PEF3200 INTRODUÇÃO À MECÂNICA DAS ESTRUTURAS

AULA 4

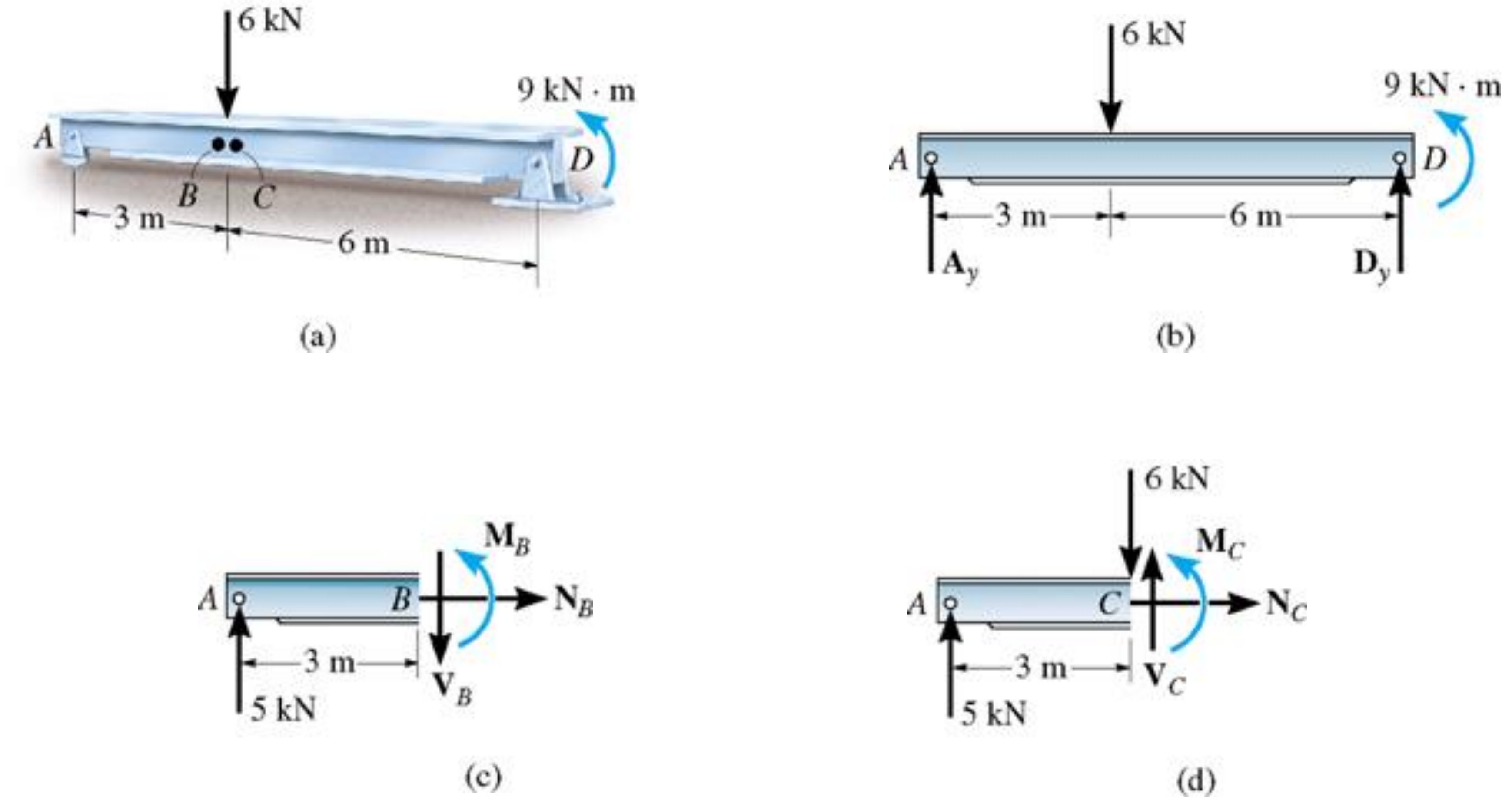
Osvaldo Nakao

PEF3200
Aula 4
19 abr
PROF. NAKAO

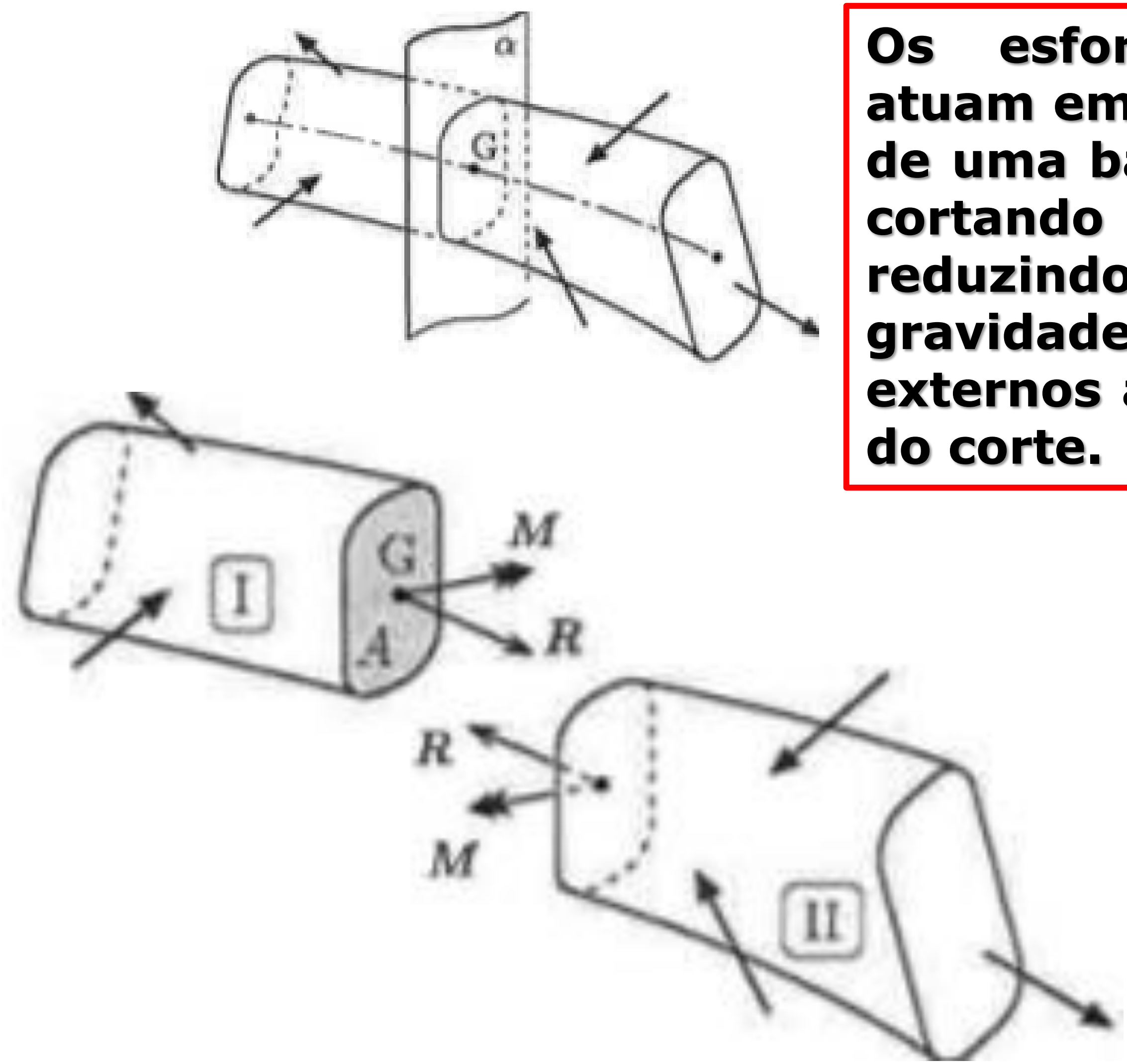
- **Diagramas de esforços solicitantes de estruturas planas**

Exercício 2. (aula 3)

DETERMINE AS REAÇÕES NOS APOIOS E OS ESFORÇOS SOLICITANTES NOS PONTOS B E C DA VIGA DA FIGURA

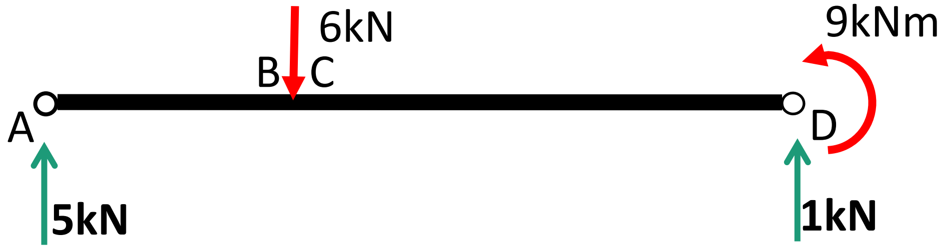


Teorema fundamental da Resistência dos materiais
Teorema do corte

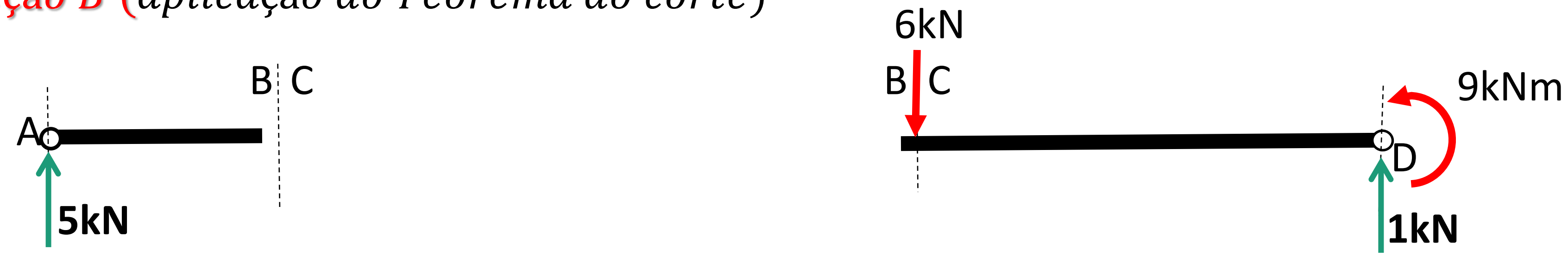


Os esforços solicitantes que atuam em uma seção transversal de uma barra podem ser obtidos cortando a barra nesta seção e reduzindo no seu centro de gravidade todos os esforços externos aplicados do outro lado do corte.

Fonte: Almeida Neto, E. S. Conceitos fundamentais de Resistência dos materiais, apostila Epusp, São Paulo, 2011

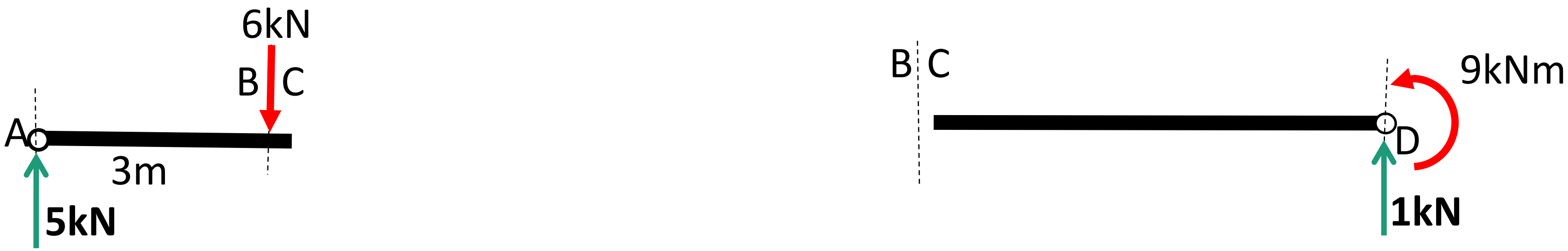


Seção B (*aplicação do Teorema do corte*)

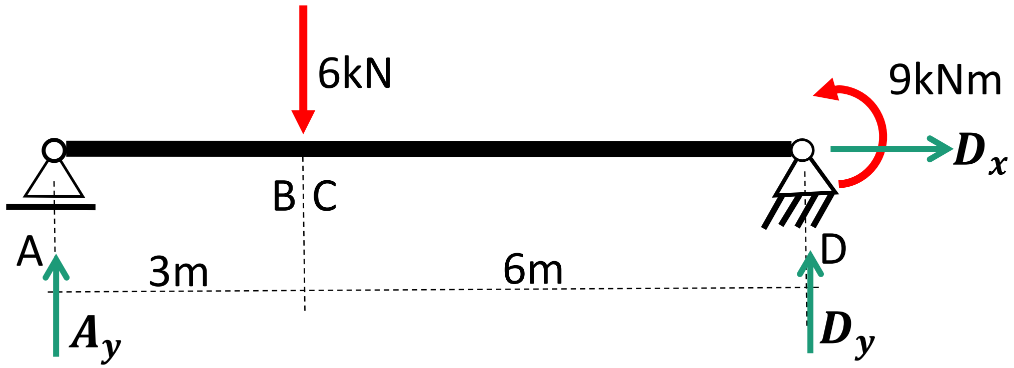


Pelo Teorema do corte, divide-se a estrutura apenas em duas partes na seção de interesse

Seção C (*aplicação do Teorema do corte*)



Os esforços solicitantes que atuam em uma seção transversal de uma barra podem ser obtidos cortando a barra nesta seção e reduzindo no seu centro de gravidade todos os esforços externos aplicados do outro lado do corte.



