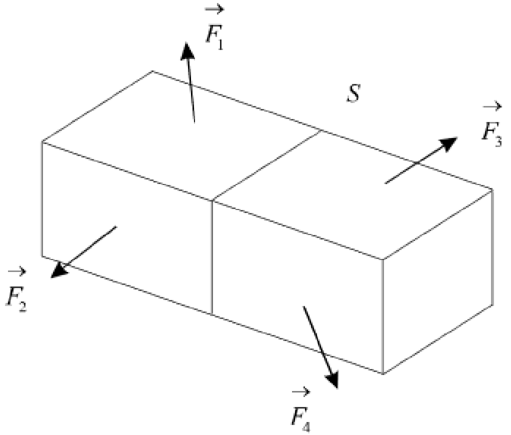


Corte na seção S

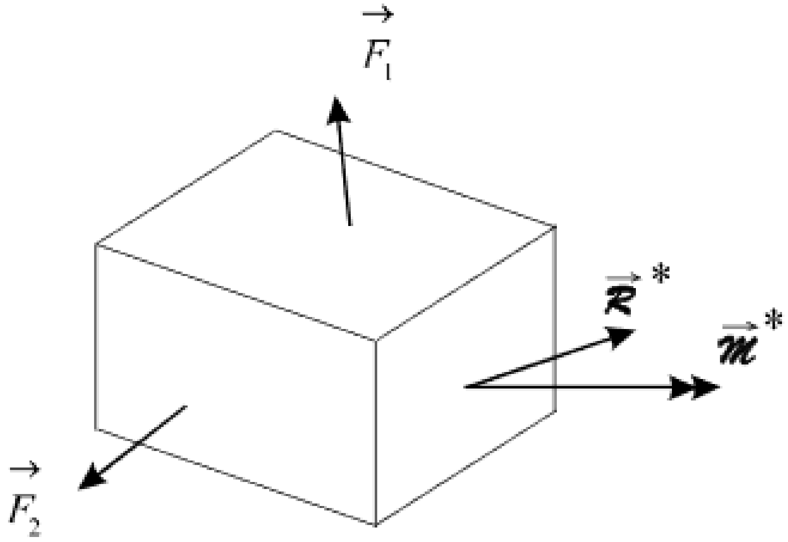


(a)

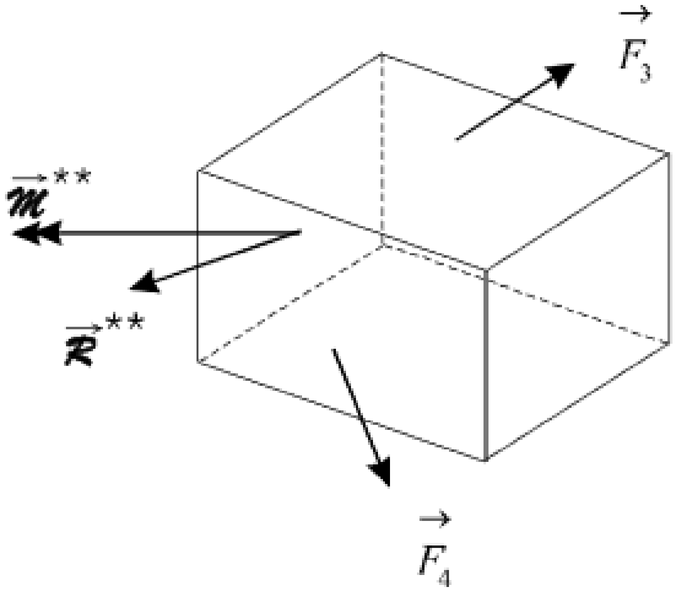
Demonstração



Redução dos esforços no CG da seção:



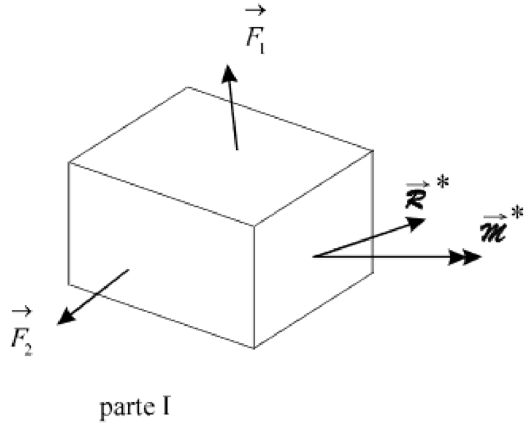
parte I

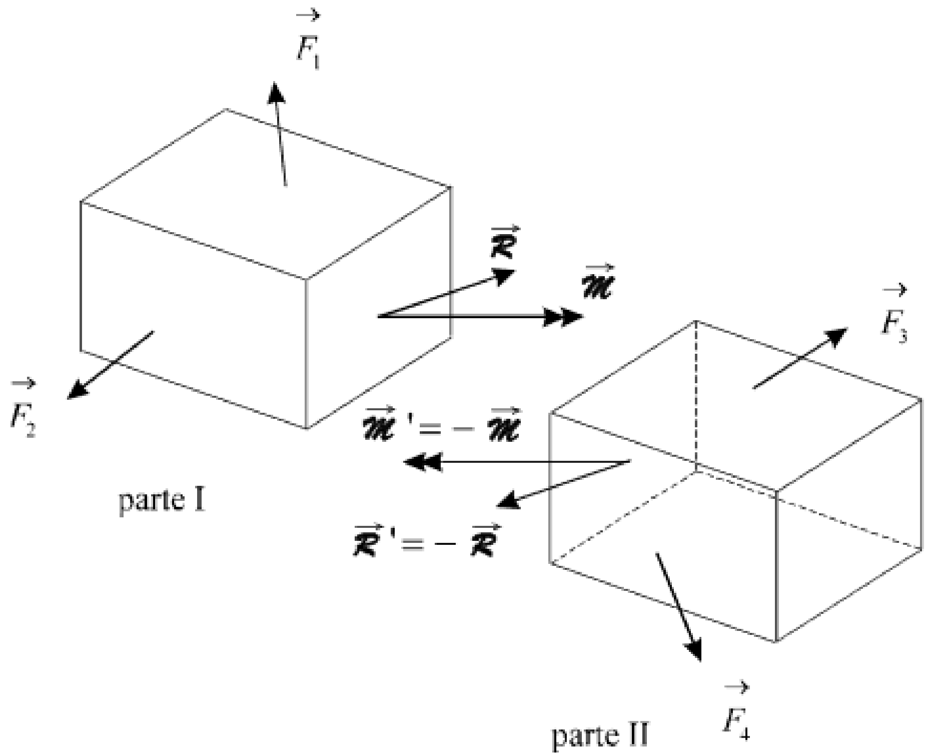


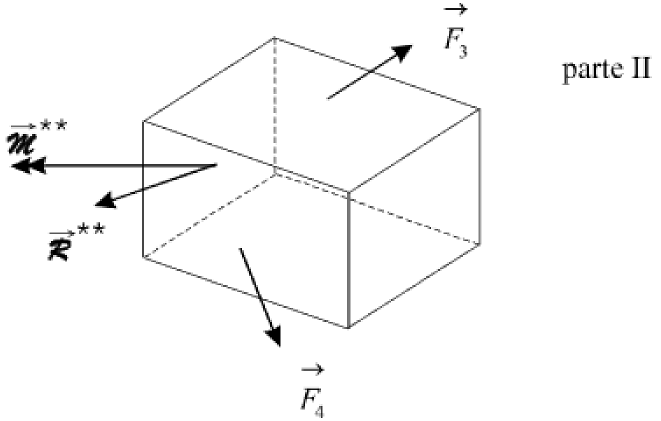
parte II

Demonstração

Devido ao conceito de ação e reação:







$\vec{\mathcal{R}}^{*} = \vec{\mathcal{R}}$ e $\vec{\mathcal{M}}^{*} = \vec{\mathcal{M}}$

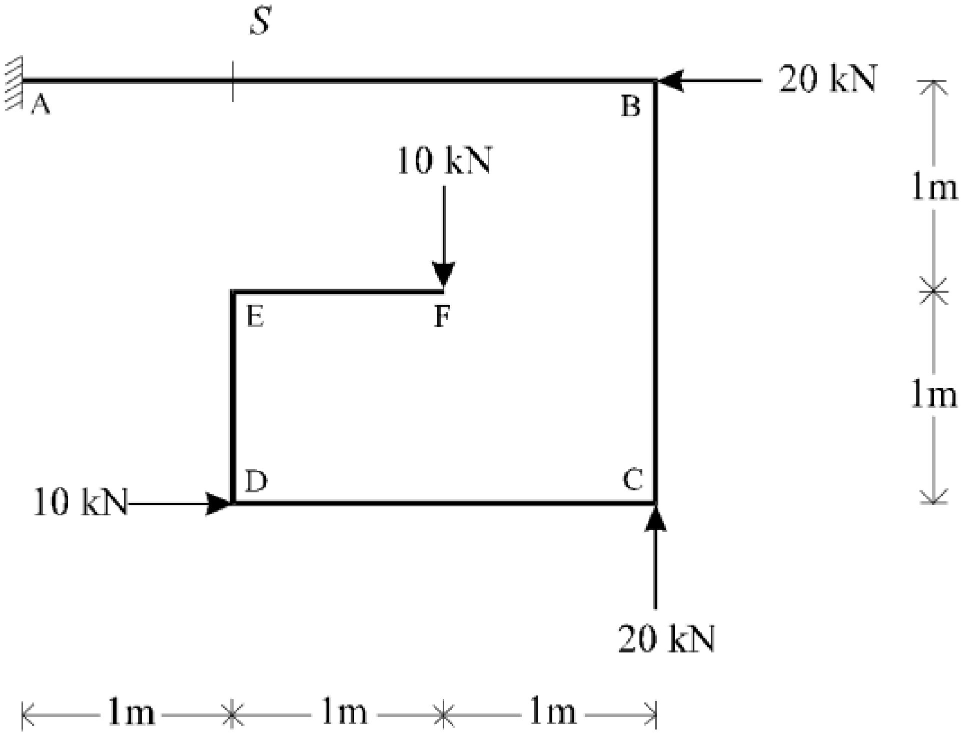
$\vec{\mathcal{R}}^{**} = \vec{\mathcal{R}}'$ e $\vec{\mathcal{M}}^{**} = \vec{\mathcal{M}}$

$$\vec{\mathcal{R}}^{**} = \vec{\mathcal{R}}' = -\vec{\mathcal{R}} = -\vec{\mathcal{R}}^{*}$$

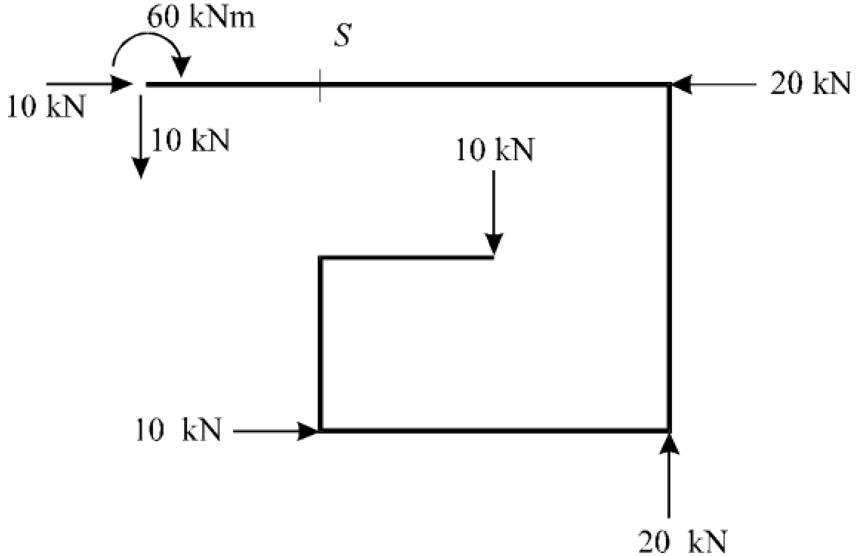
$$\vec{\mathcal{M}}^{**} = \vec{\mathcal{M}}' = -\vec{\mathcal{M}} = -\vec{\mathcal{M}}^{*}$$

Exemplo

Obter os esforços na seção S:

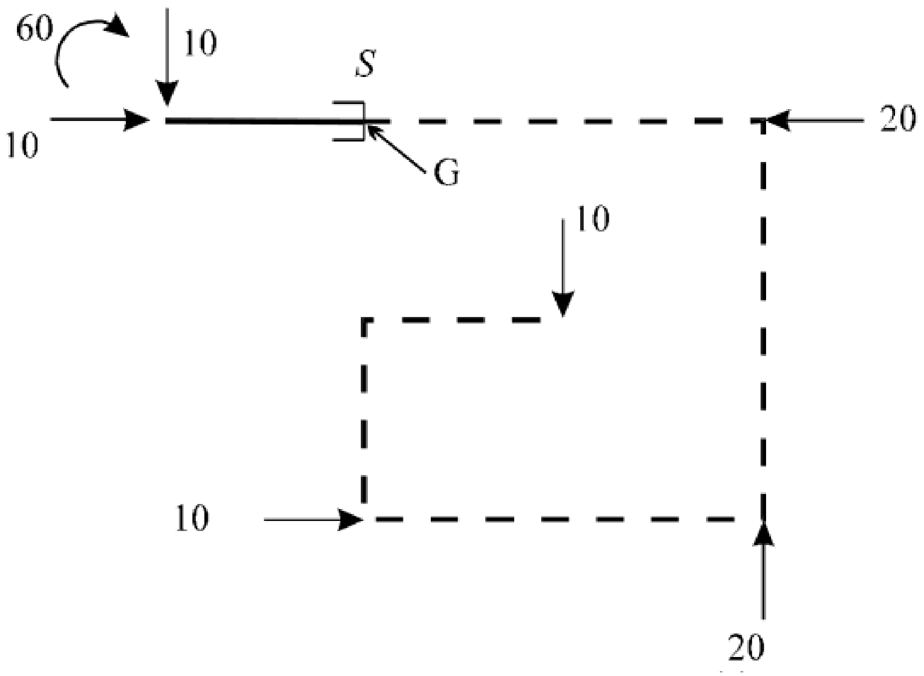


a) Cálculo das reações:



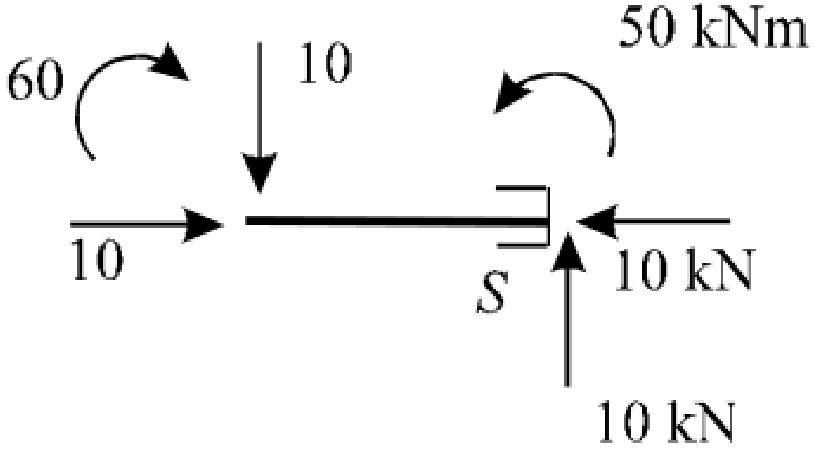
Exemplo

b) Corte à esquerda:



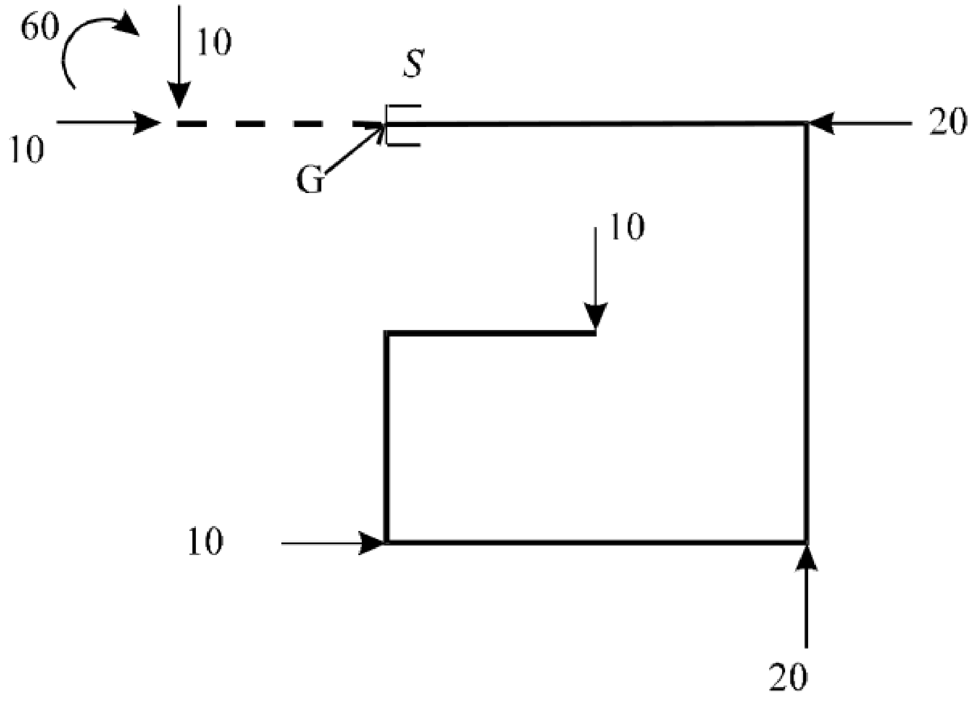
Realizando equilíbrio estático no corpo cortado:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M_s = 0$$



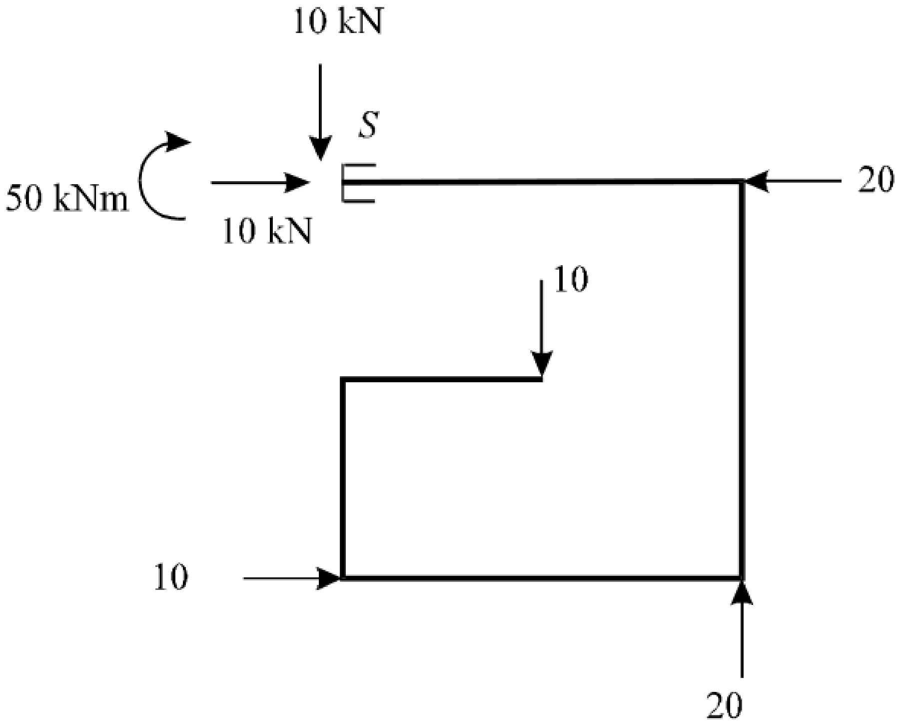
Teorema fundamental: exemplo 2

c) Corte à direita:



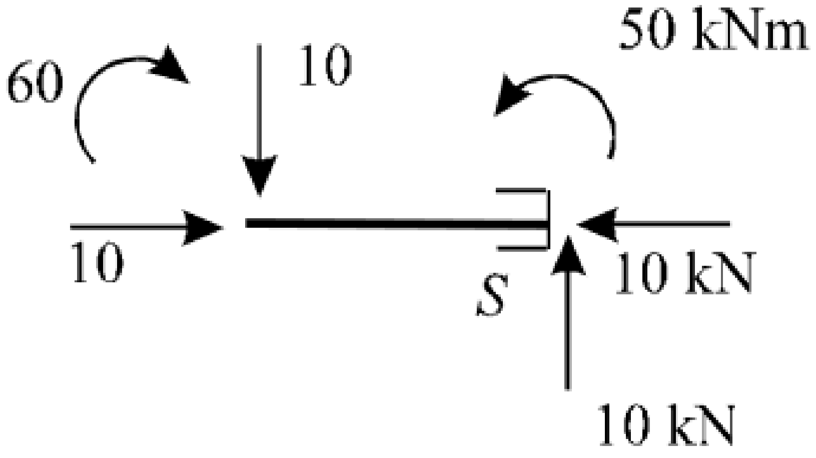
Realizando equilíbrio estático no corpo cortado:

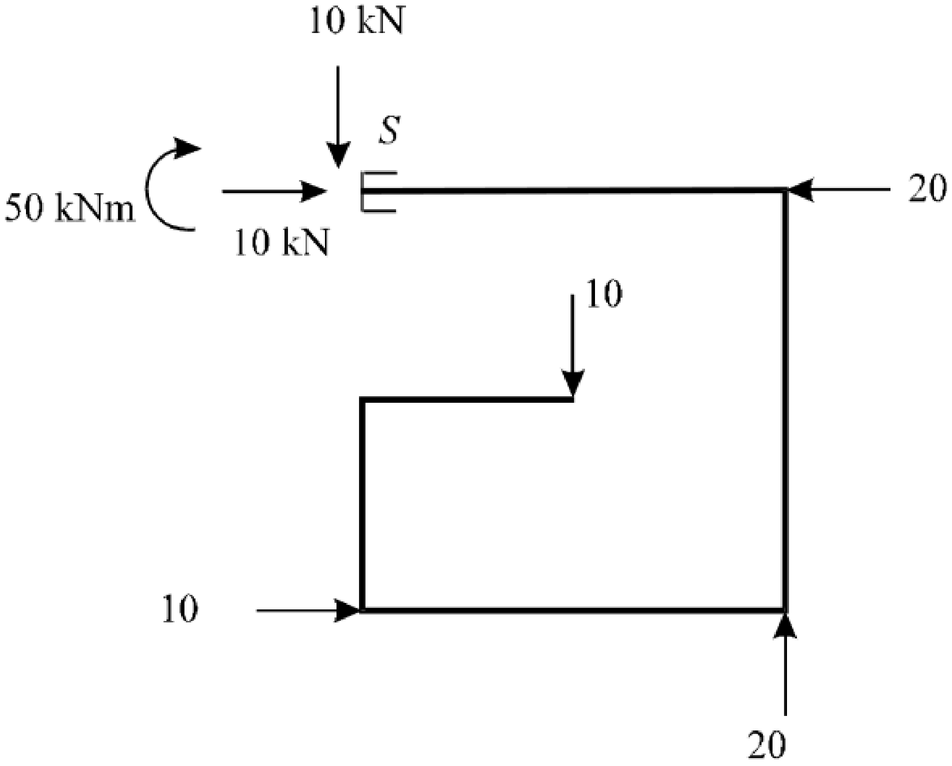
$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M_s = 0$$