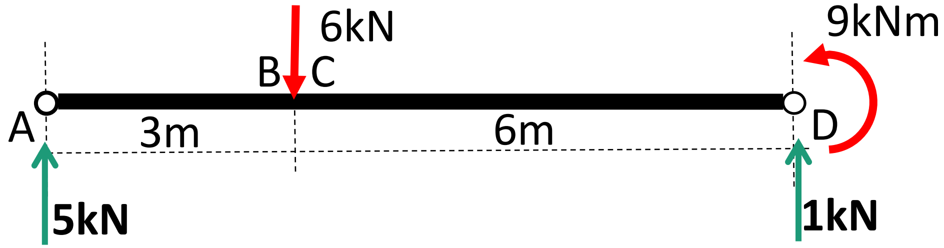
1. *Reações nos apoios*

$$\sum X = 0 = D_x \Rightarrow \boldsymbol{D_x = 0}$$

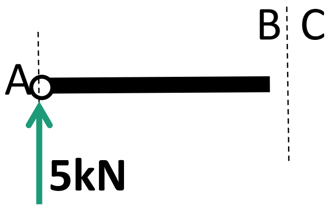
$$\sum M_D = 0 = -A_y * 9 + 6 * 6 + 9 \Rightarrow \boldsymbol{A_y = 5\ kN}$$

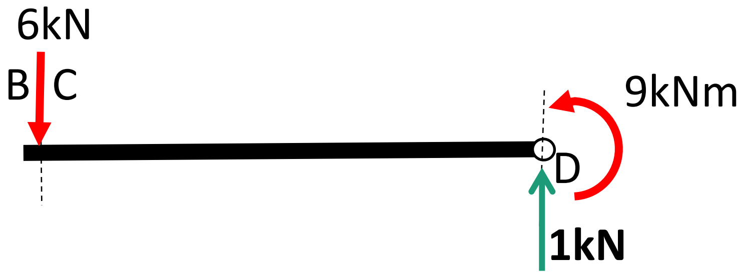
$$\sum Y = 0 = A_y - 6 + D_y \Rightarrow 5 - 6 + D_y = 0 \Rightarrow \boldsymbol{D_y = 1\ kN}$$

2. *Diagrama do corpo livre* (***DCL***)



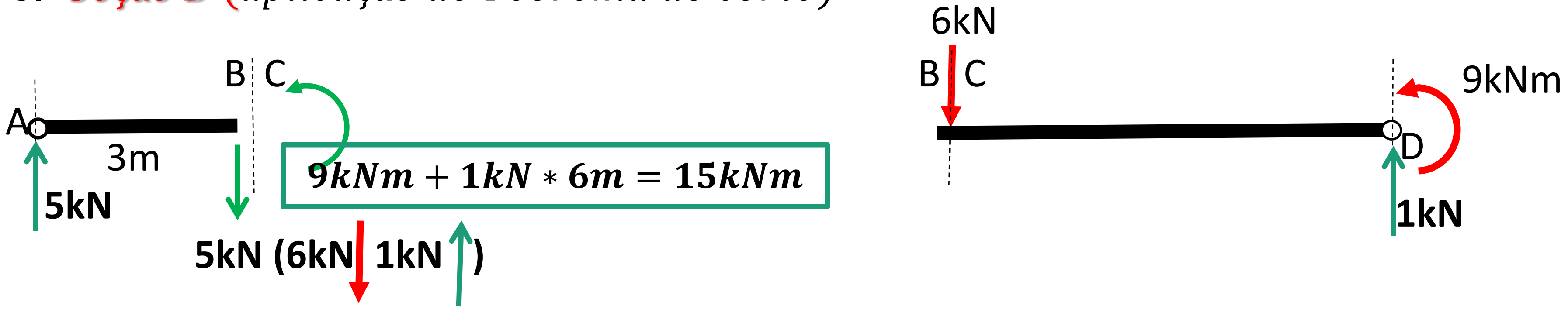
3. *Seção B* (*aplicação do Teorema do corte*)





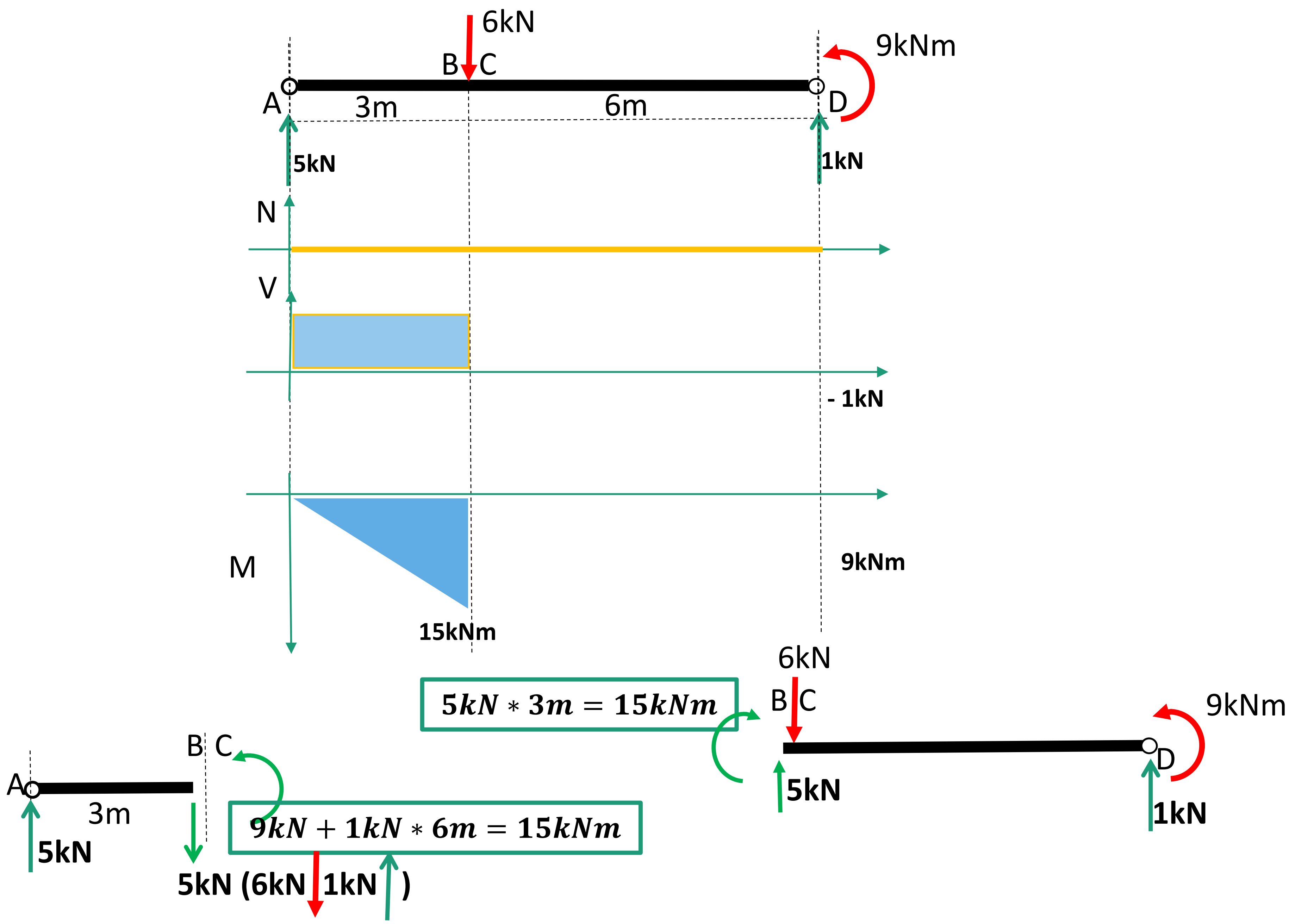
Pelo Teorema do corte, divide-se a estrutura apenas em duas partes na seção de interesse

3. *Seção B (aplicação do Teorema do corte)*

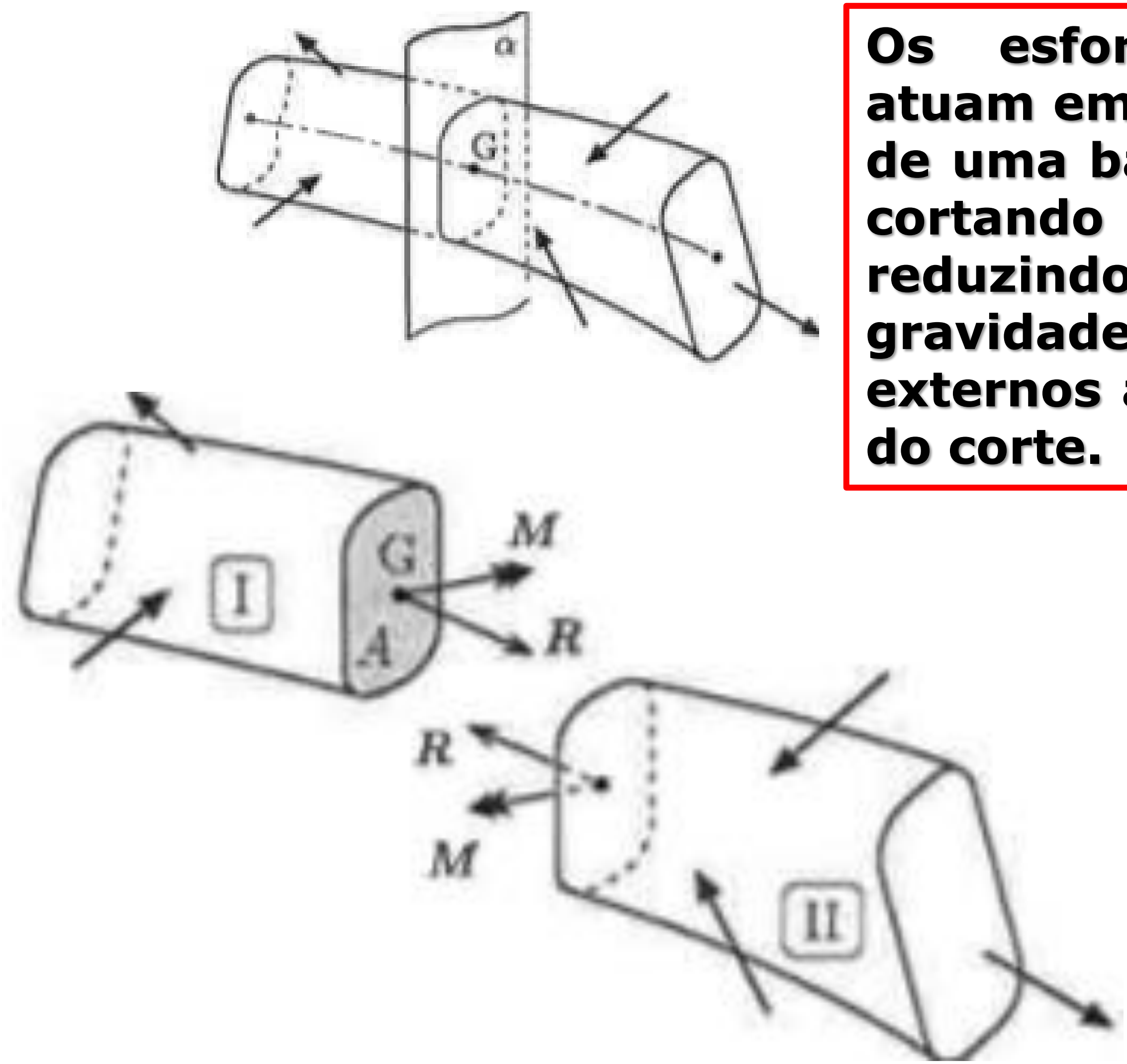


3. *Seção B (aplicação do Teorema do corte)*

4. *Diagramas dos esforços solicitantes*

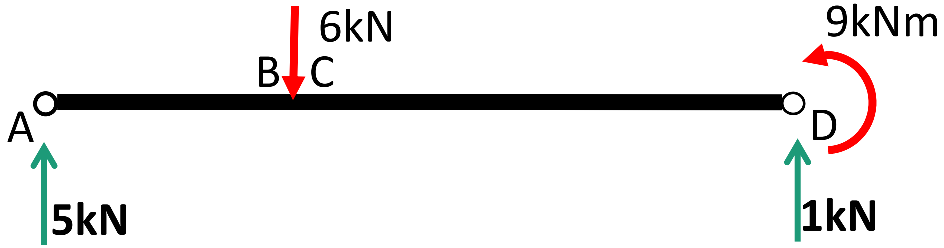


Teorema fundamental da Resistência dos materiais
Teorema do corte

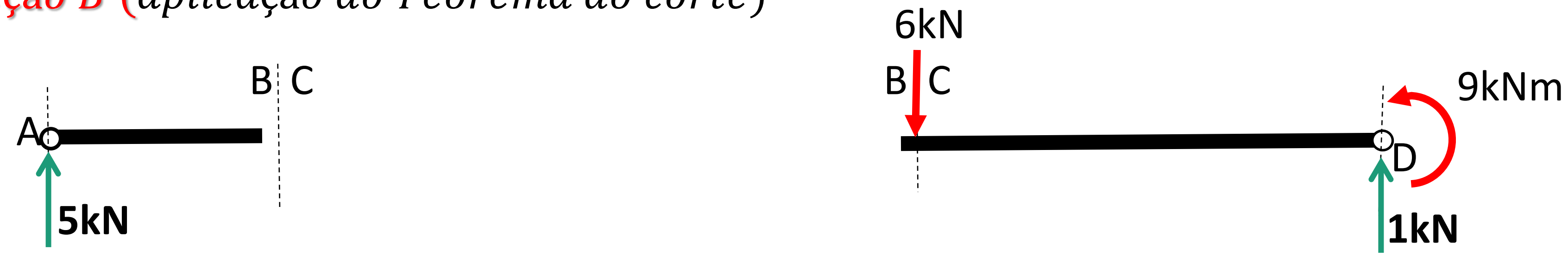


Os esforços solicitantes que atuam em uma seção transversal de uma barra podem ser obtidos cortando a barra nesta seção e reduzindo no seu centro de gravidade todos os esforços externos aplicados do outro lado do corte.

Fonte: Almeida Neto, E. S. Conceitos fundamentais de Resistência dos materiais, apostila Epusp, São Paulo, 2011

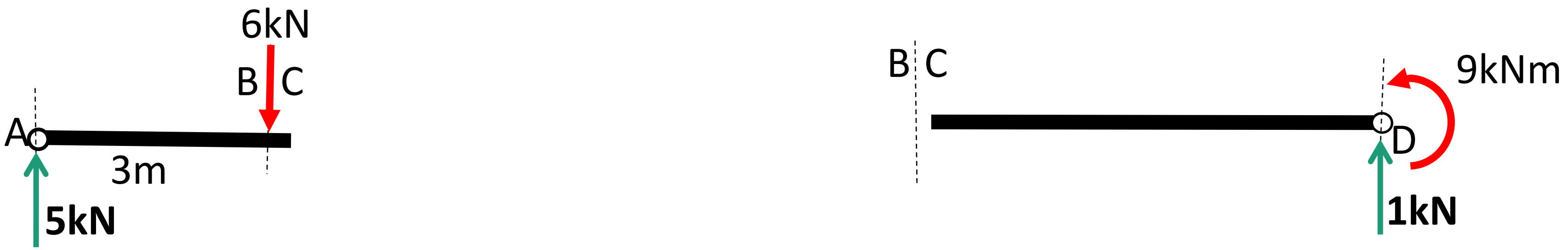


Seção B (*aplicação do Teorema do corte*)

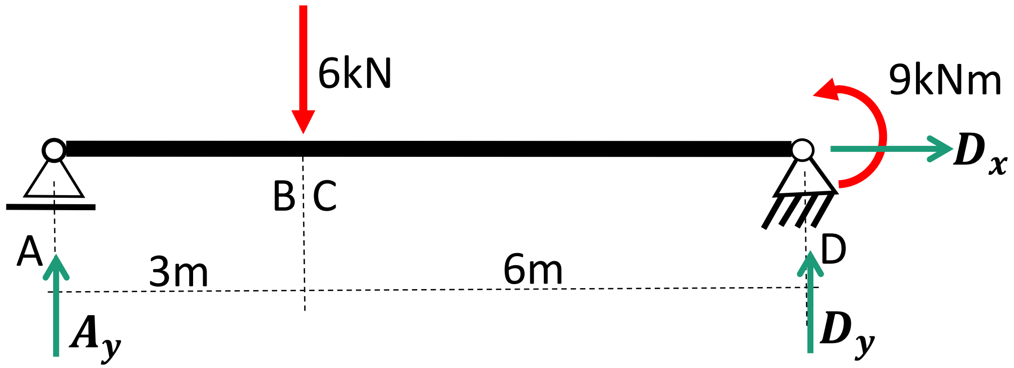


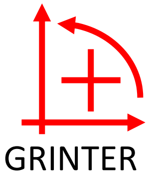
Pelo Teorema do corte, divide-se a estrutura apenas em duas partes na seção de interesse

Seção C (*aplicação do Teorema do corte*)



Os esforços solicitantes que atuam em uma seção transversal de uma barra podem ser obtidos cortando a barra nesta seção e reduzindo no seu centro de gravidade todos os esforços externos aplicados do outro lado do corte.