Teorema fundamental: exemplo

A seção S está com os seguintes esforços solicitantes:



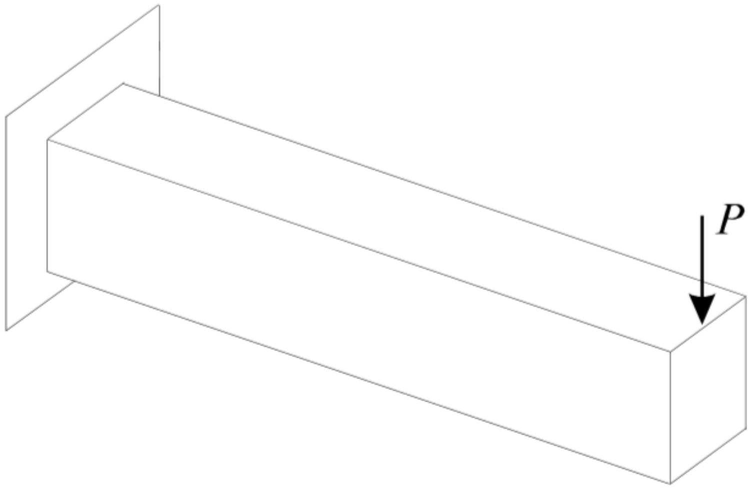


N_s = 10 kN
V_s = 10 kN
M_s = 50 kNm

(sentidos indicados pelo equilíbrio)

Diagramas de esforços solicitantes de estruturas planas

Se se aumentar continuamente o valor da carga P aplicada nesta viga, onde deverá ocorrer sua ruptura, ou seja, onde a viga irá se romper?”



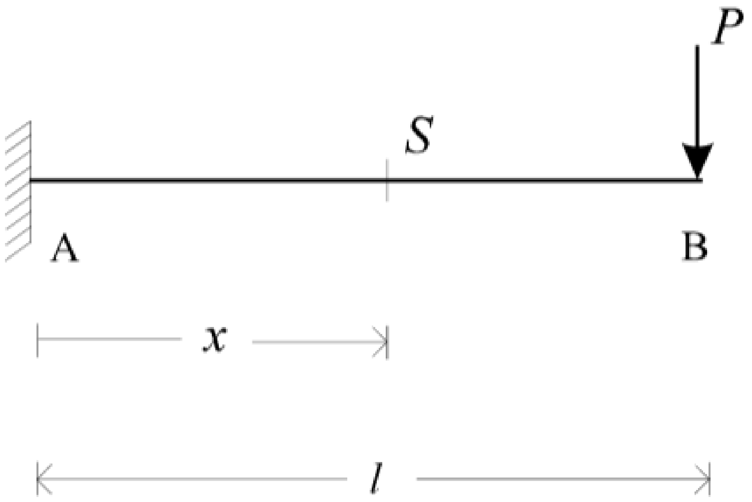
Por que os maiores esforços nesta viga se darão junto ao engastamento?”

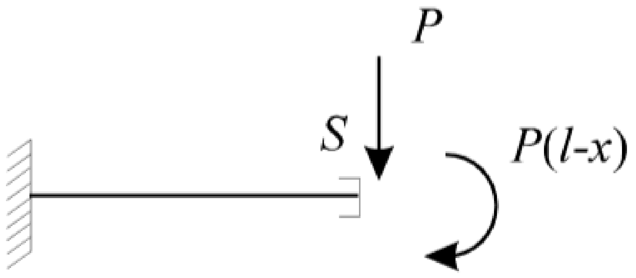
A viga deverá se romper junto ao engastamento porque é nesta região que ela estará sujeita aos maiores esforços.

Diagramas de esforços

Seja a viga em balanço:

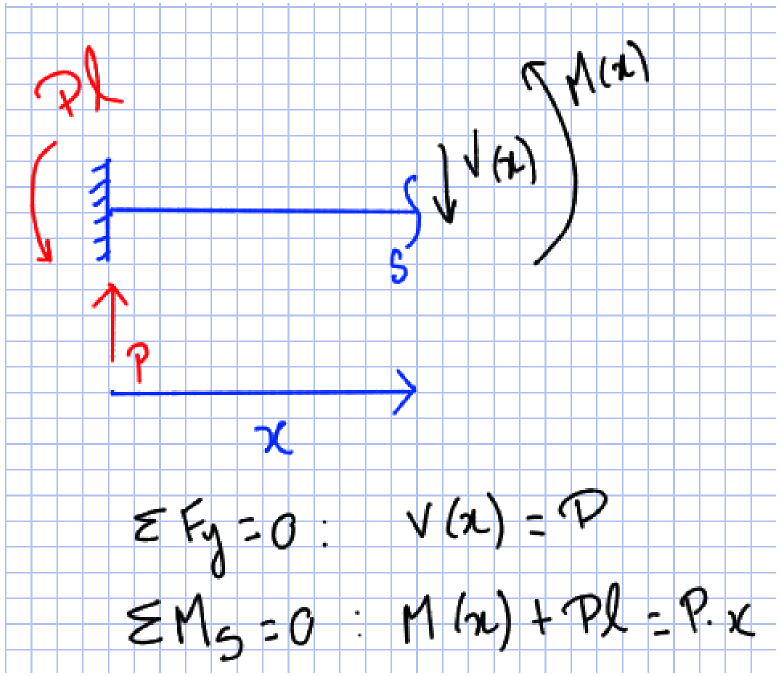
Corte S numa seção x:





$$V(x) = P$$

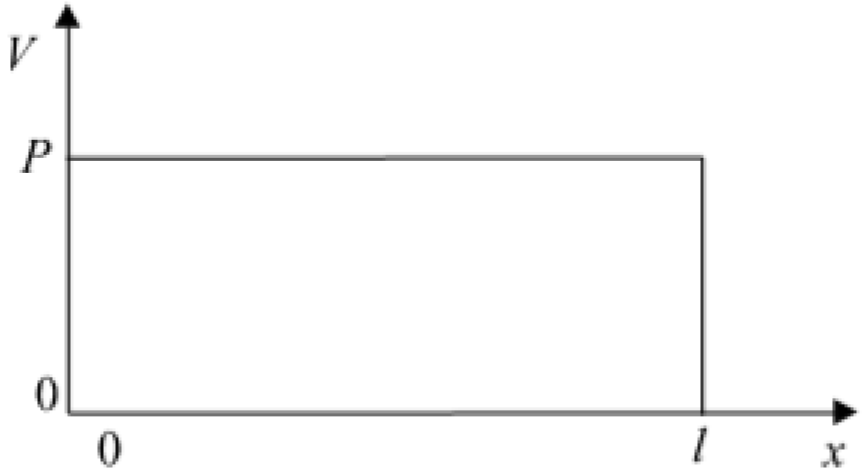
$$M(x) = P(l - x)$$

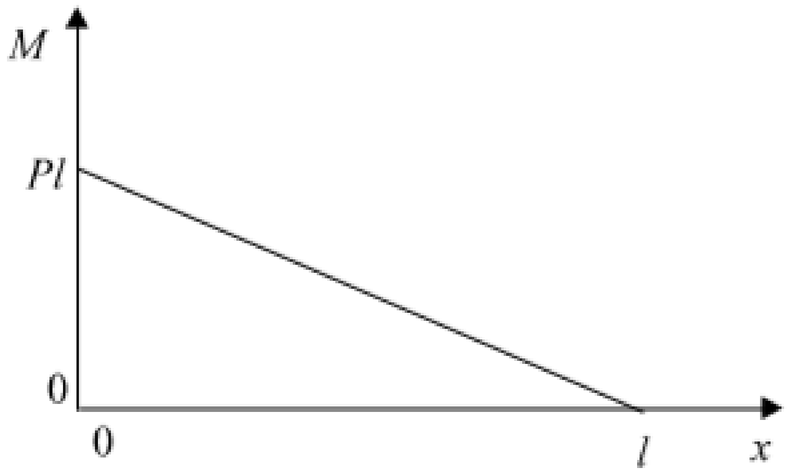


Diagramas de esforços

Diagramas de esforços:

Gráficos que mostram a variação da força cortante e do momento fletor ao longo da estrutura

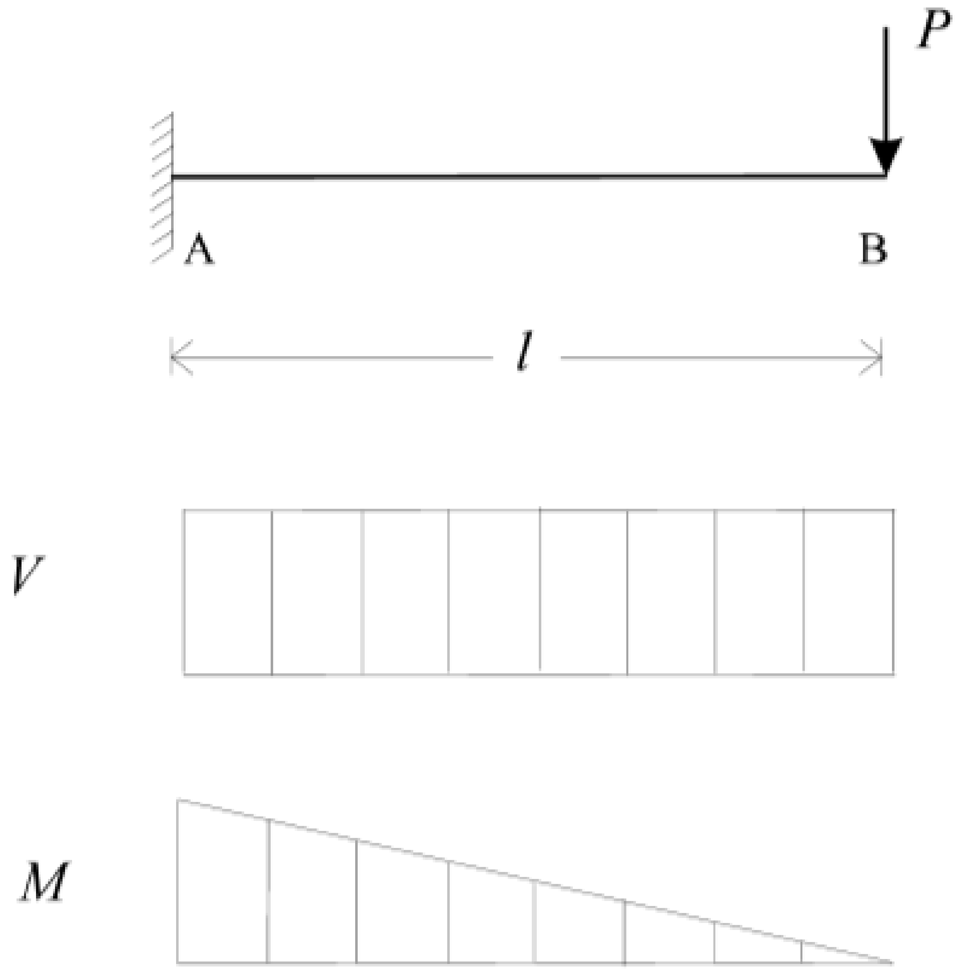




Seção junto ao engaste é a mais solicitada

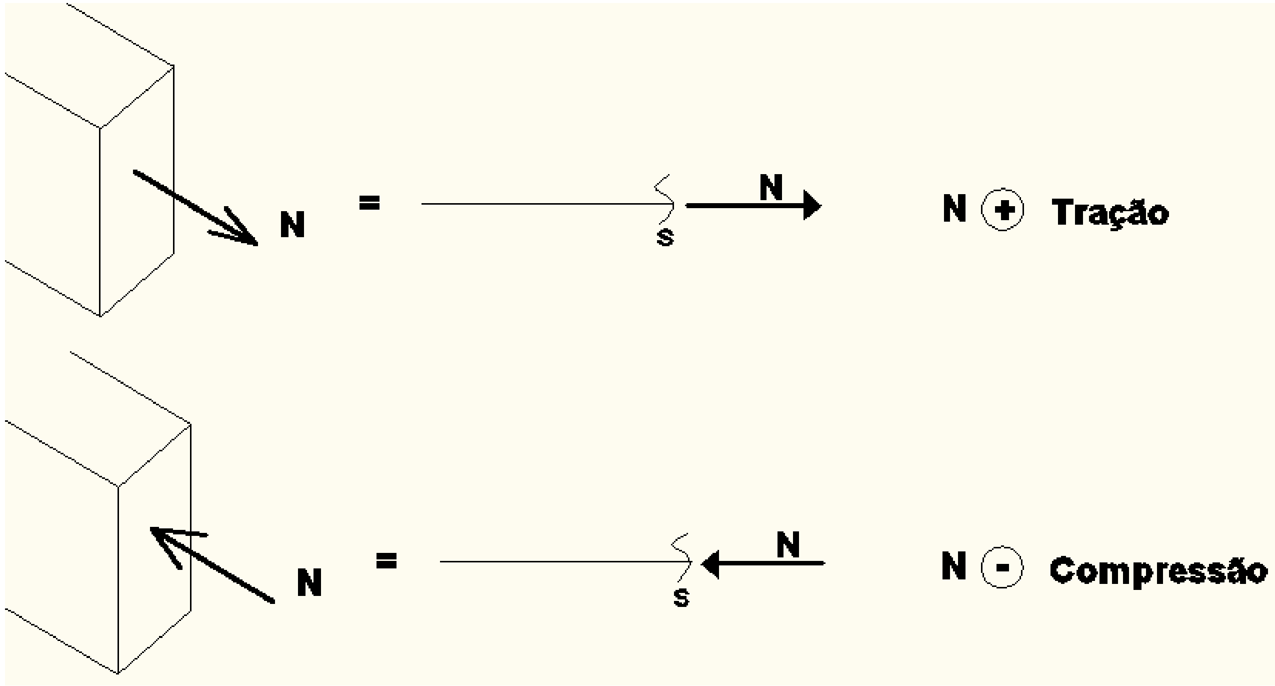
Diagramas de esforços

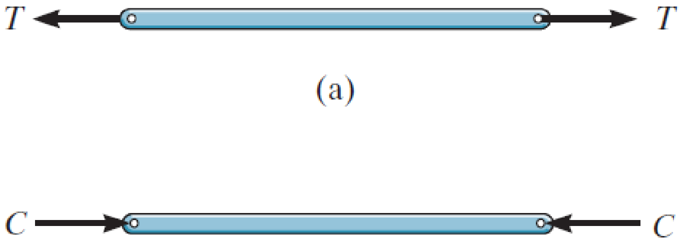
Valores plotados são na direção perpendicular, ou paralelo ao eixo, conforme definição do esforço

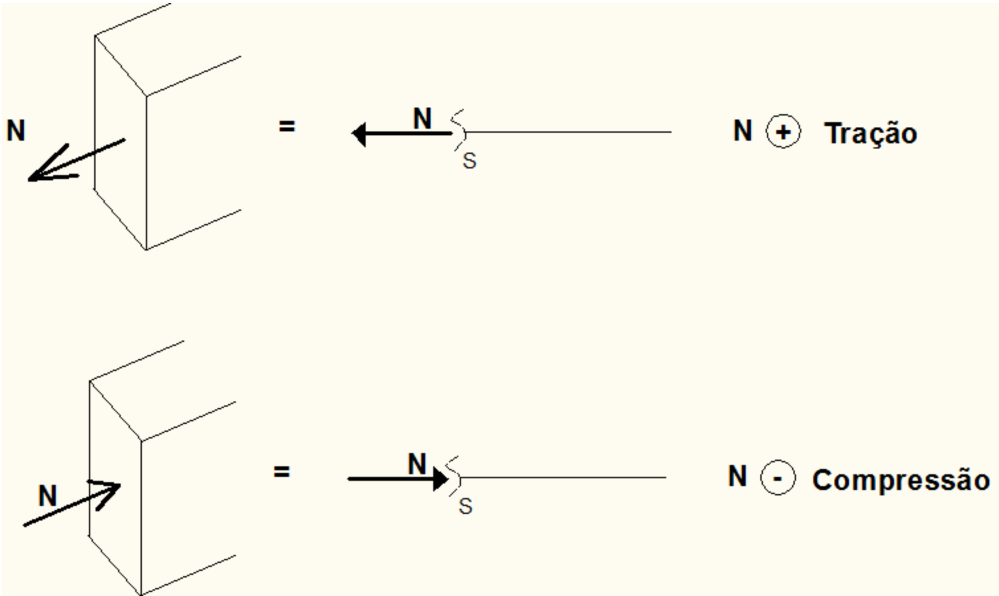


Diagramas de esforços - Convenção de sinais

Esforço Normal (N)

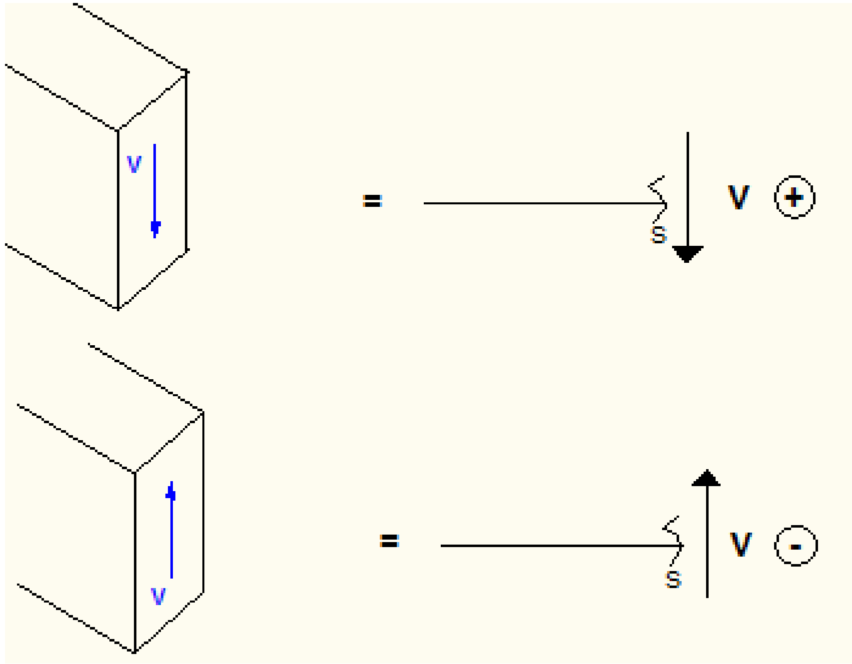


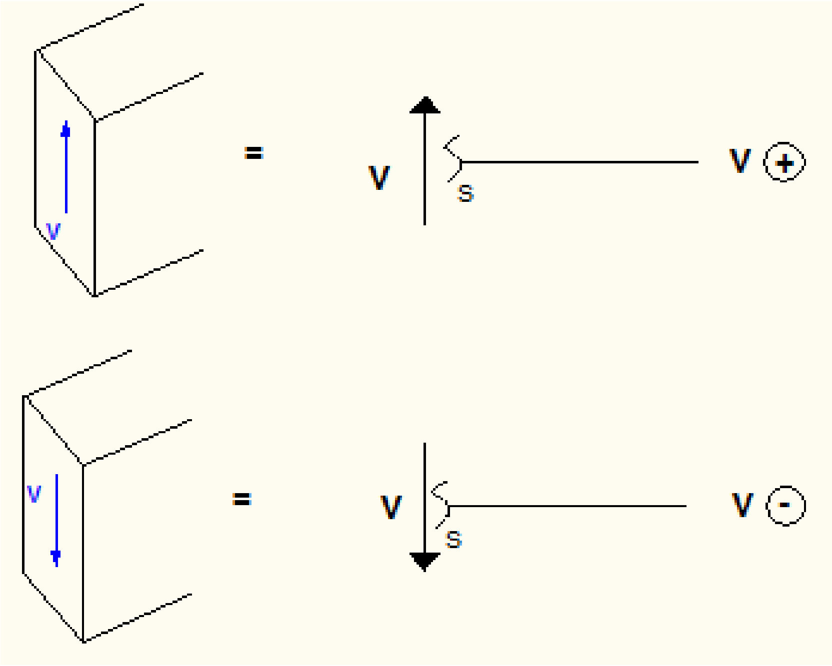




Diagramas de esforços - Convenção de sinais

Esforço Cortante (V)