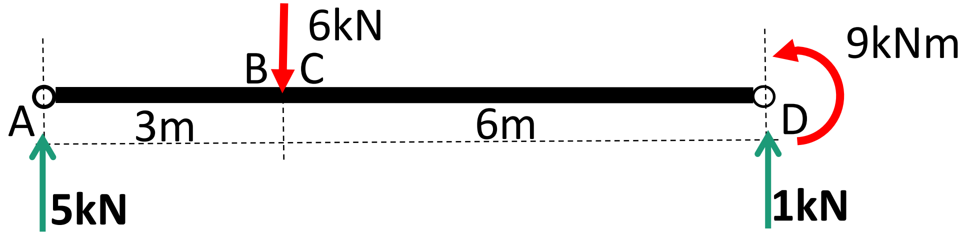
1. *Reações nos apoios*

$\sum X = 0 = D_x \Rightarrow \boldsymbol{D_x = 0}$

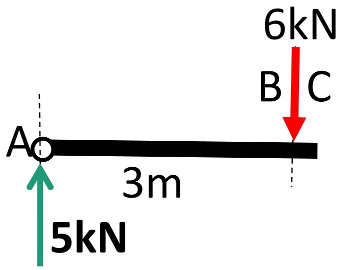
$\sum M(D) = 0 = -A_y * 9 + 6 * 6 + 9 \Rightarrow \boldsymbol{A_y = 5\ kN}$

$\sum Y = 0 = A_y - 6 + D_y \Rightarrow 5 - 6 + D_y = 0 \Rightarrow \boldsymbol{D_y = 1\ kN}$

2. *Diagrama do corpo livre* ***DCL***

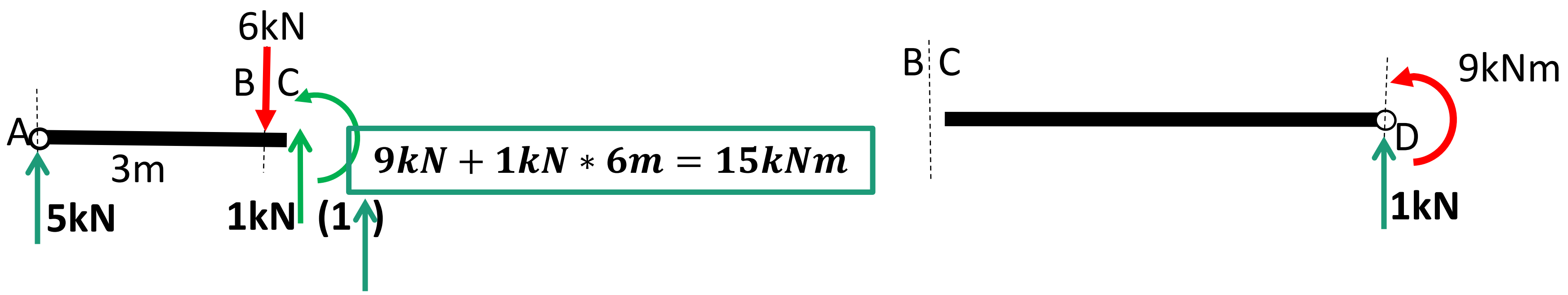


4. ***Seção C*** *(aplicação do Teorema do corte)*

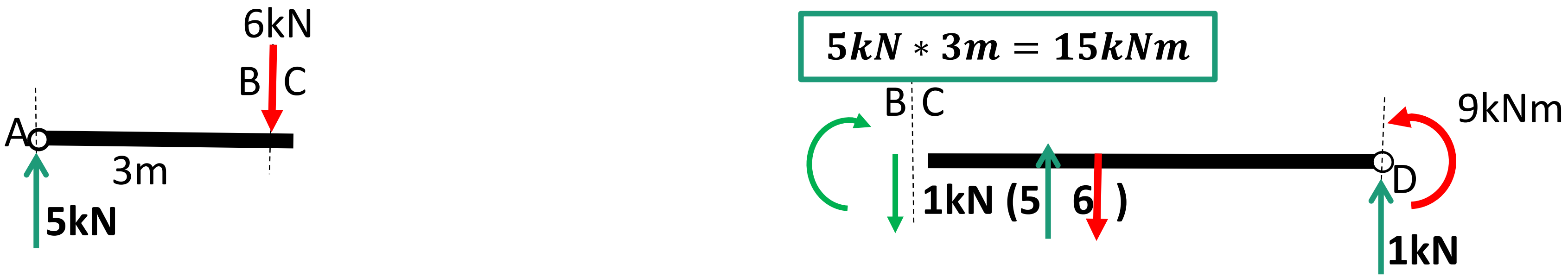


4. ***Seção C*** *(aplicação do Teorema do corte)*

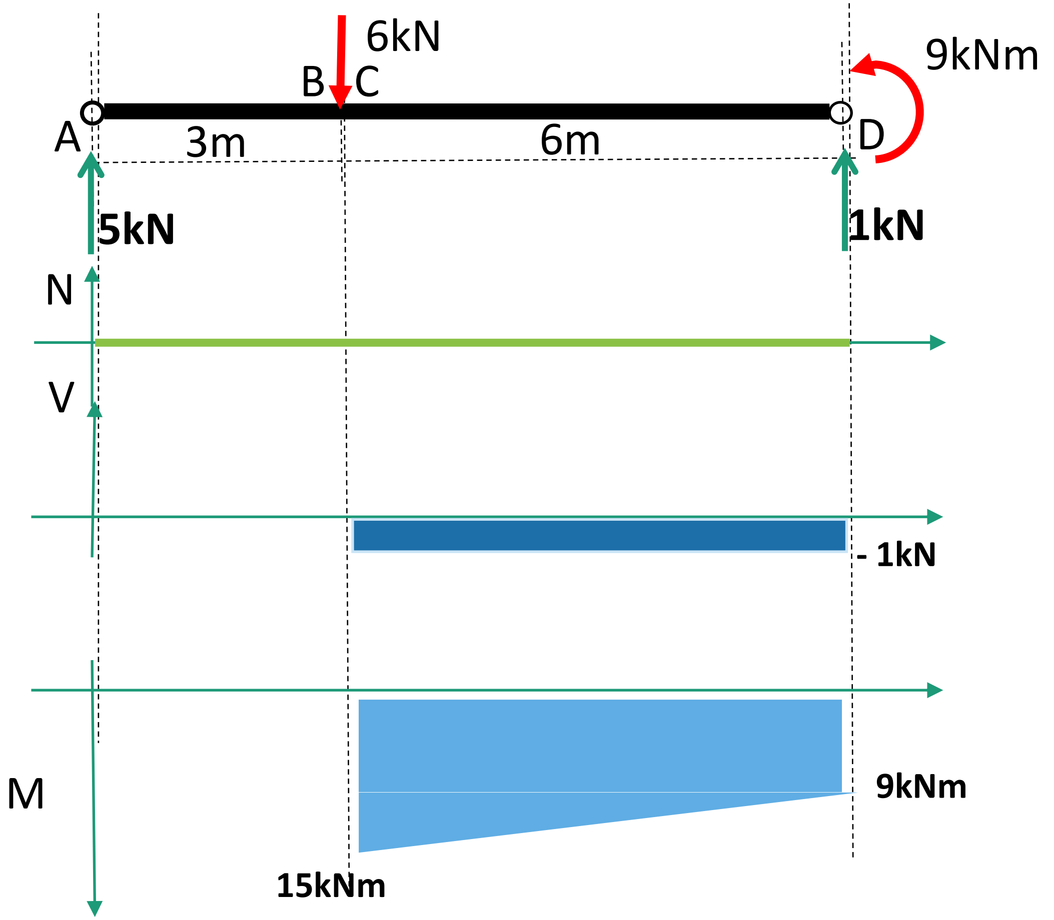
4. ***Seção C*** *(aplicação do Teorema do corte)*

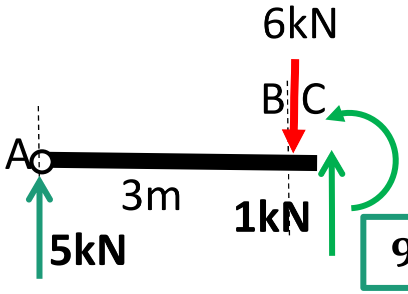


4. ***Seção C*** *(aplicação do Teorema do corte)*



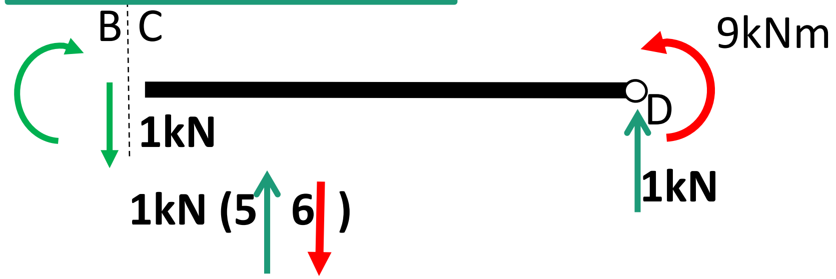
4. *Diagramas dos esforços solicitantes*



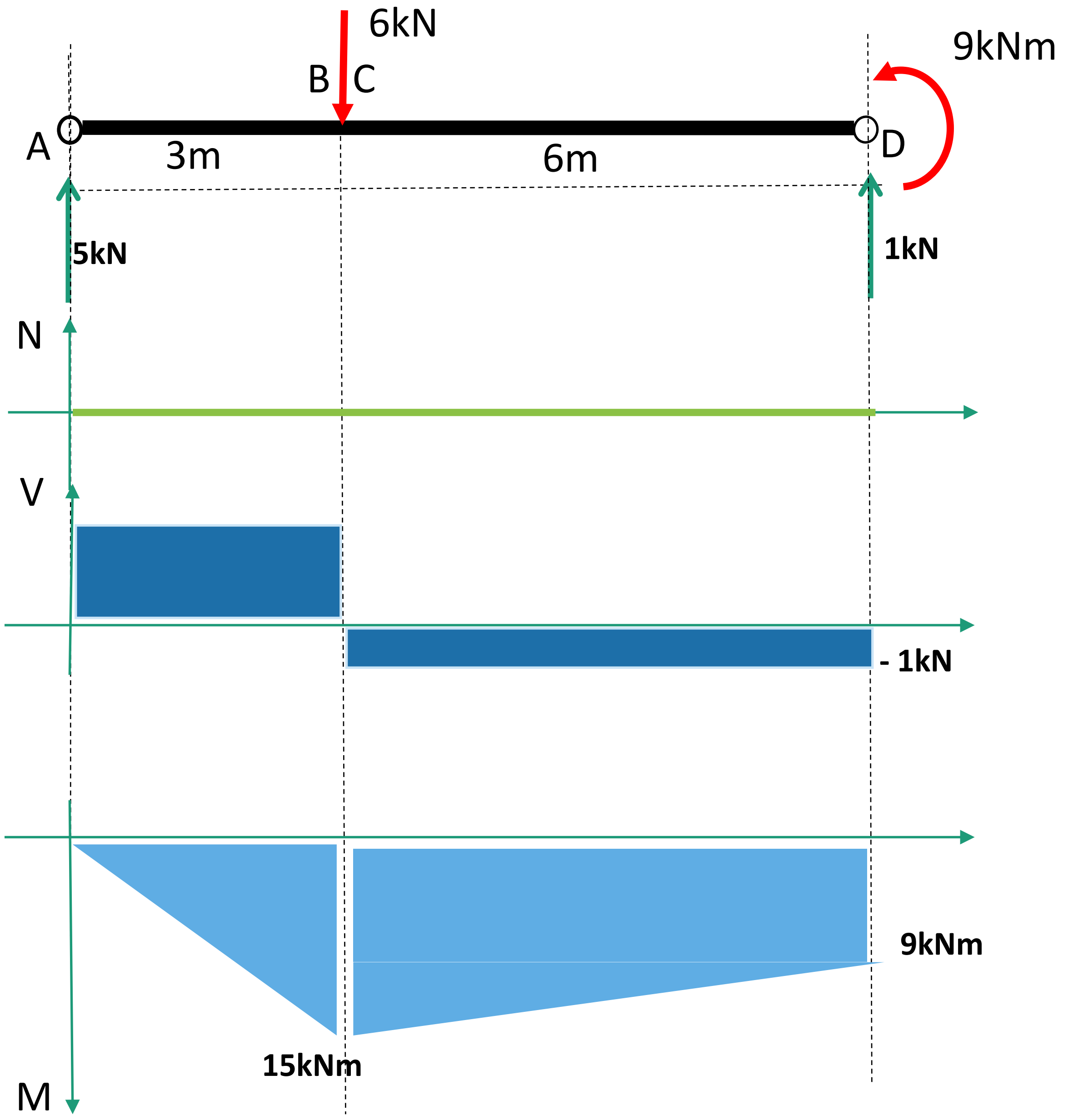


$$9kN + 1kN * 6m = 15kNm$$

$$5kN * 3m = 15kNm$$

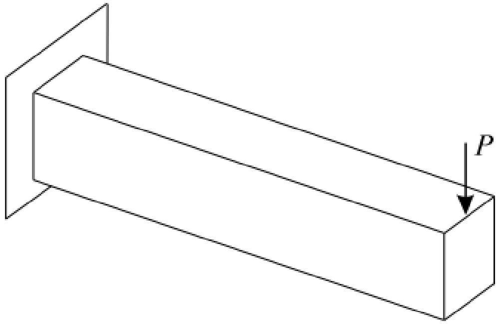


5. *Diagramas dos esforços solicitantes*

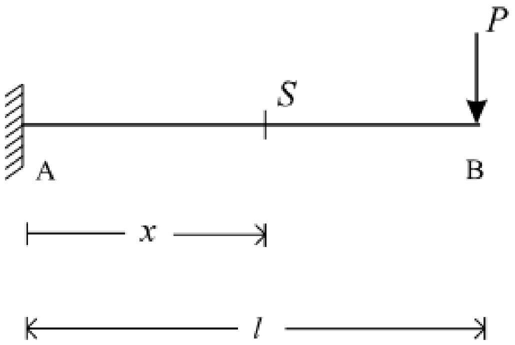


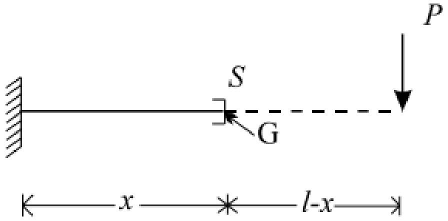
Exercício 6. (aula 3)

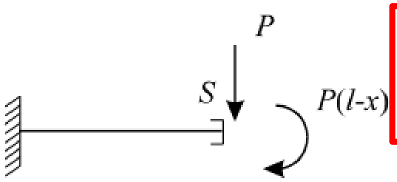
Esboce os diagramas dos esforços solicitantes da viga em balanço da figura



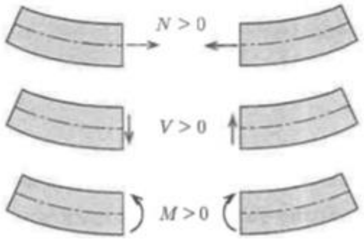
$$V_A = V(0) = P$$
$$V_B = V(l) = P$$
$$M_A = M(0) = -Pl$$
$$M_B = M(l) = 0$$

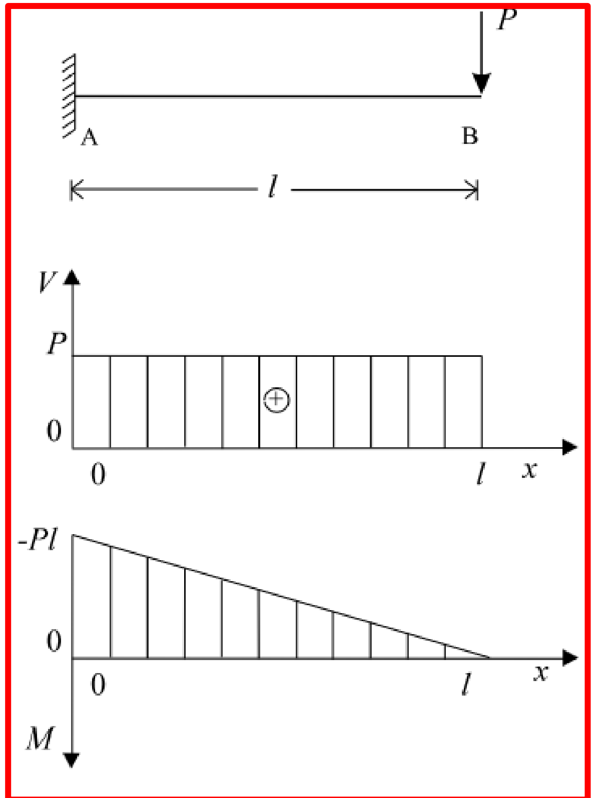






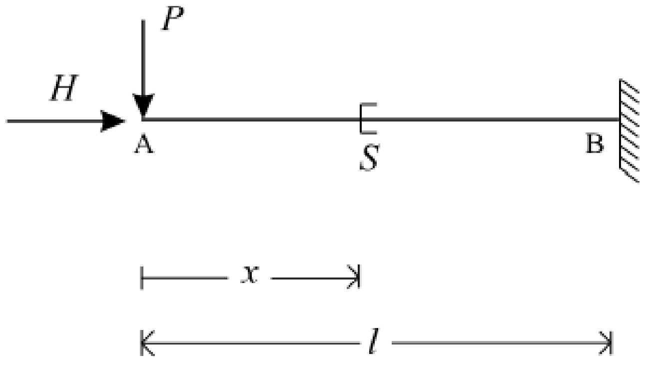
$$\boldsymbol{V(x) = P}$$
$$\boldsymbol{M(x) = -P(l - x)}$$



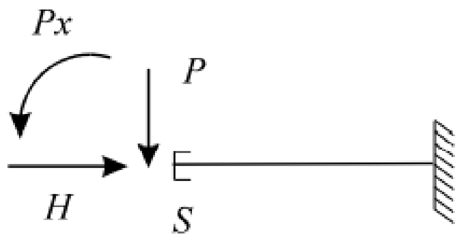


Exercício 7. (aula 3)

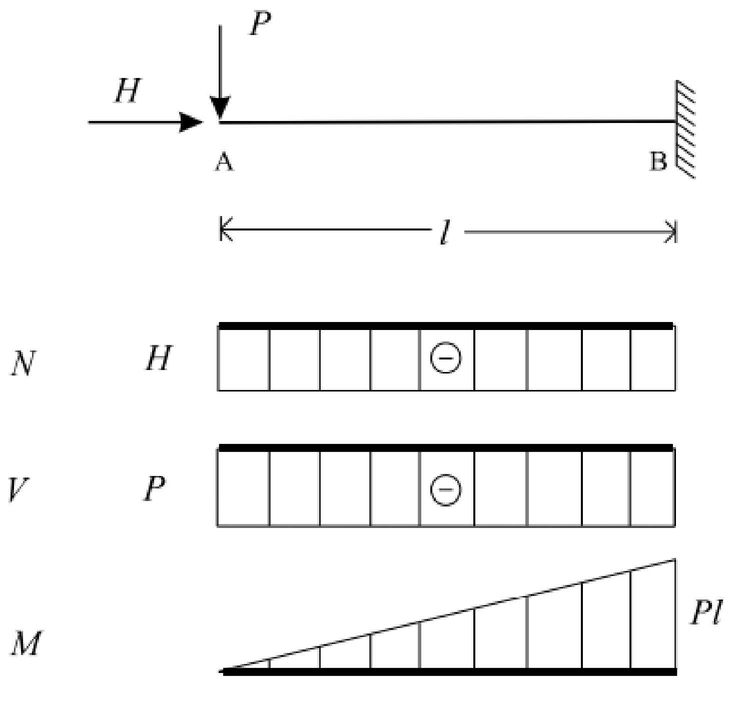
ESBOCE OS DIAGRAMAS DOS ESFORÇOS SOLICITANTES DA VIGA EM BALANÇO DA FIGURA

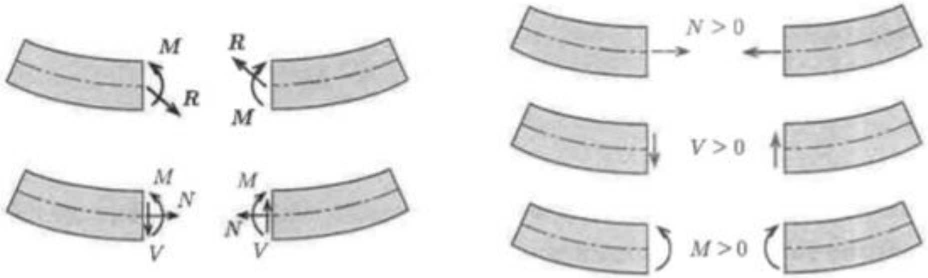


$$N(0) = -H$$
$$N(l) = -H$$
$$V(0) = -P$$
$$V(l) = -P$$
$$M(0) = 0$$
$$M(l) = -Pl$$



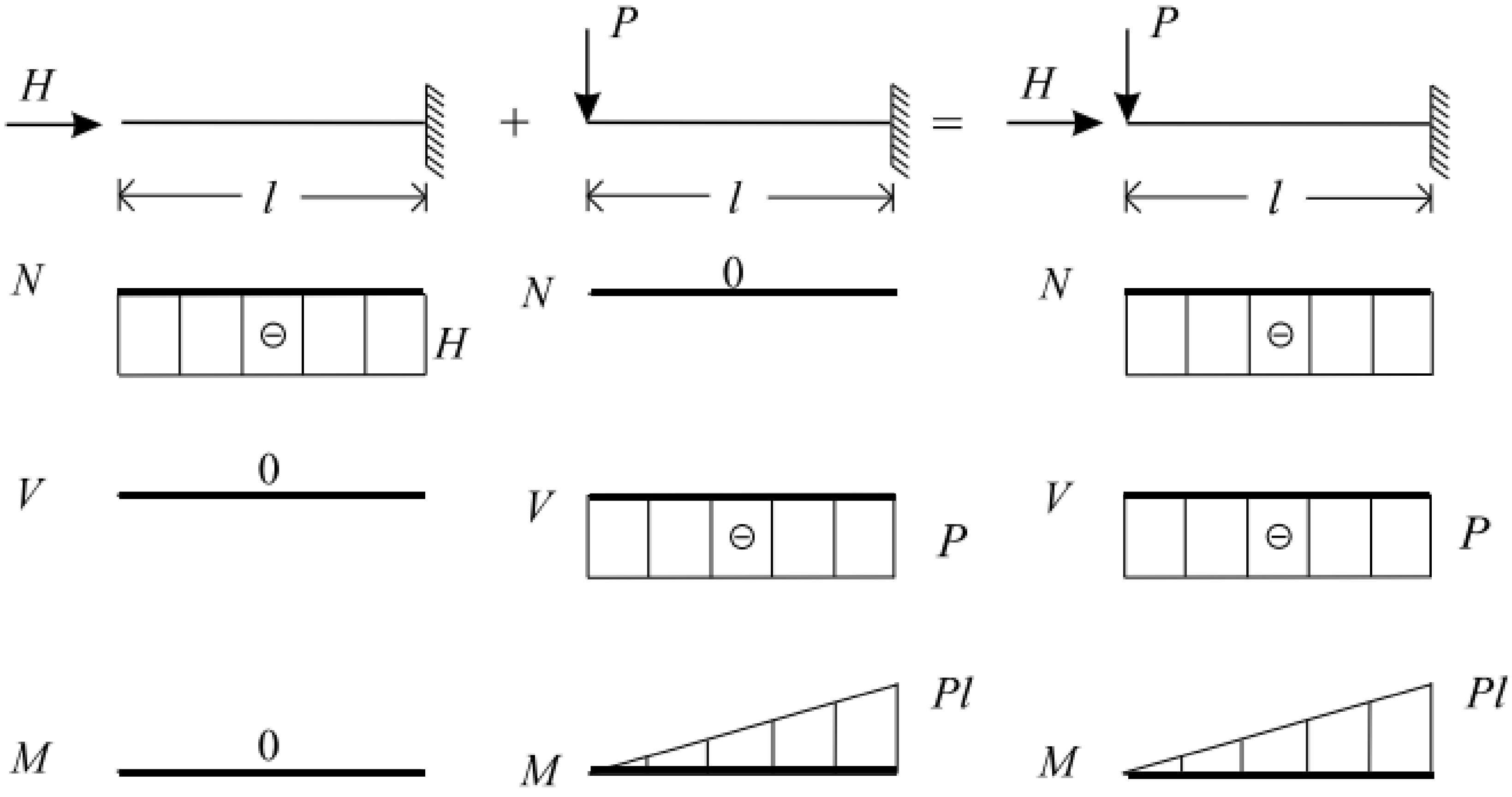
$$\boldsymbol{N(x) = -H}$$
$$\boldsymbol{V(x) = -P}$$
$$\boldsymbol{M(x) = -Px}$$





Fonte: Lindenberg Neto, H. Introdução à Mecânica das estruturas, apostila Epusp, São Paulo, 1997

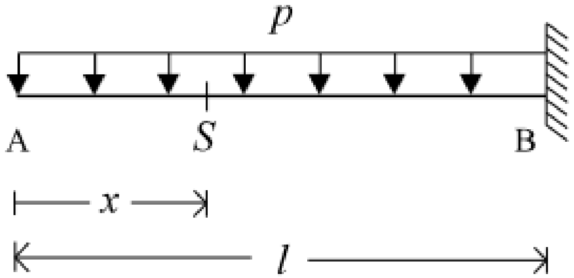
PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO DE EFEITOS

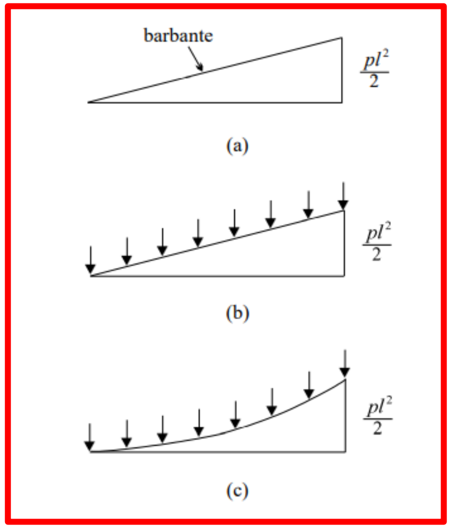


Fonte: Lindenberg Neto, H. Introdução à Mecânica das estruturas, apostila Epusp, São Paulo, 1997

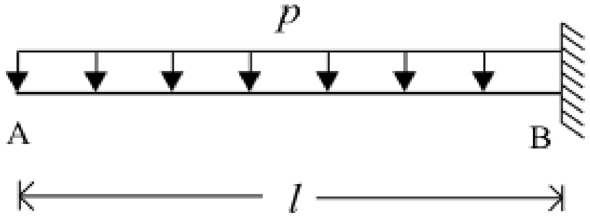
Exercício 8. (aula 3)

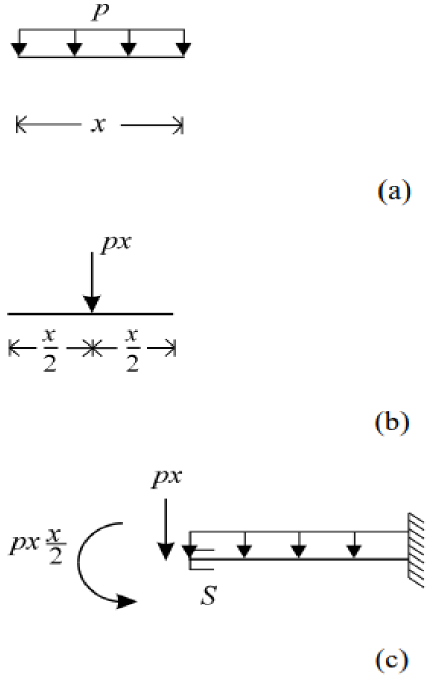
TRACE OS DIAGRAMAS DOS ESFORÇOS SOLICITANTES DA VIGA EM BALANÇO DA FIGURA





$$V(0) = 0$$
$$V(l) = -p.l$$
$$M(0) = 0$$
$$M(l) = -\frac{p.l^2}{2}$$

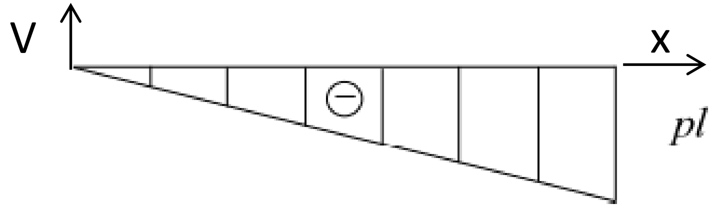


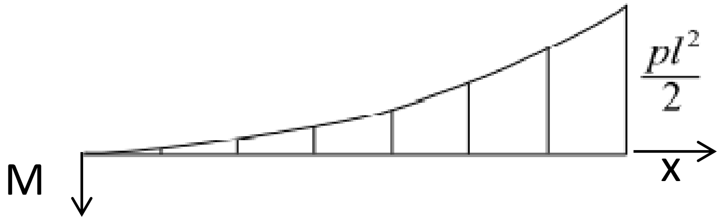


$$\frac{dV(x)}{dx} = -p(x)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x)$$

$$N(x) = 0$$
$$V(x) = -px$$
$$M(x) = \frac{-px^2}{2}$$





Fonte: Lindenberg Neto, H. Introdução à Mecânica das estruturas, apostila Epusp, São Paulo, 1997

Exercício 9. (aula 3)

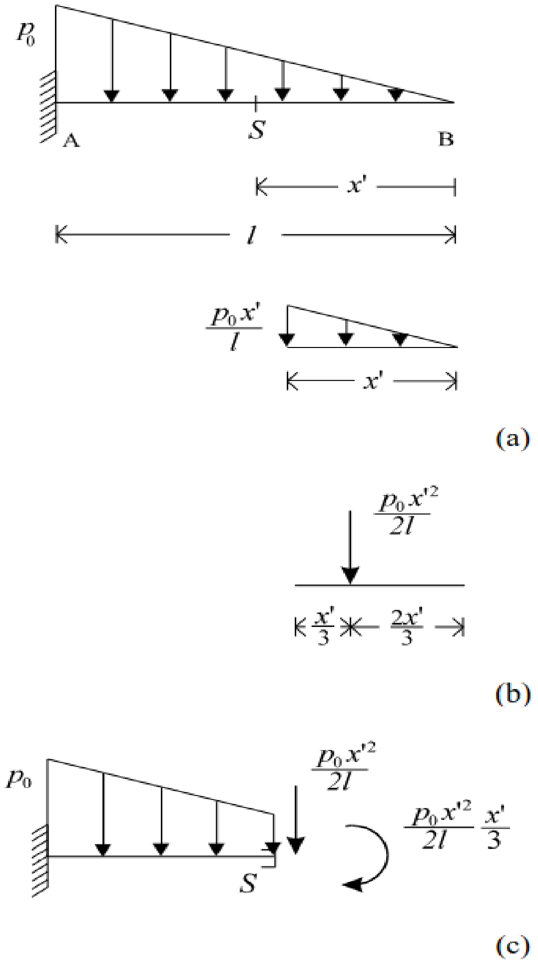
TRACE OS DIAGRAMAS DOS ESFORÇOS SOLICITANTES DA VIGA EM BALANÇO DA FIGURA

$$V(0) = 0$$

$$V(l) = \frac{p_0 l}{2}$$

$$M(0) = 0$$

$$M(l) = -\frac{p_0 . l^2}{6}$$

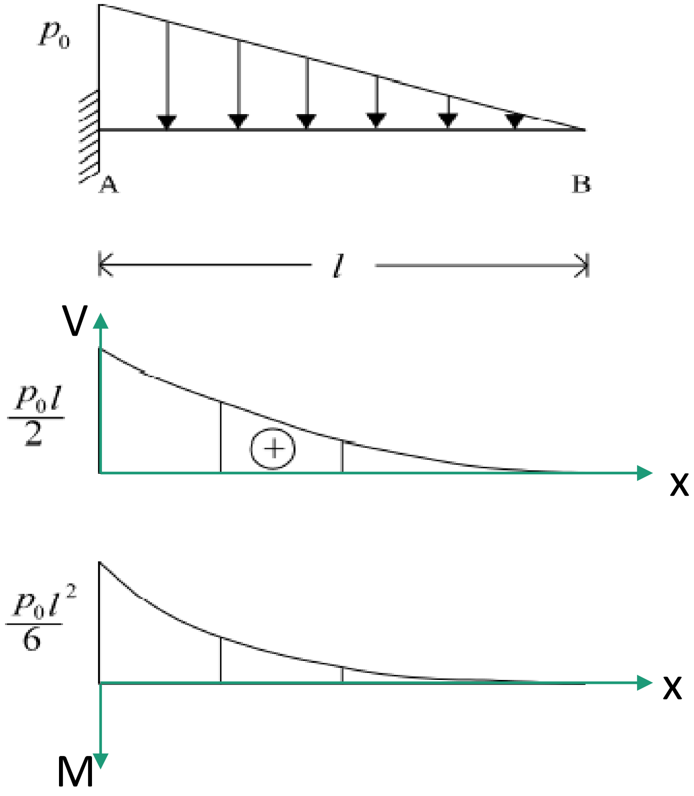


$$\frac{dV(x)}{dx} = -p(x)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x)$$

$$V(x') = \frac{p_0 (x')^2}{2l}$$

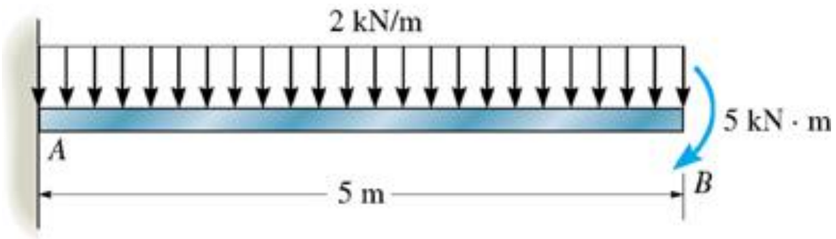
$$M(x') = \frac{-p_0 (x')^3}{6l}$$

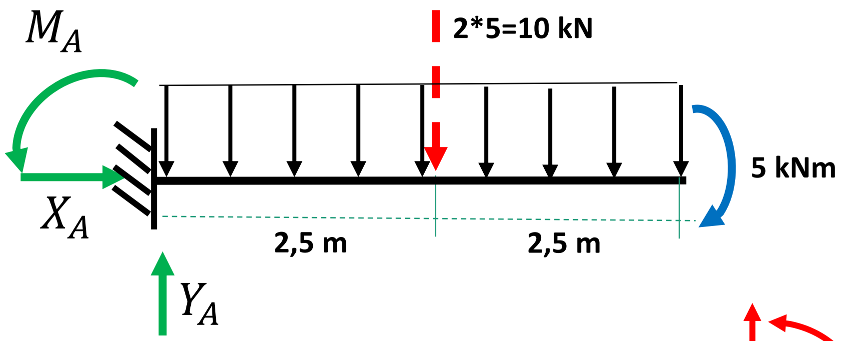


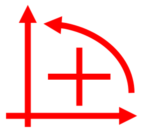
Fonte: Lindenberg Neto, H. Introdução à Mecânica das estruturas, apostila Epusp, São Paulo, 1997

Exercício 10. (aula 3)

Trace os diagramas dos esforços solicitantes da viga em balanço da figura







1. *Reações nos apoios*

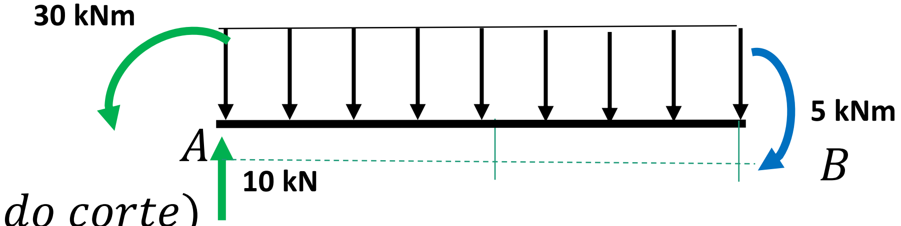
$\sum X = 0 = X_A \Longrightarrow \boldsymbol{X_A = 0}$

$\sum M_{(A)} = 0 = M_A - 10 * 2{,}5 - 5 \Longrightarrow \boldsymbol{M_A = 30\ kNm}$

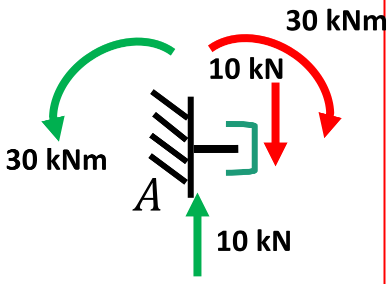
$\sum Y = 0 = Y_A - 10 \Longrightarrow \boldsymbol{Y_A = 10\ kN}$

No equilíbrio, convenção de GRINTER

2. *Diagrama do corpo livre* (***DCL***)



3. *Seção* A_+ *(aplicação do Teorema do corte)*



$V_A = +10\ kN$

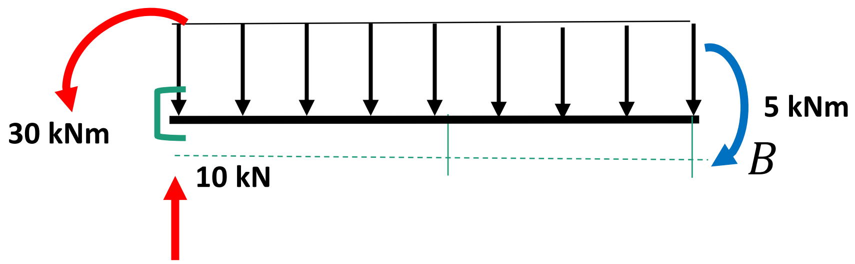
$V_B = 0\ kN$

$M_A = -30\ kN$

$M_B = -5\ kN$

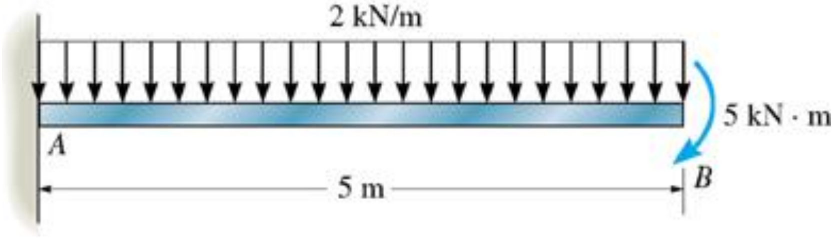
$N_A = 0\ kN$

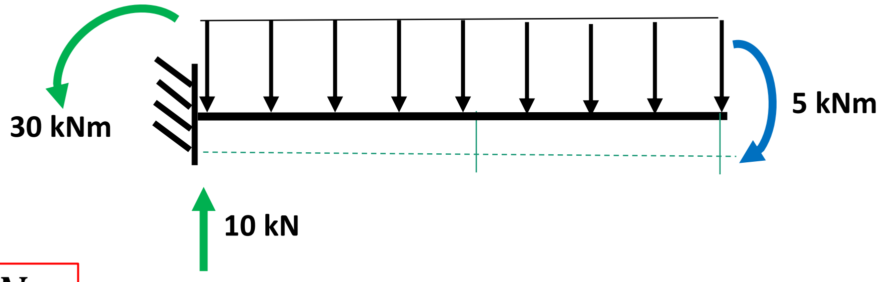
$N_B = 0\ kN$



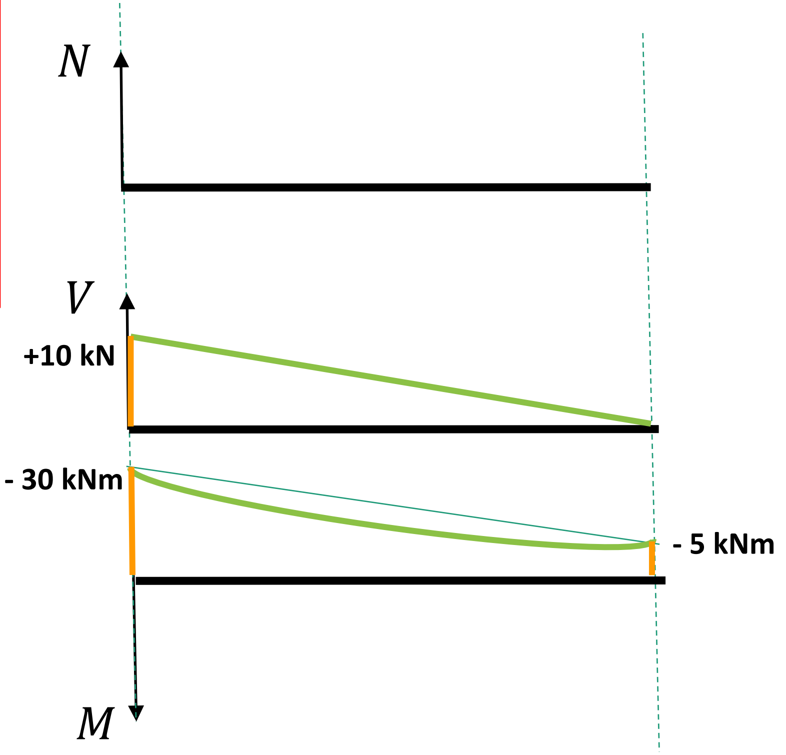
Exercício 10. (aula 3)

TRACE OS DIAGRAMAS DOS ESFORÇOS SOLICITANTES DA VIGA EM BALANÇO DA FIGURA



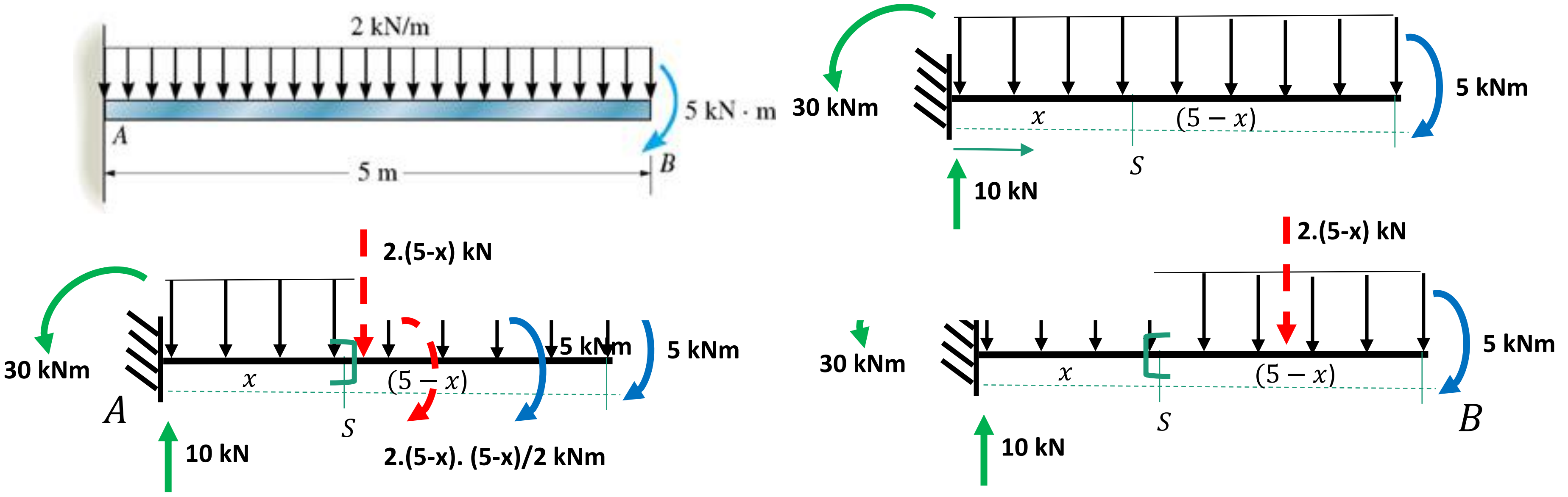


$V_A = +10\ kN$
$V_B = 0\ kN$
$M_A = -30\ kN$
$M_B = -5\ kN$
$N_A = 0\ kN$
$N_B = 0\ kN$



Exercício 11. (aula 3)

Trace os diagramas dos esforços solicitantes da viga em balanço da figura a partir das funções que os caracterizem



$$V(x) = 2 * (5 - x)\ kN$$

$$V(x) = (10 - 2x)\ kN$$

$$M(x) = \left[-2 * (5 - x) * \frac{(5 - x)}{2} - 5\right] kNm$$

$$M(x) = (-x^2 + 10x - 30)\ \ kNm$$

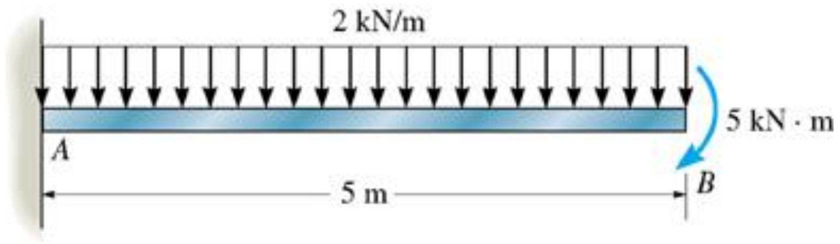
$$\frac{dV(x)}{dx} = -p(x)$$

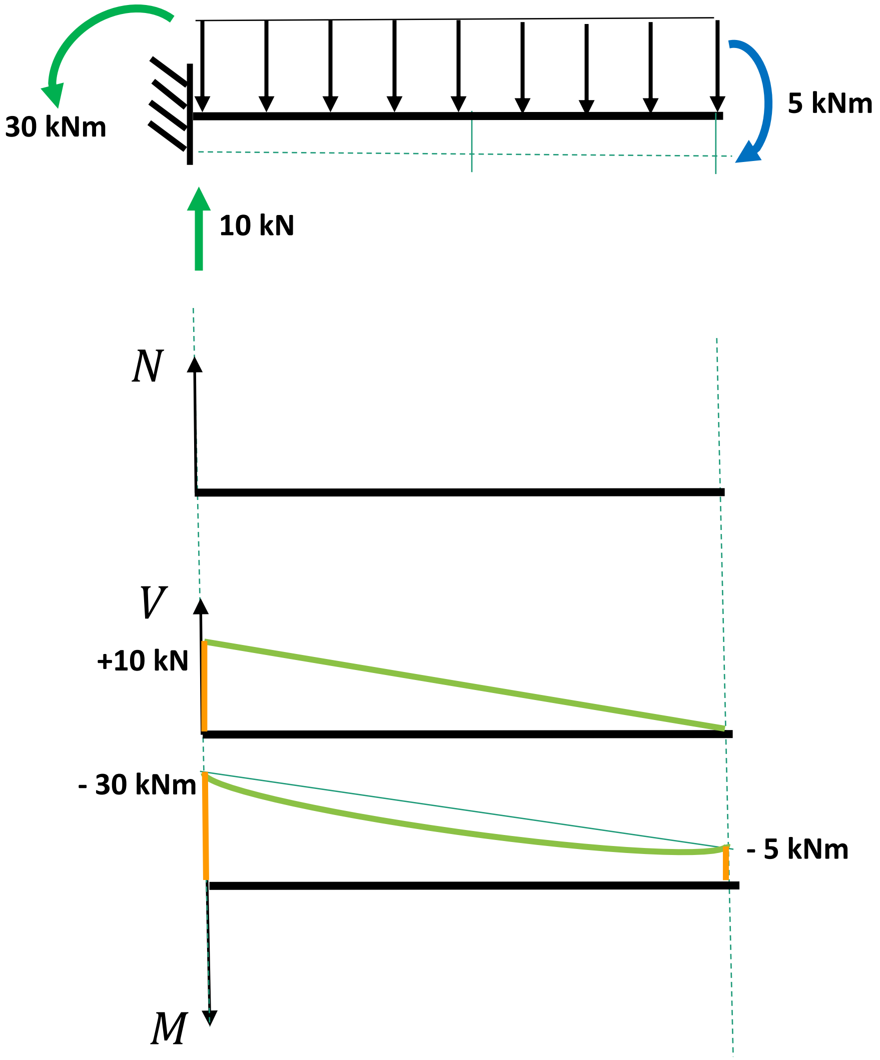
$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x)$$

$$V_A = V(0) = +10\ kN$$
$$V_B = V(5) = 0\ kN$$
$$M_A = M(0) = -30\ kN$$
$$M_B = M(5) = -5\ kN$$
$$N_A = 0\ kN$$
$$N_B = 0\ kN$$

Exercício 11. (aula 3)

Trace os diagramas dos esforços solicitantes da viga em balanço da figura





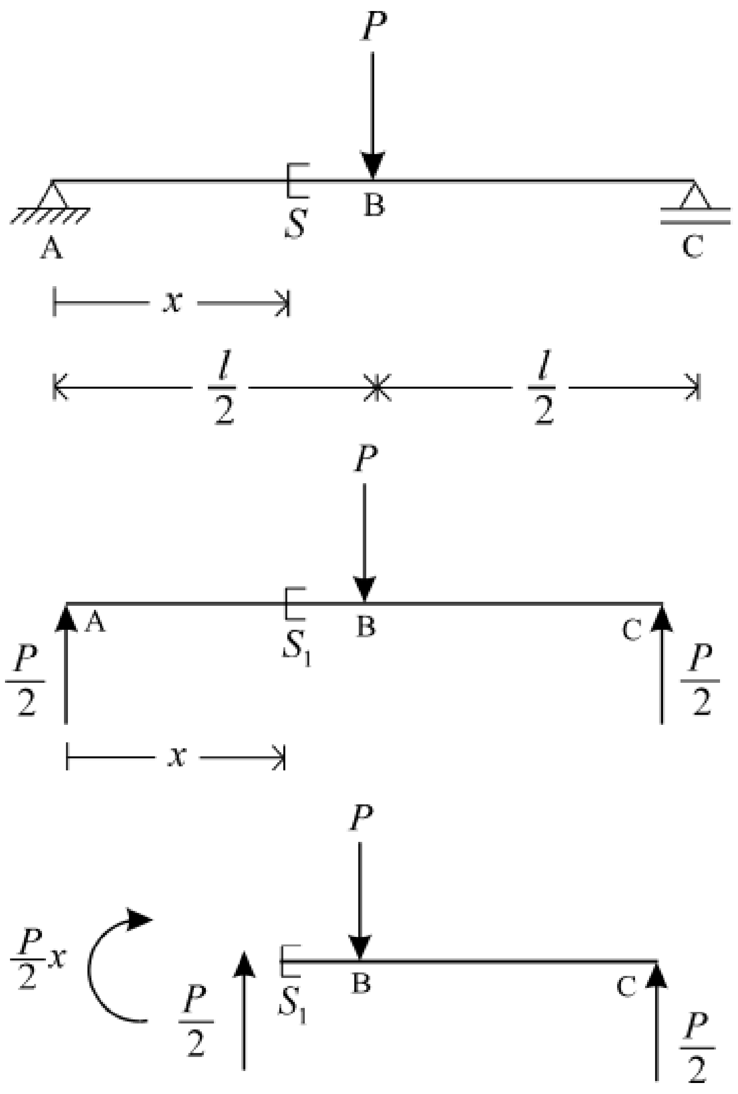
$$V_A = V(0) = +10\ kN$$
$$V_B = V(5) = 0\ kN$$
$$M_A = M(0) = -30\ kN$$
$$M_B = M(5) = -5\ kN$$
$$N_A = 0\ kN$$
$$N_B = 0\ kN$$

$$V(x) = (10 - 2x)\ kN$$

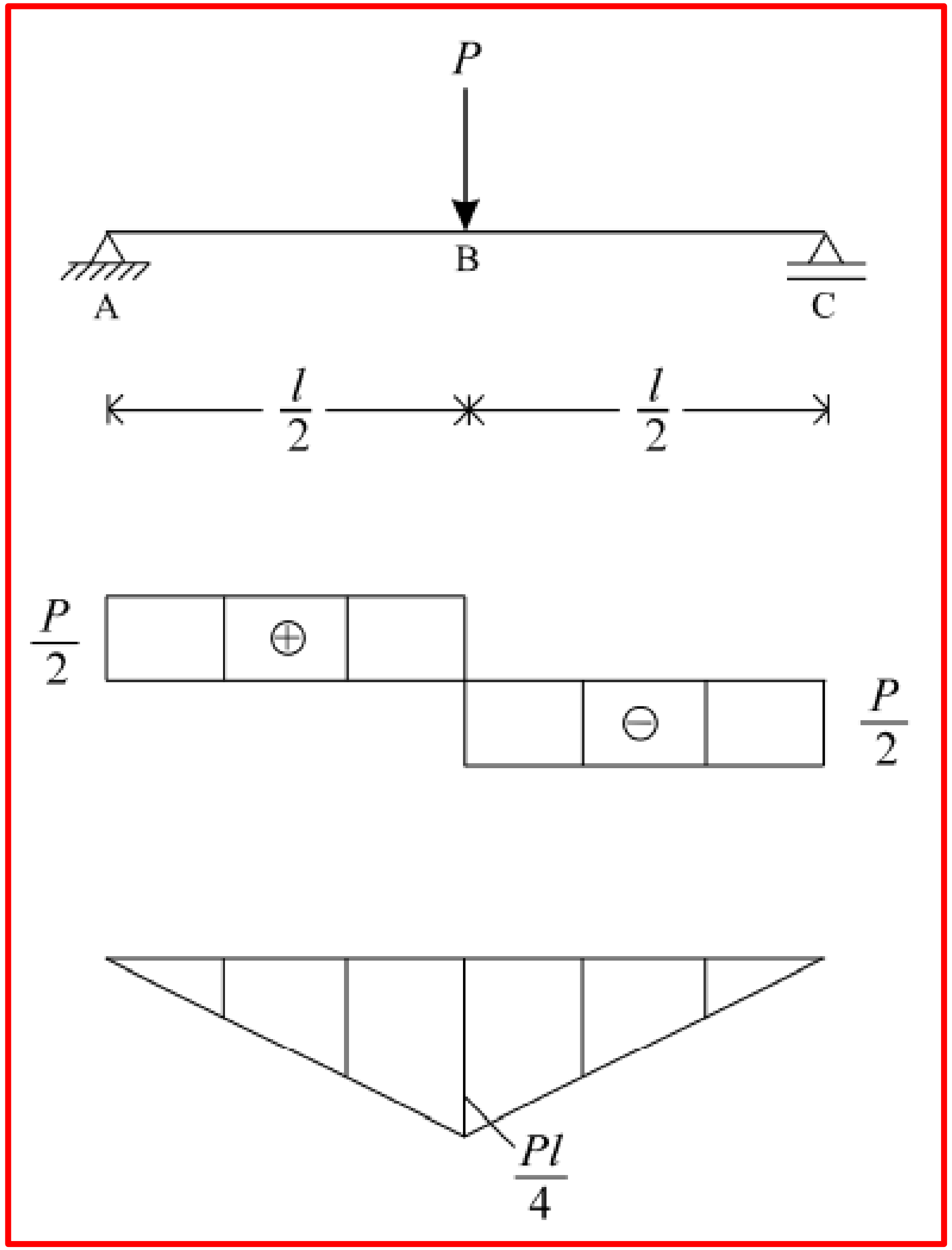
$$M(x) = (-x^2 + 10x - 30)\ \ kNm$$

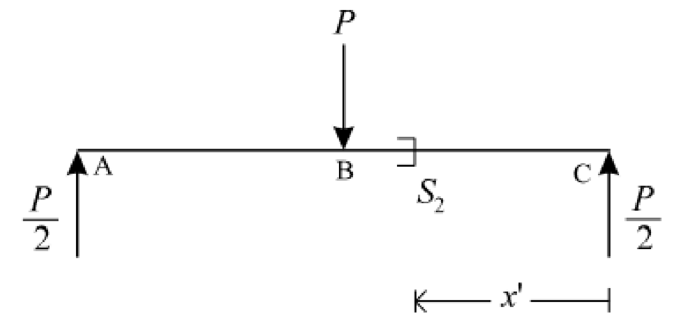
Exercício 12. (aula 3)

Trace os diagramas dos esforços solicitantes

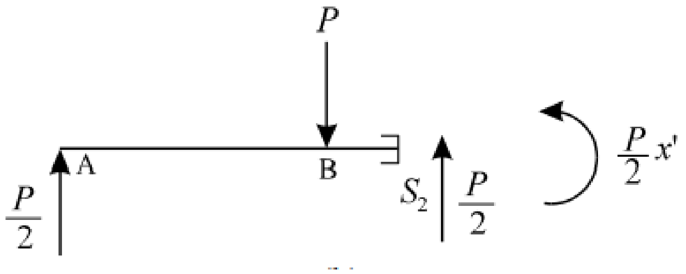


$$V_{S1}(x) = \frac{P}{2}; M_{S1}(x) = \frac{P}{2}x$$





(a)

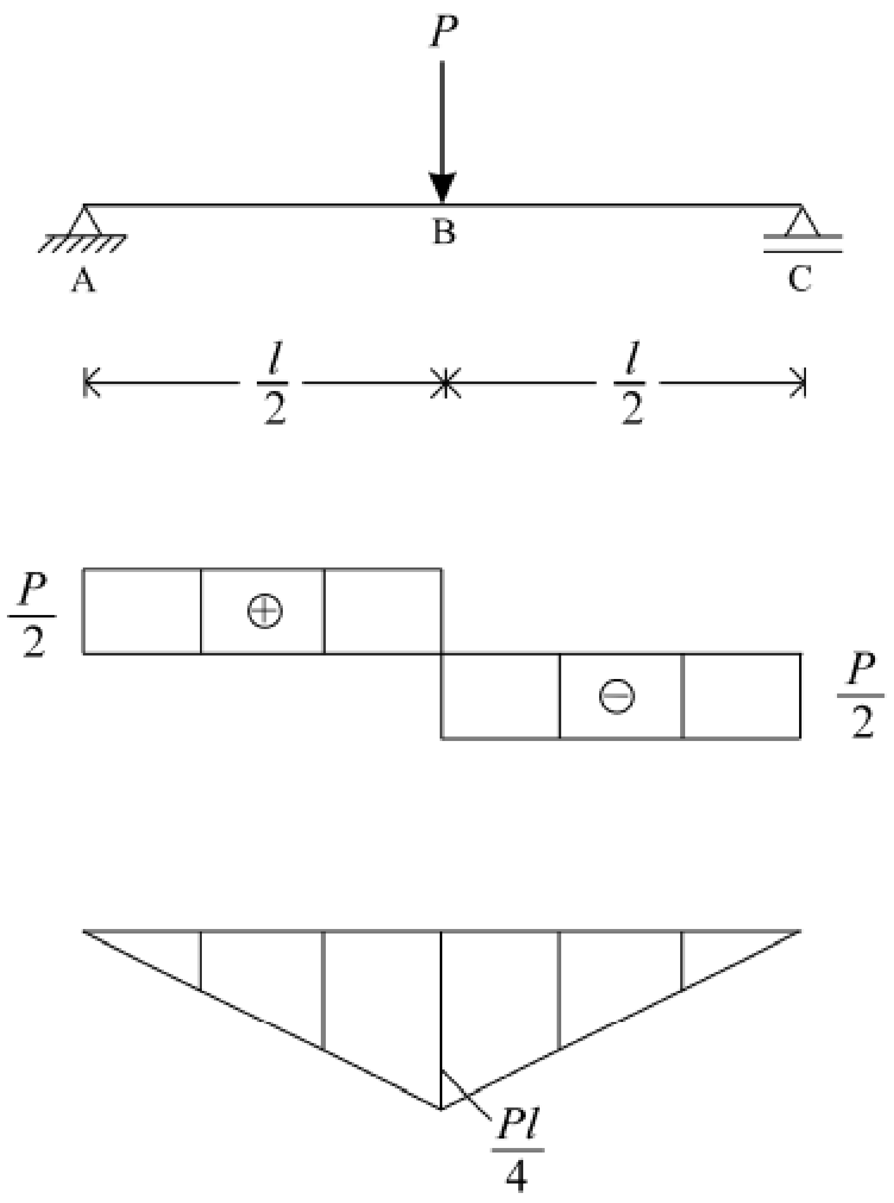


$$V_{S2}(x') = -\frac{P}{2}$$

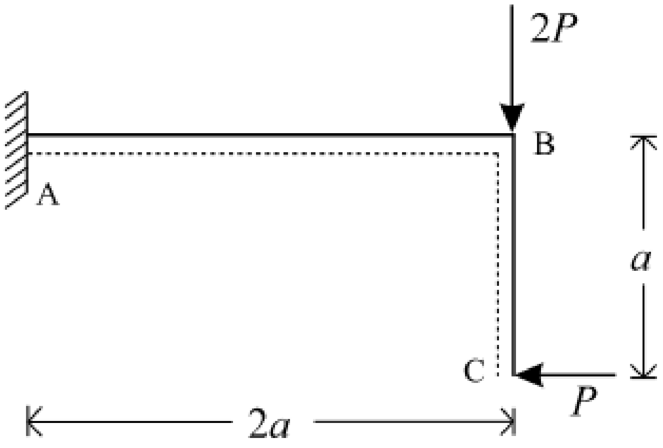
$$M_{S2}(x') = \frac{P}{2}x'$$

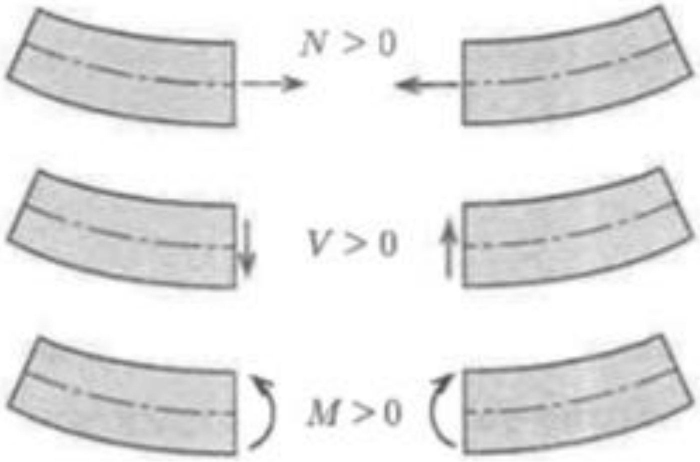
$$V_C = -\frac{P}{2};\ V_B = -\frac{P}{2}$$

$$M_C = \frac{P}{2}.0 = 0;\ M_B = \frac{P}{2}.\frac{l}{2} = \frac{Pl}{4}$$



Traçar o diagrama dos esforços solicitantes na estrutura da figura

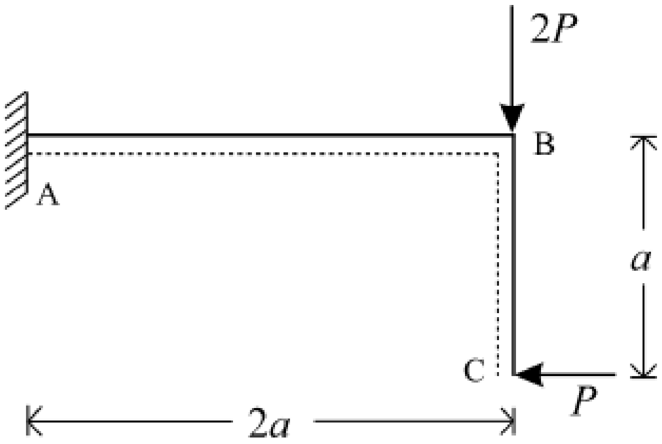


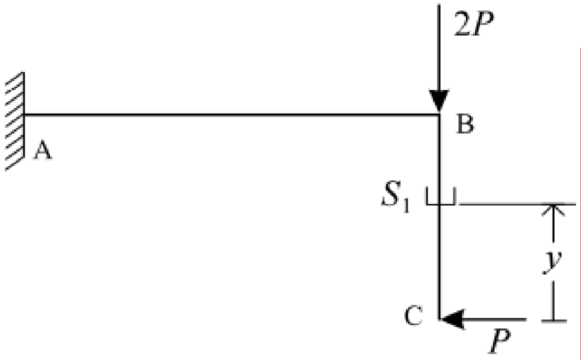


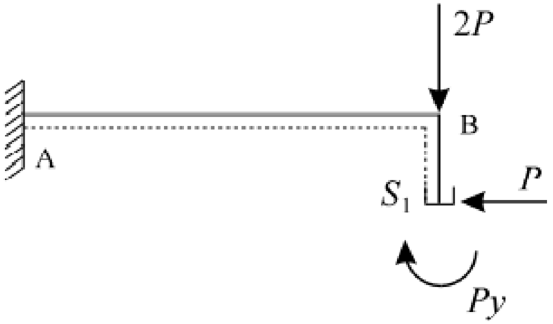
Pelo Teorema do corte, divide-se a estrutura apenas em duas partes na seção de interesse.

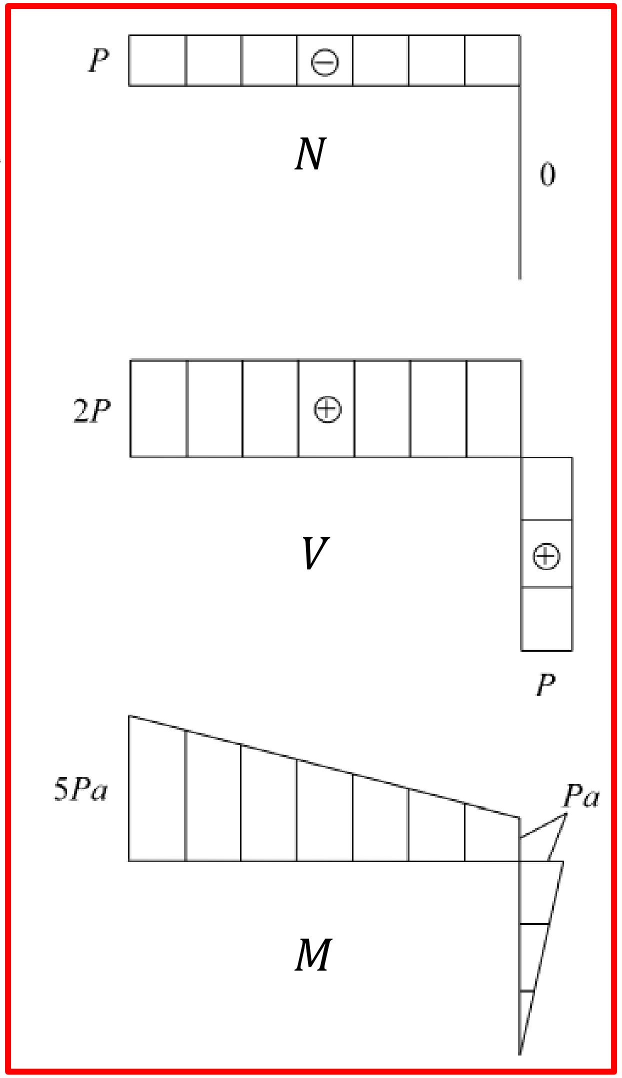
Os esforços solicitantes que atuam em uma seção transversal de uma barra podem ser obtidos cortando a barra nesta seção e reduzindo/transferindo para o seu centro de gravidade todos os esforços externos aplicados do outro lado do corte.

Traçar o diagrama dos esforços solicitantes na estrutura da figura







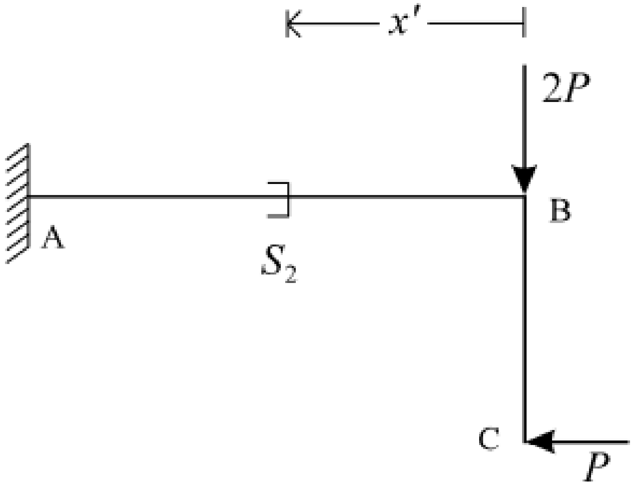


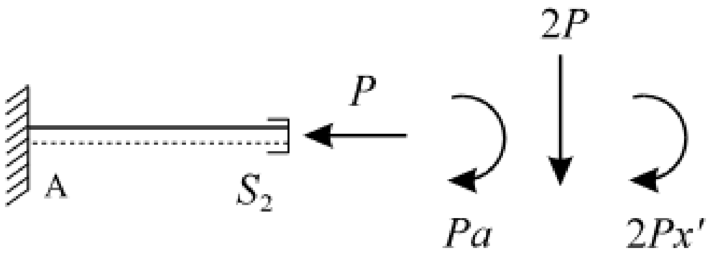
$Em\ S_1$:

$N(y) = 0$

$V(y) = P$

$M(y) = Py$



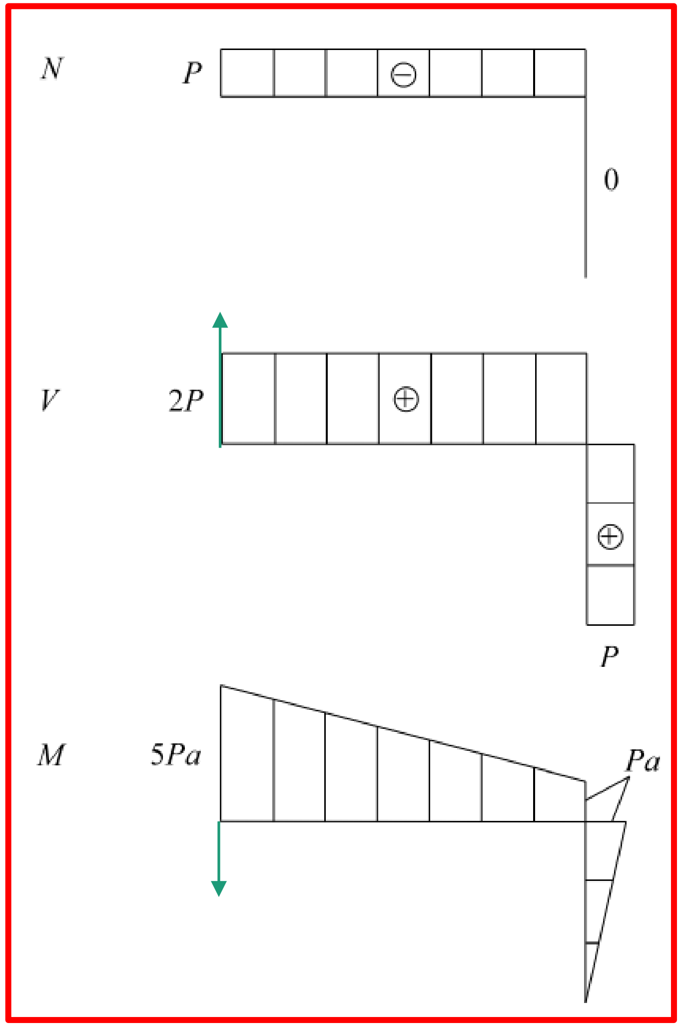


$Em\ S_2$:

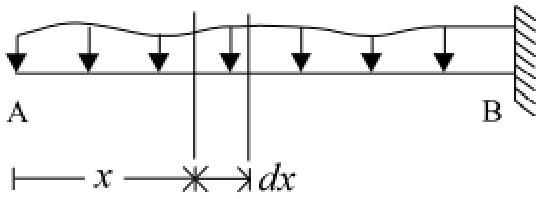
$N(x') = -P$

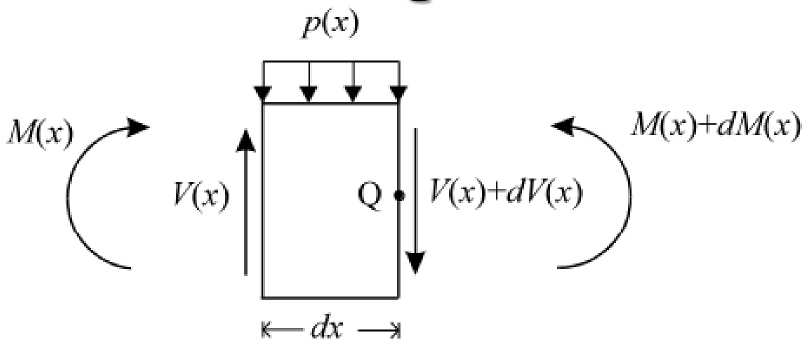
$V(x') = +2P$

$M(x') = -2Px' - Pa$



EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE EQUILÍBRIO





1. $\sum Y = 0 = V(x) - p(x) * dx - (V(x) + dV(x)) \Longrightarrow \boldsymbol{\frac{dV(x)}{dx} = -p(x)}$
2. $M(S_Q) = 0 = -M(x) - V(x) * dx + p(x) * dx * \frac{dx}{2} + \big(M(x) + dM(x)\big)$

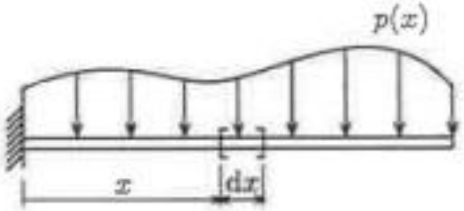
$$\Longrightarrow \boldsymbol{\frac{dM(x)}{dx} = V(x)}$$

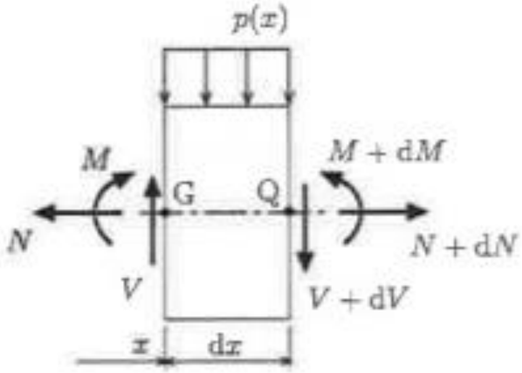
$$\boldsymbol{\frac{dV(x)}{dx} = -p(x)}$$

$$\boldsymbol{\frac{dM(x)}{dx} = V(x)}$$

$\boldsymbol{V}$ – ***força cortante***
$\boldsymbol{M}$ – ***momento fletor***
$\boldsymbol{p}$ – ***força distribuída***
$\boldsymbol{x}$ – ***origem em A***

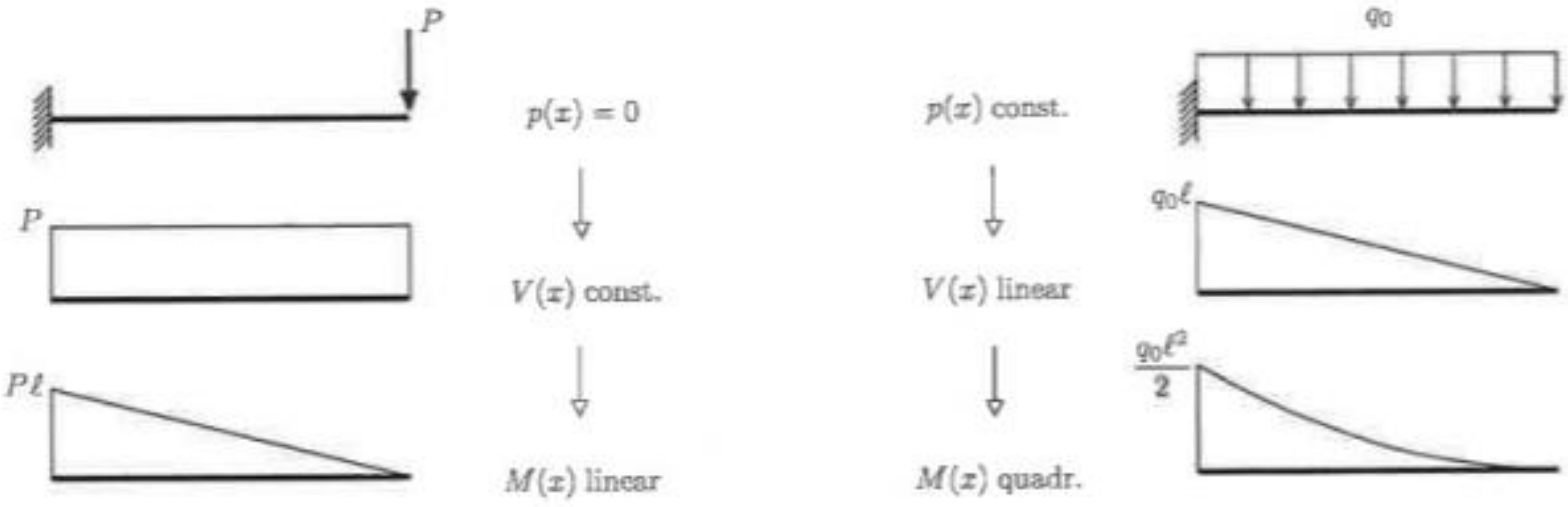
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE EQUILÍBRIO

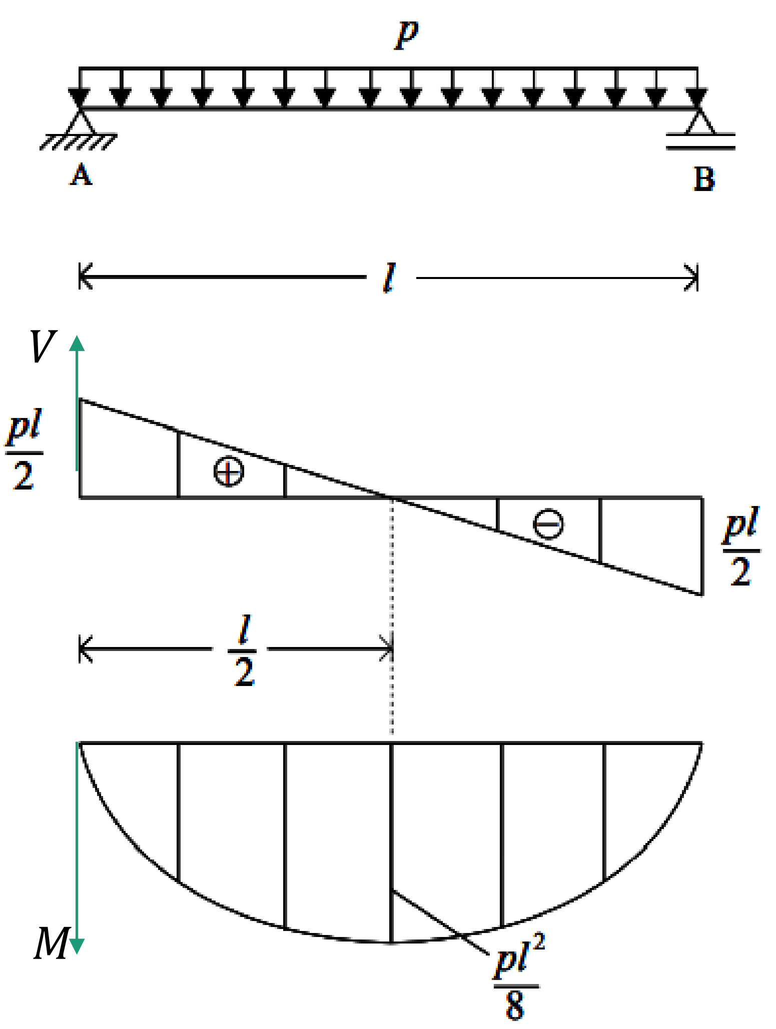


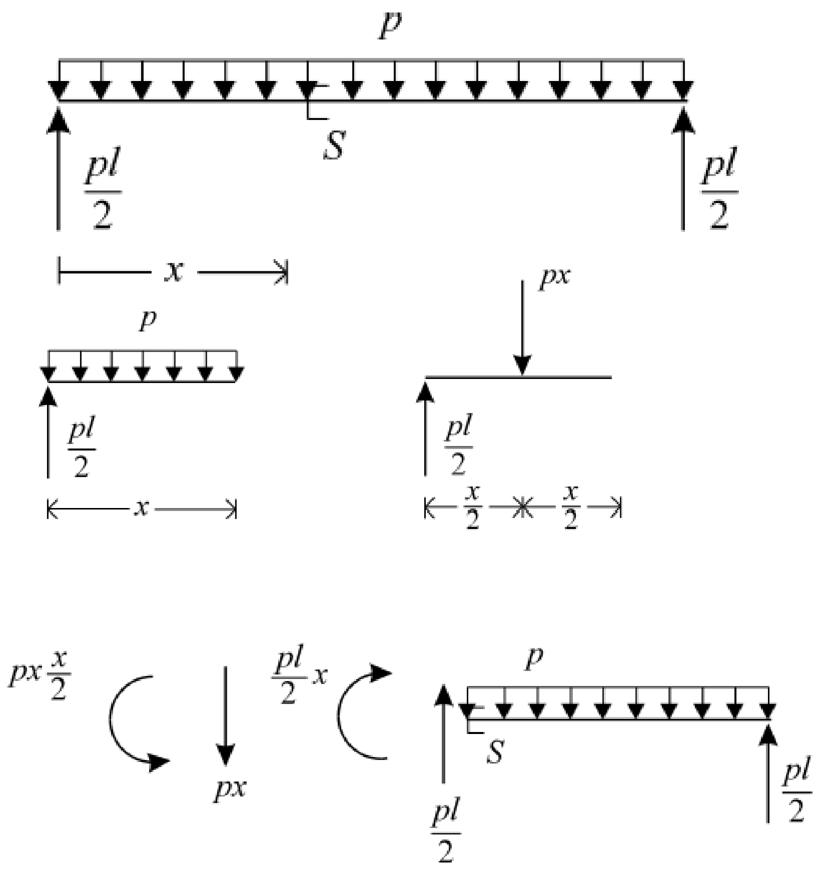


$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dV}{dx} = -p(x),$$

$p -$ *força distribuída*
$V -$ *força cortante*
$M -$ *momento fletor*
$x -$ *origem em A*





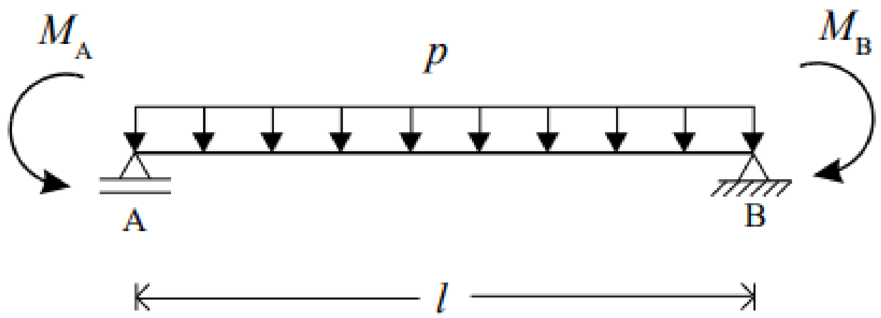


$$M_{máx}\left(x = \frac{l}{2}\right) = \frac{pl^2}{8}$$

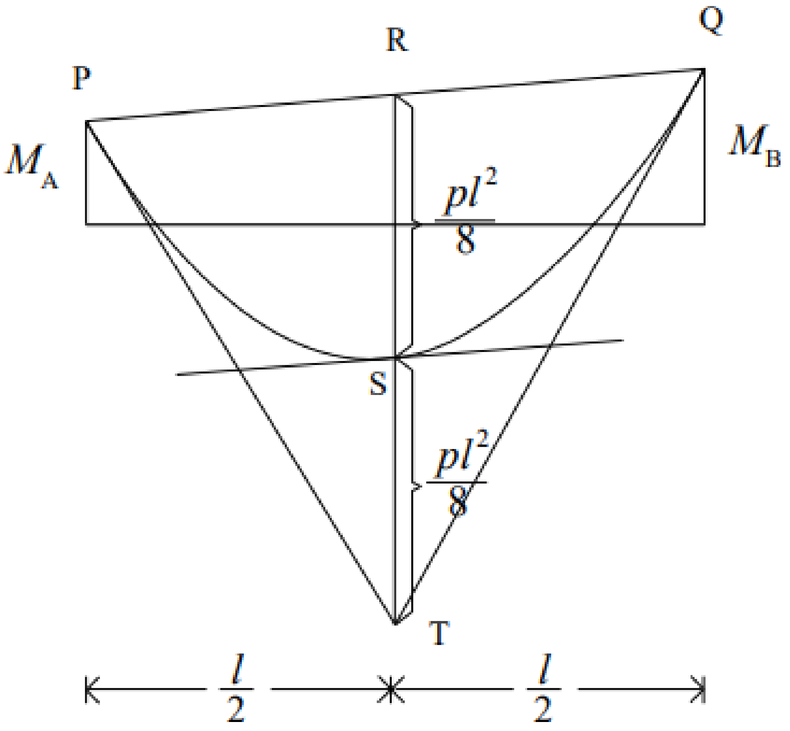
$$V_S(x) = -px + \frac{pl}{2}$$

$$M_S(x) = -p\frac{x^2}{2} + \frac{pl}{2}x$$

Fonte: Lindenberg Neto, H. Introdução à Mecânica das estruturas, apostila Epusp, São Paulo, 1997



PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO DE EFEITOS

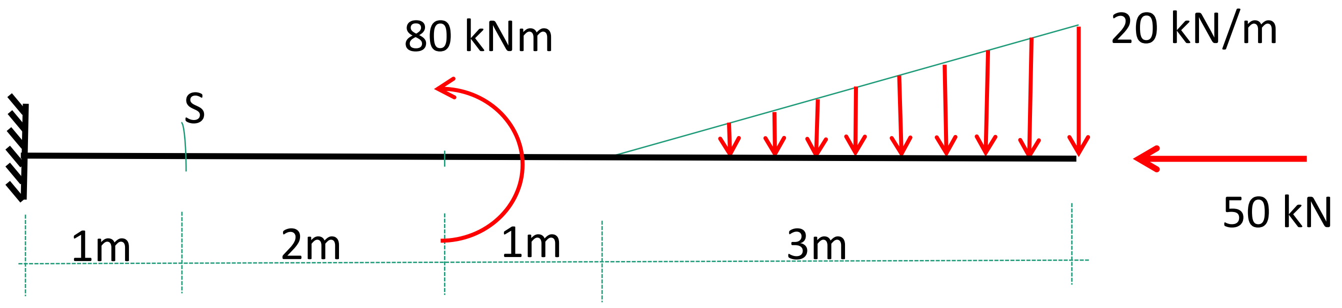


No meio do trecho, a parábola passa pelo ponto onde ocorre o máximo do momento *e a tangente* é *paralela* à *linha PQ*.

Nas extremidades, a parábola é *tangente aos segmentos que ligam o ponto correspondente ao dobro do máximo aos momentos* M_A *e* M_B.

EXERCÍCIO 1.

Determinar os valores dos esforços solicitantes na seção S da viga em balanço da figura

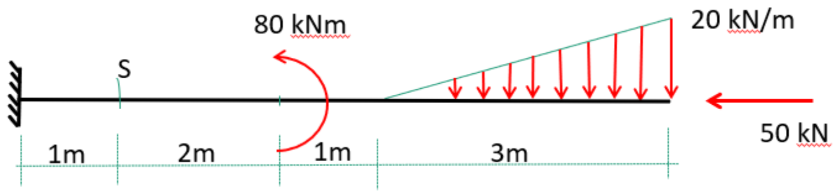


P1-2015

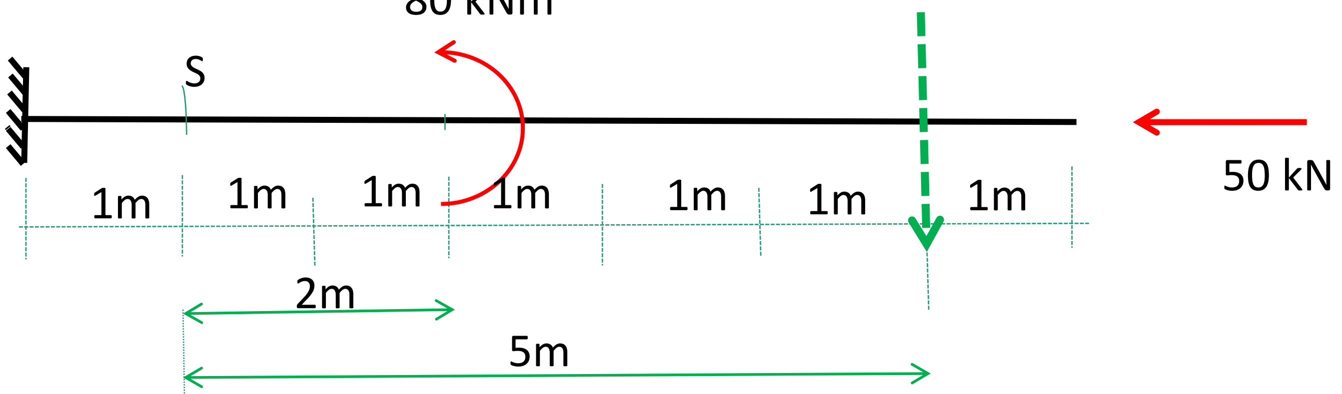
Os esforços solicitantes que atuam em uma seção transversal de uma barra podem ser obtidos cortando a barra nesta seção e reduzindo/transferindo para o seu centro de gravidade todos os esforços externos aplicados do outro lado do corte.

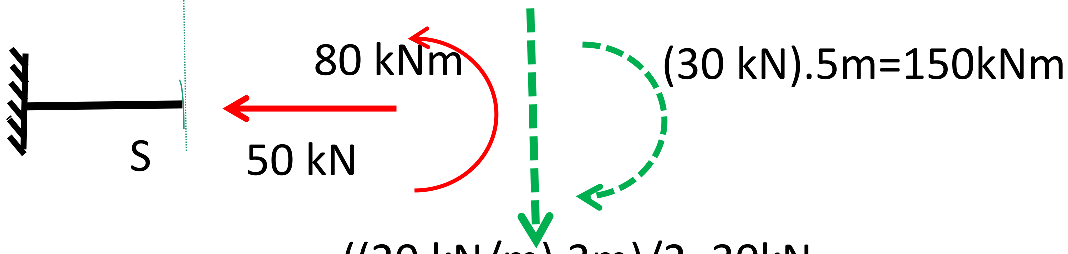
EXERCICIO 1.

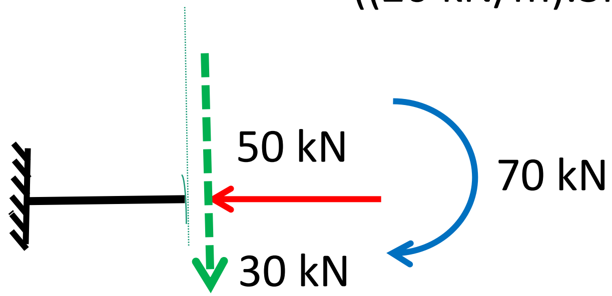
Determinar os valores dos esforços solicitantes na seção S da viga em balanço da figura



TEOREMA DO CORTE