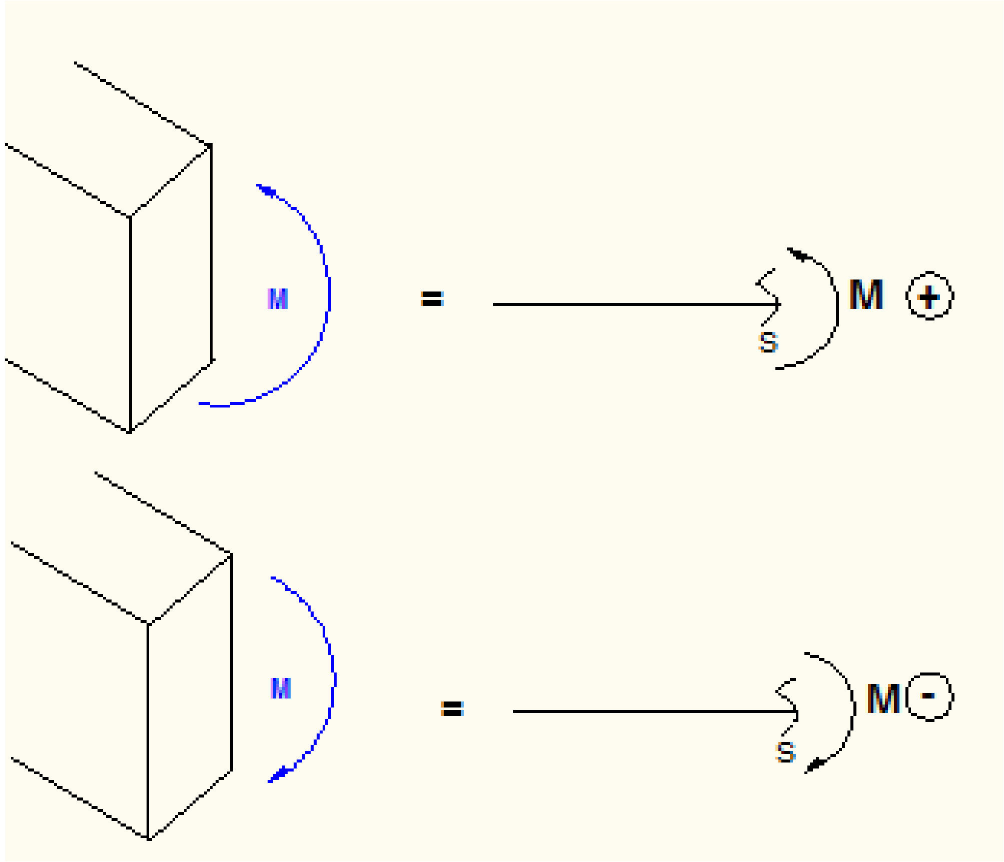


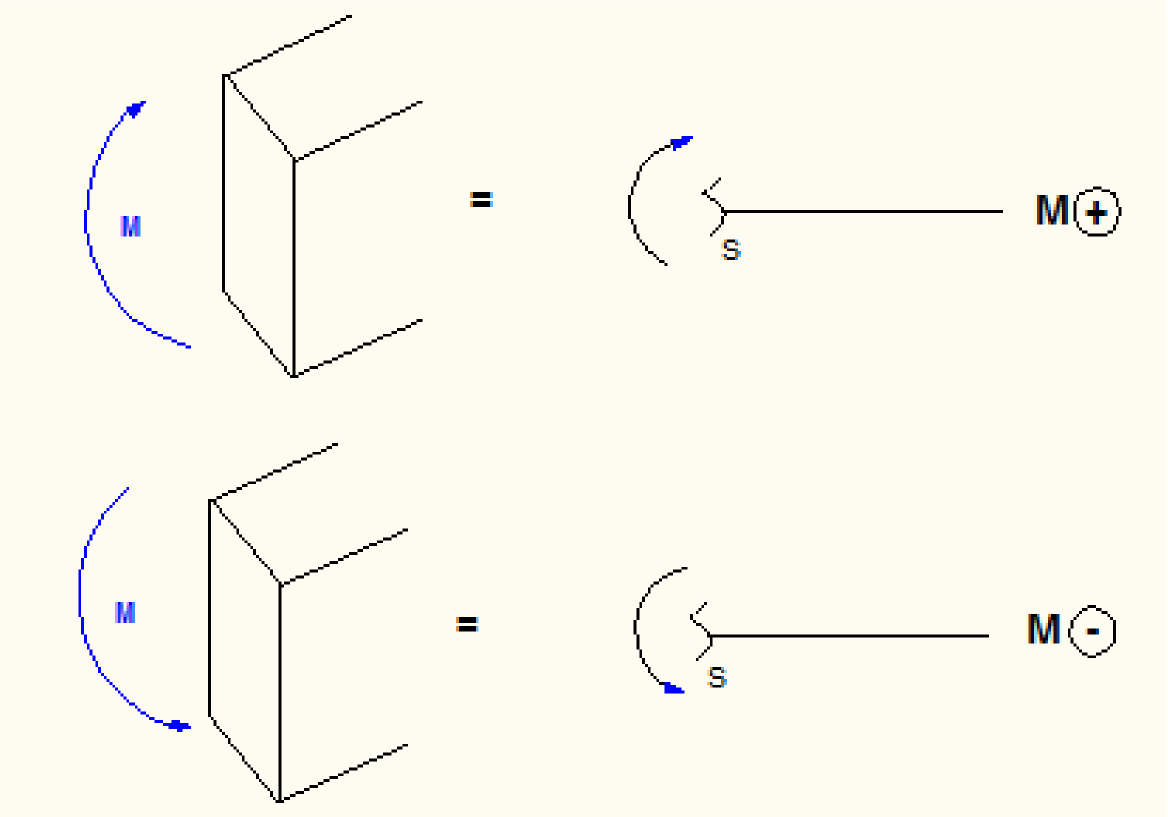


Força cortante	Gira o trecho de barra em que atua no sentido horário **V>0**	Gira o trecho de barra em que atua no sentido anti-horário **V<0**

Diagramas de esforços - Convenção de sinais

Momento fletor (M)

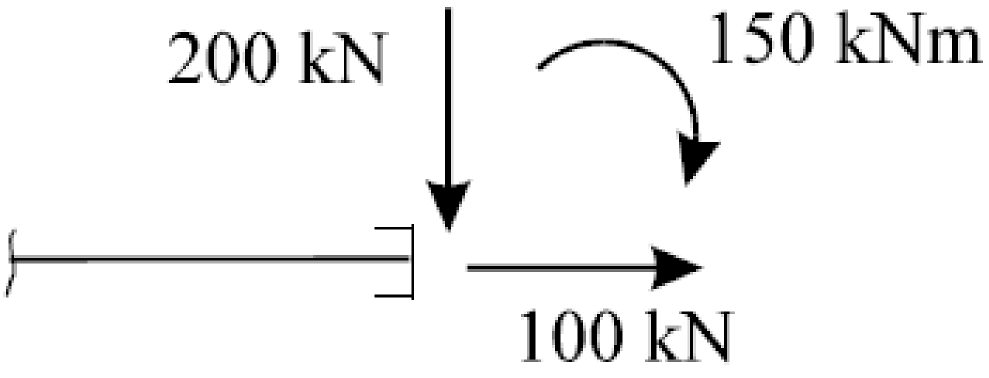




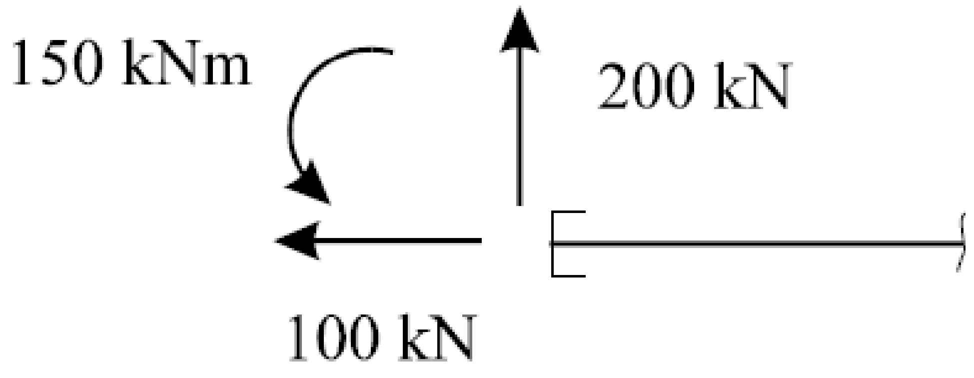
Momento fletor	Traciona as fibras inferiores da barra	Traciona as fibras superiores da barra
	M>0	**M<0**

Exemplo 1

Corte à direita



Corte à esquerda



$$N = 100 \text{ kN}$$

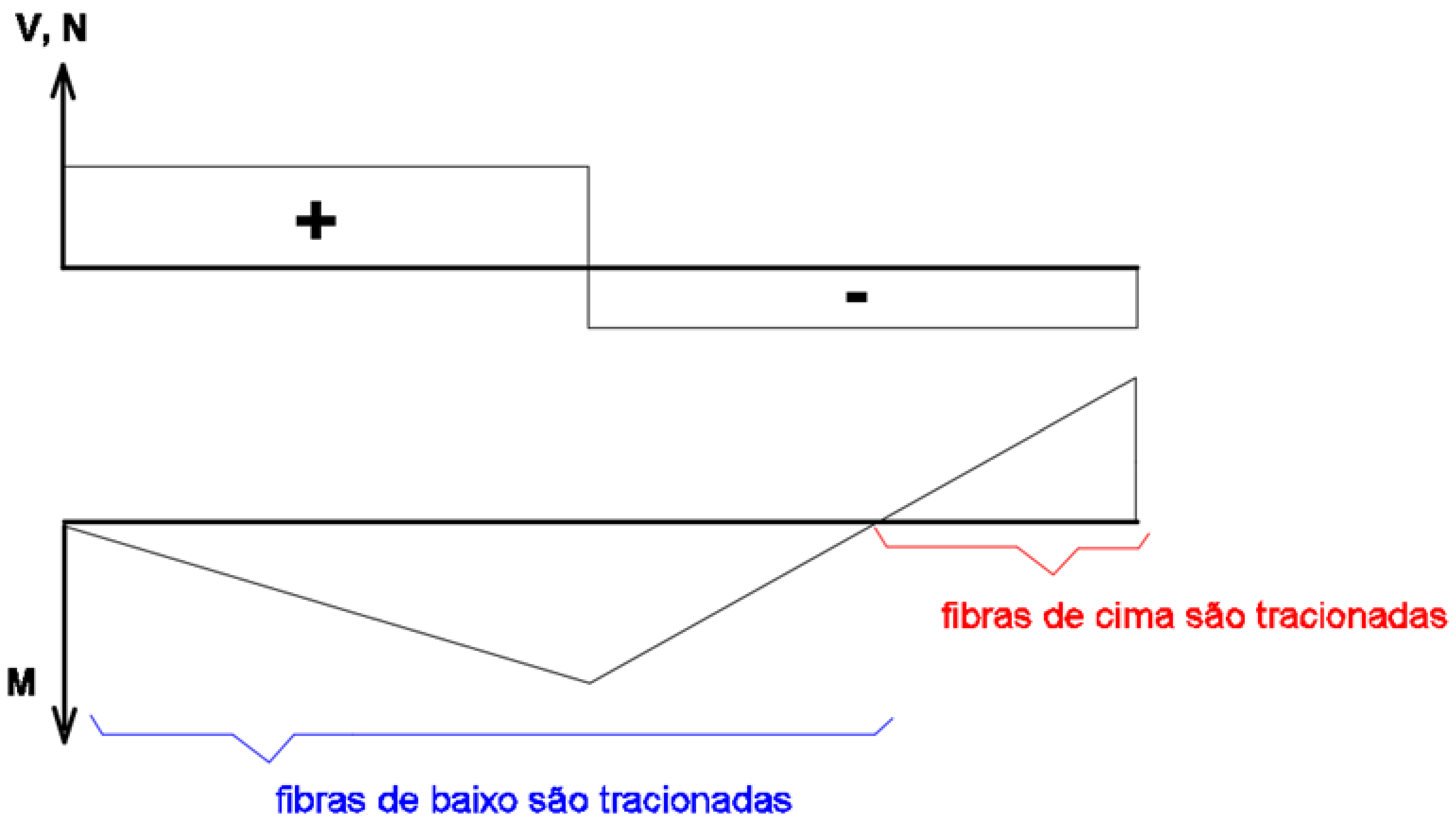
$$V = 200 \text{ kN}$$

$$M = -150 \text{ kNm}$$

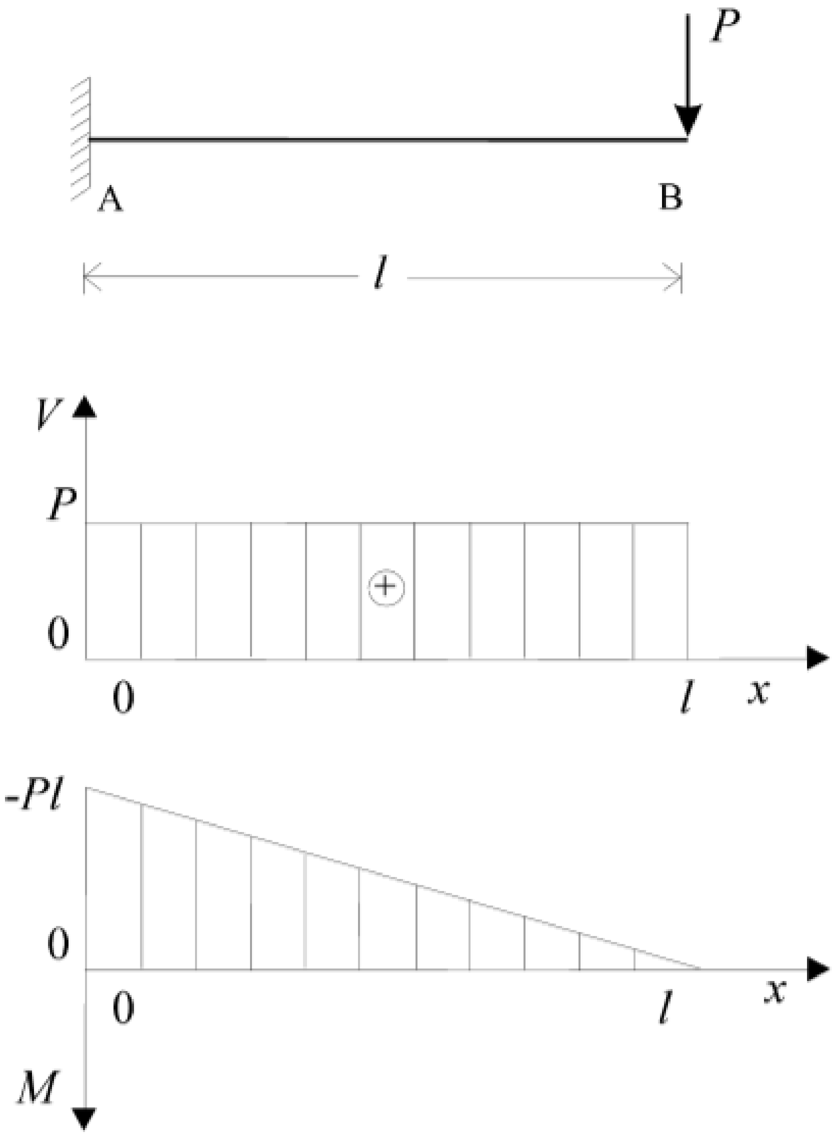
Diagramas de esforços - Desenhos

N, V > 0 → Desenha acima do eixo

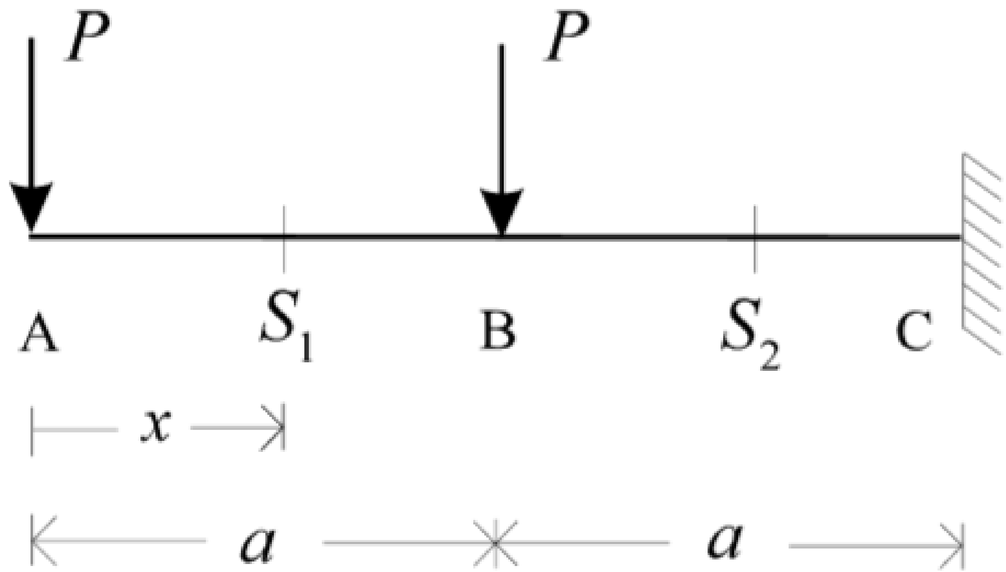
M: → Desenha o lado que traciona



Diagramas de esforços – Exemplo de diagrama



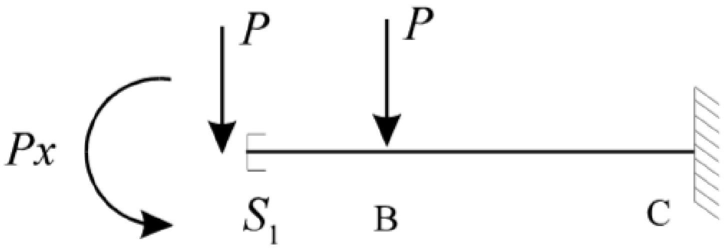
Exemplo 1: Duas forças verticais



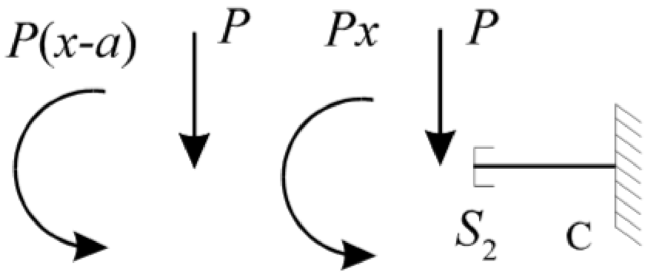
Note que entre AB e BC há uma força vertical concentrada.

Dividir corte em 2 trechos (S_1 e S_2):

Trecho S_1:



Trecho S_2 :



Exemplo 1: Determinar os diagramas de V e M para a viga em balanço

Por equilíbrio estático no corpo cortado:

• trecho AB $\quad 0 \le x < a$

$$N(x) = 0$$

$$V(x) = -P$$

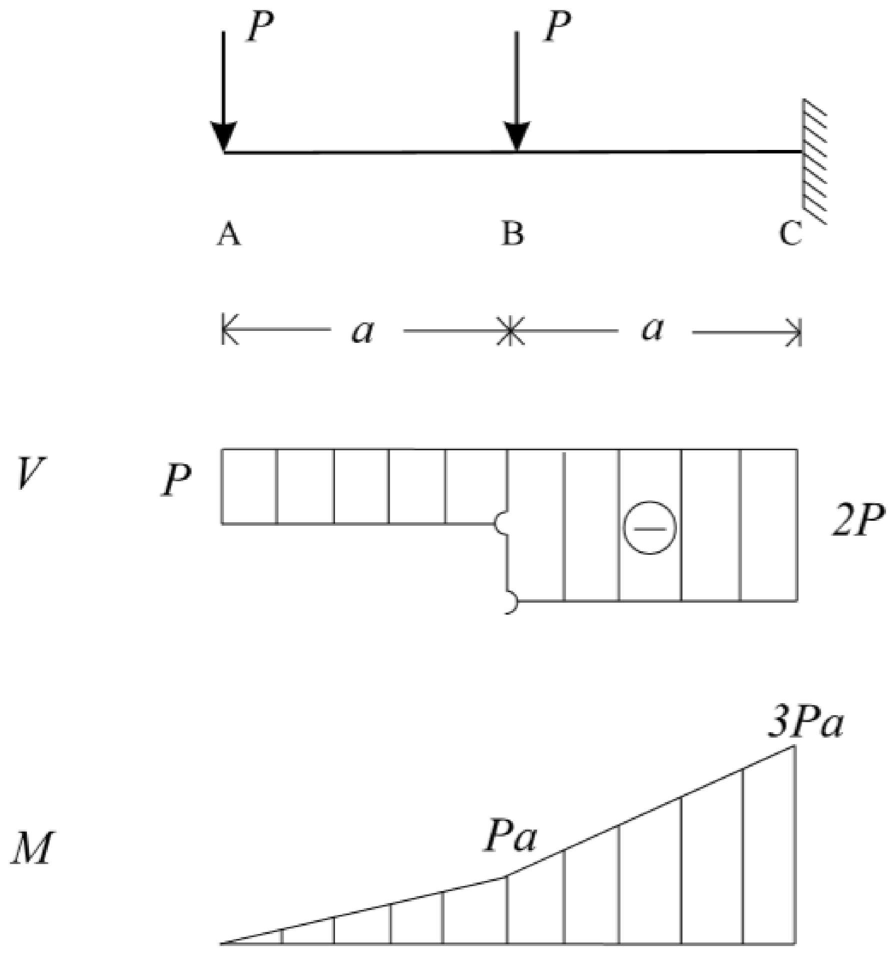
$$M(x) = -Px$$

• trecho BC $\quad a < x \le 2a$

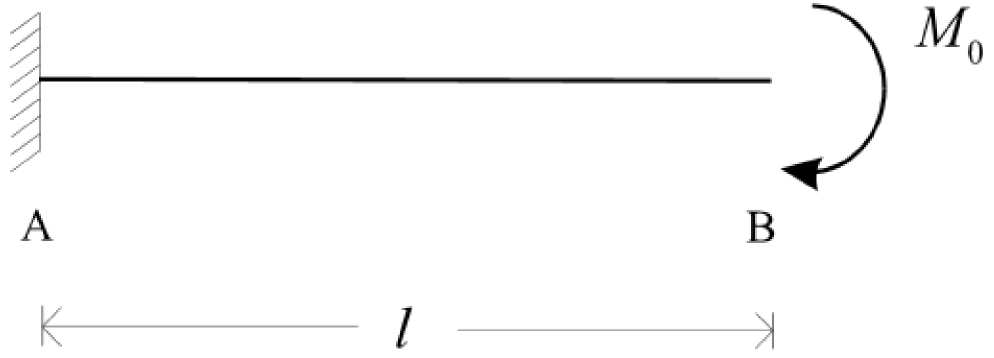
$$N(x) = 0$$

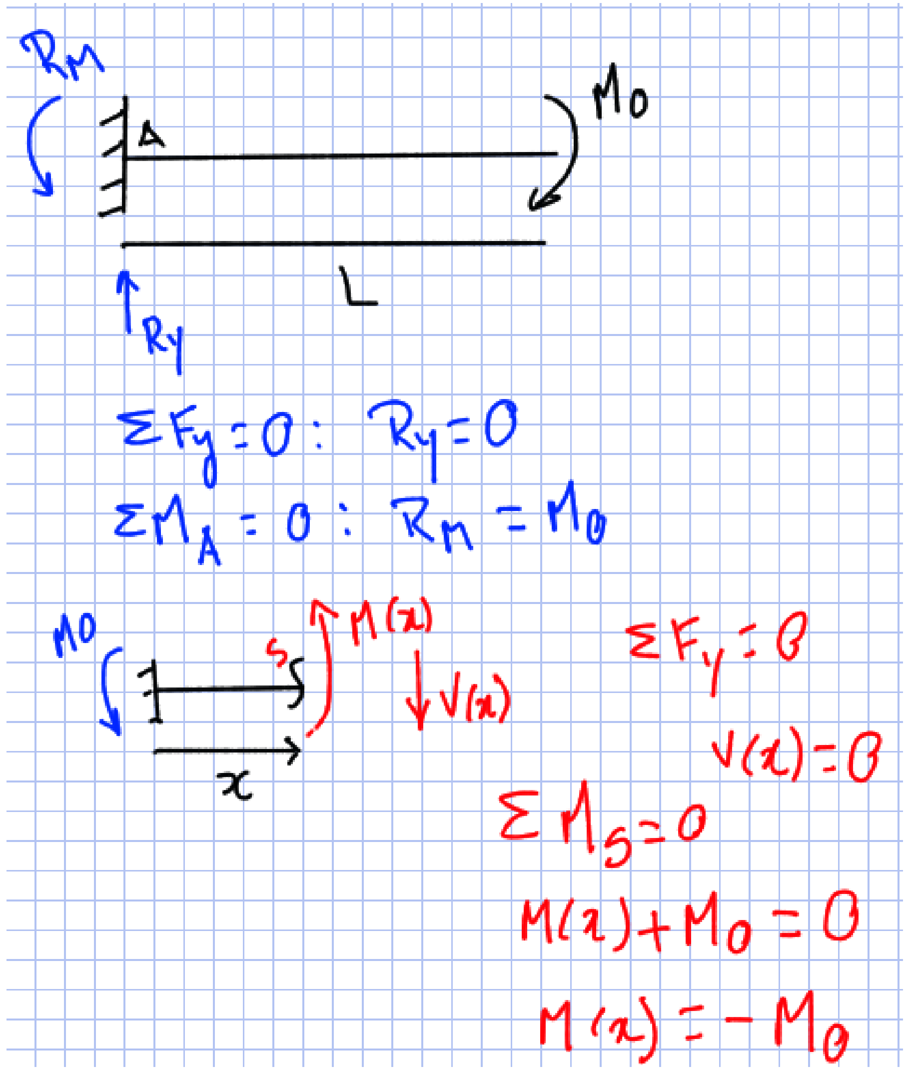
$$V(x) = -2P$$

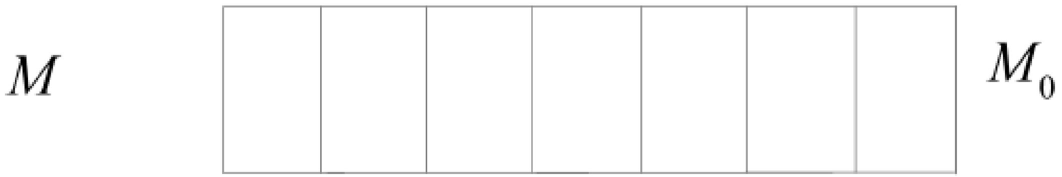
$$M(x) = -Px - P(x-a)$$



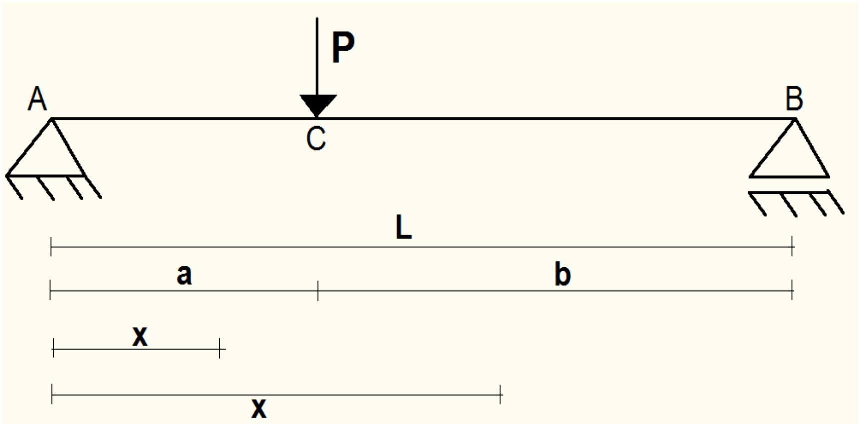
Exemplo 2: Determinar os diagramas de V e M com momento concentrado



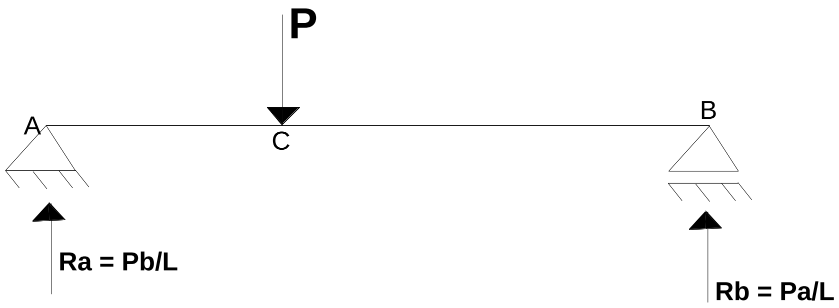




Exemplo 3: Determinar os diagramas de V e M na viga bi-apoiada



1. Obter reações:



2. Esforços em cada trecho:

Determinação das equações nos cortes de cada trecho:

Trecho 1: $0 < x < a$

$$\sum F_y = 0$$

$$R_a - V(x) = 0 \rightarrow V(x) = R_a$$

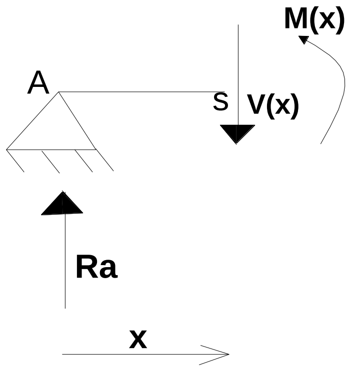
$V(x) = P \cdot b / L$ (constante)

$$\sum M_s = 0$$

$$M(x) - R_a \cdot x = 0 \rightarrow M(x) = R_a \cdot x$$

$M(x) = P \cdot b \cdot x / L$ (reta)

Para x = a : $M(a) = P \cdot b \cdot a / L$



Exemplo 3: Determinar os diagramas de V e M na viga bi-apoiada

Trecho 2: $a < x < L$

$\sum F_y = 0$

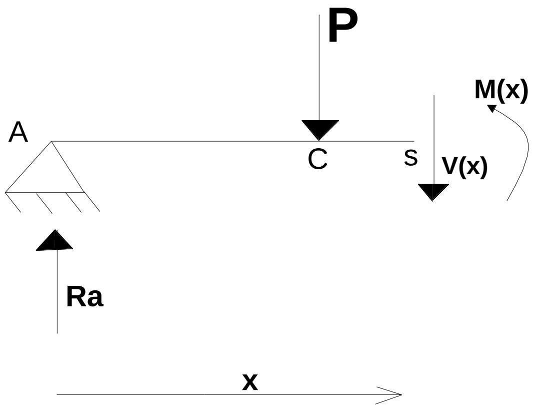
$R_a - P - V(x) = 0 \rightarrow V(x) = R_a - P = P \cdot b / L - P = P(b / L - 1) = -P \cdot a / L$

$V(x) = -P \cdot a / L$ (constante)

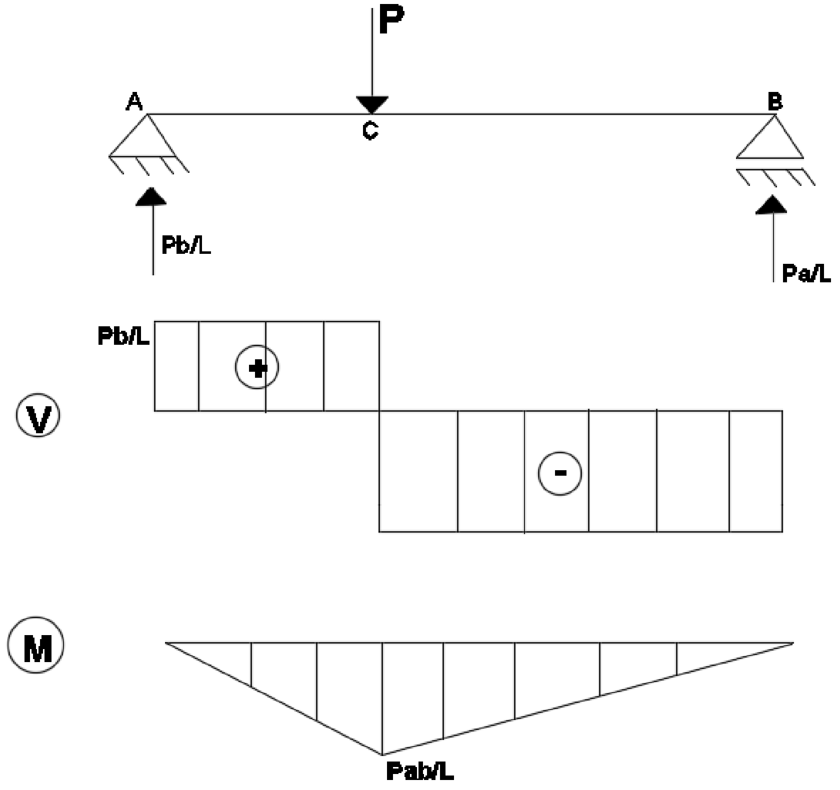
$\sum M_s = 0$

$M(x) + P \cdot (x - a) - R_a \cdot x = 0 \rightarrow M(x) = P \cdot b \cdot x / L - P(x - a)$

$M(x) = P \cdot a - (P \cdot a / L) \cdot x$ (reta)

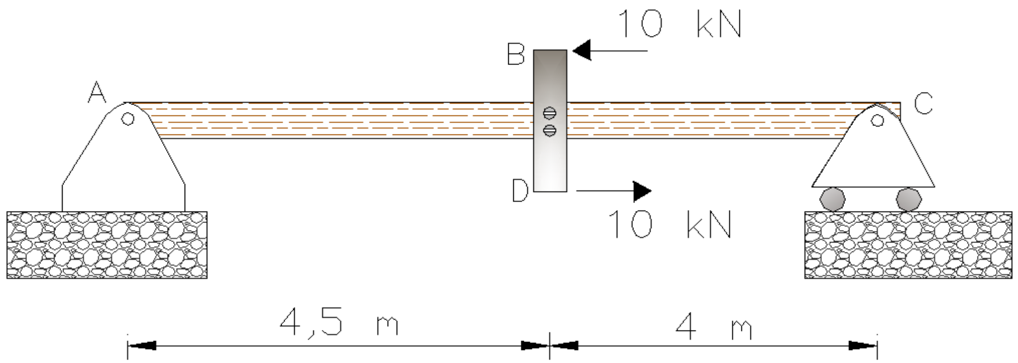


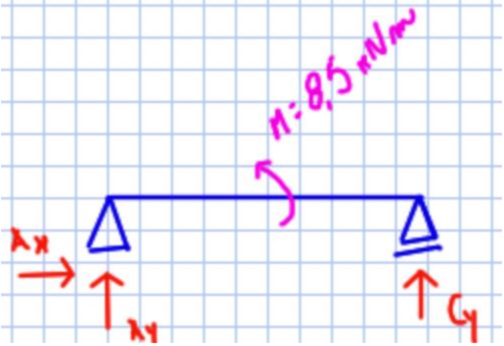
3. Diagramas:



Exemplo 4: Determinar os diagramas de V e M na viga bi-apoiada com momento concentrado*

Determinar os esforços solicitantes (M,V e N) na viga AC, sob a ação do binário indicado, onde a barra rígida BD tem dimensão de 85 cm.





$$\sum F_X = 0: \rightarrow A_x = 0; \sum M_C = 0: \rightarrow 8,5.A_y = 10.0,85 \rightarrow$$

$$A_y = 1 \;\; kN \;\; (\uparrow); C_y = -1 \;\; kN \;\; (\downarrow)$$

*Resistência do Materiais: Um guia prático. Valerio Almeida; Marcelo Greco, Daniel Maciel. Elsevier, 2018

Dois trechos para realizar os cortes:

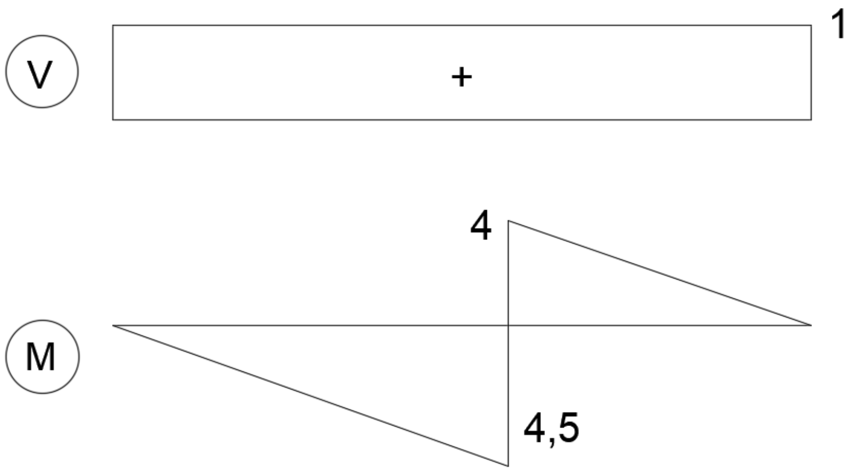
Trecho 1: $0 < x < 4{,}5$

$\sum F_y = 0: \rightarrow V(x) = 1 \rightarrow V(x) = 1; \sum M_S = 0: \rightarrow M(x) = x$

Valores nos extremos do intervalo:

Trecho 2: $4{,}5 < x < 8{,}5$

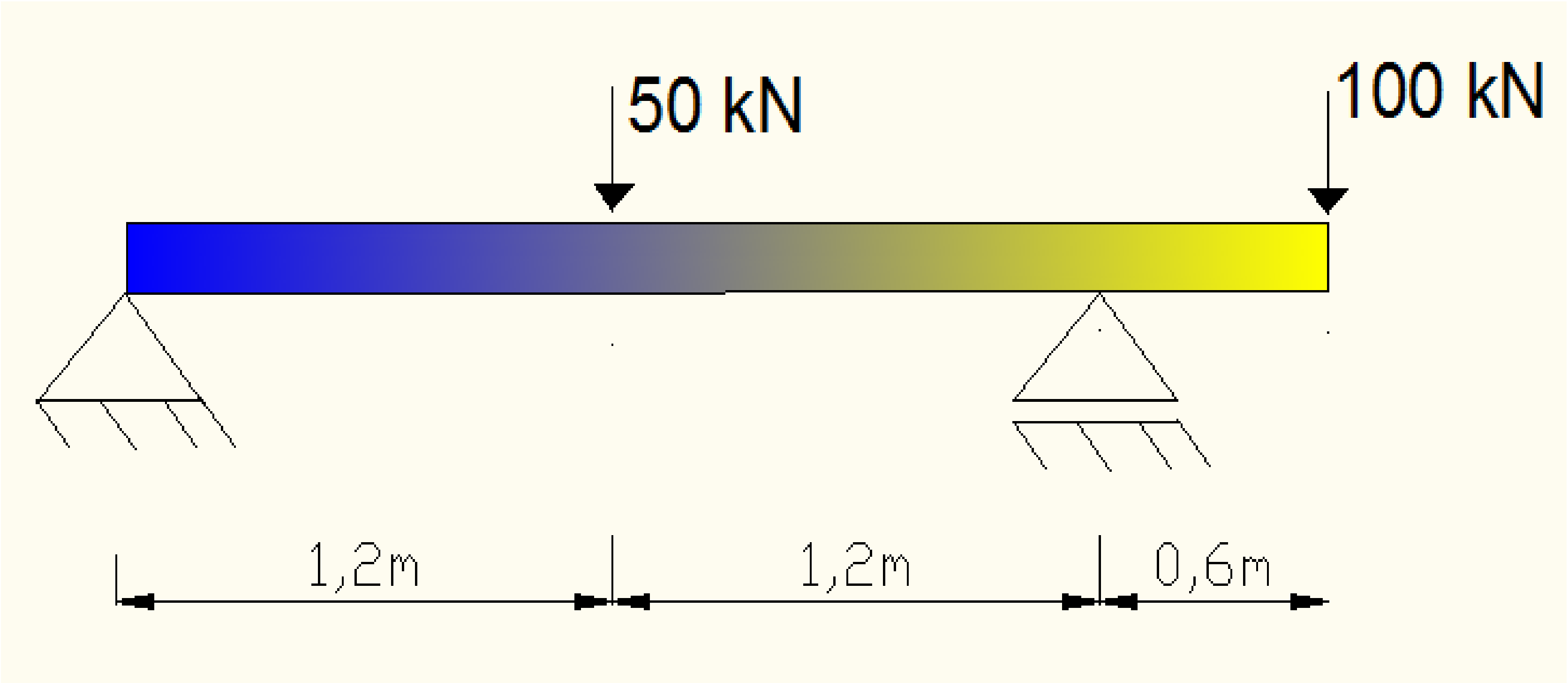
$\sum F_y = 0: \rightarrow V(x) = 1 \rightarrow V(x) = 1; \sum M_S = 0: \rightarrow M(x) = x - 8{,}5$



(kN,m)

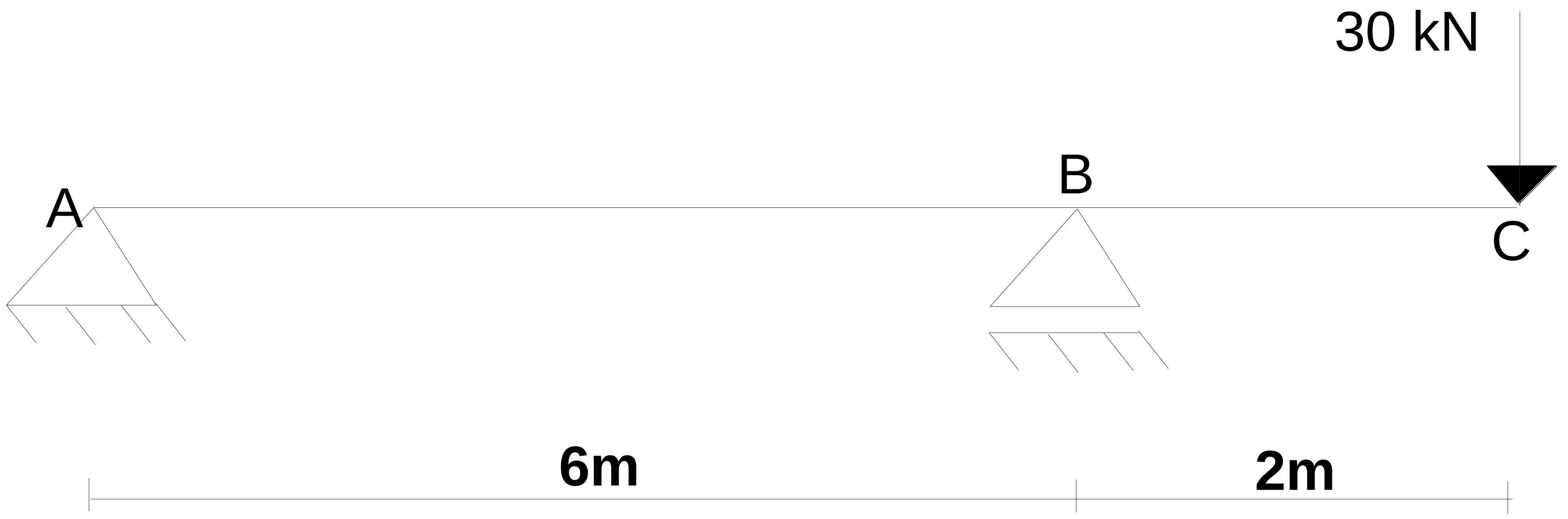
*Resistência do Materiais: Um guia prático. Valerio Almeida; Marcelo Greco, Daniel Maciel. Elsevier, 2018

Exemplo 5: Determinar os diagramas de V e M na viga bi-apoiada com balanço

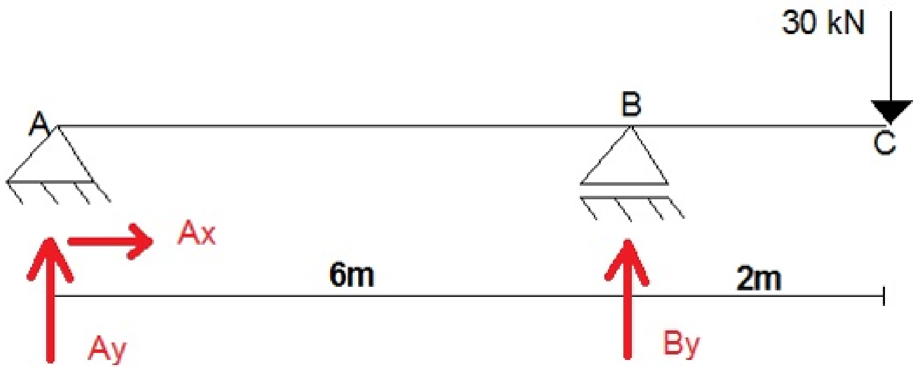


By = 150 kN; Ay = 0

Exemplo 6: Determinar os diagramas de V e M na viga bi-apoiada força apenas no balanço



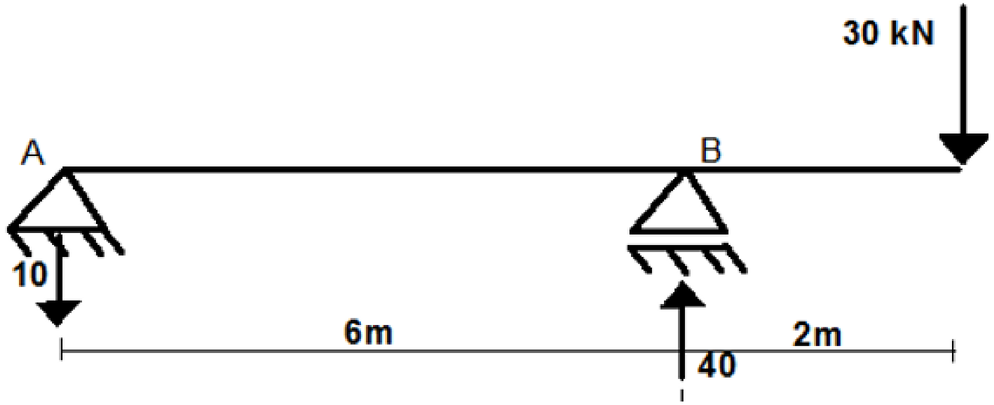
a. Cálculo das reações:



$$\sum F_X = 0 : \rightarrow A_x = 0$$

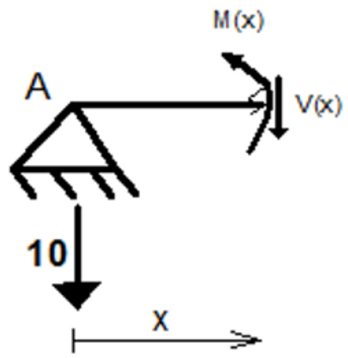
$$\sum M_A = 0 : \rightarrow B_y.6 = 30.8 \rightarrow B_y = 40 \ kN \ (\uparrow)$$

$$\sum F_y = 0 : \rightarrow A_y + 40 = 30 \rightarrow A_y = -10 \ kN \ (\downarrow)$$



b. Dois trechos para realizar os cortes:

i. *Trecho 1:* $0 < x < 6$



$$\sum F_y = 0 : \rightarrow V(x) + 10 = 0 \rightarrow V(x) = -10$$

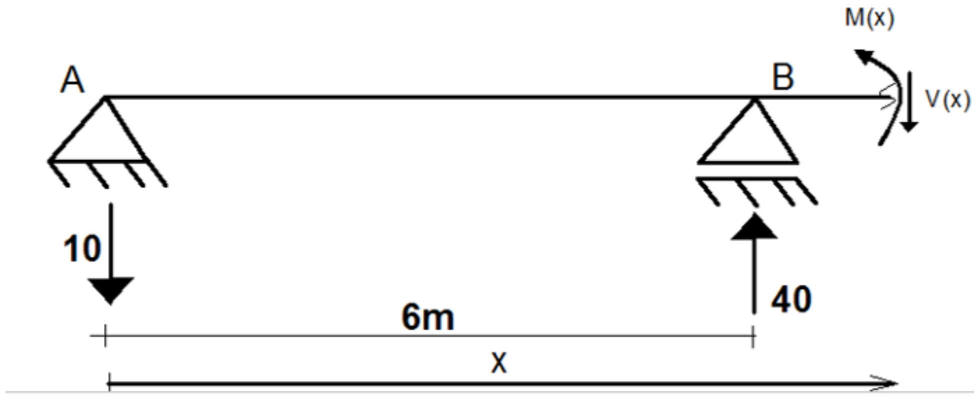
$$\sum M_S = 0 : \rightarrow M(x) + 10.x = 0 \rightarrow M(x) = -10.x$$

Valores nos extremos do intervalo:

$V(0) = V(6) = -10$

$M(0) = 0; \ \ M(6) = -60$

ii. *Trecho 2:* $6 < x < 8$



$$\sum F_y = 0 : \rightarrow V(x) + 10 - 40 = 0 \rightarrow V(x) = 30$$

$$\sum M_S = 0 : \rightarrow M(x) + 10.x - 40.(x-6) = 0 \rightarrow M(x) = 30.x \; - 240$$

Valores nos extremos do intervalo:

$$V(4) = V(8) = 30$$

$$M(6) = -60; \;\; M(8) = 0$$

c. Diagramas: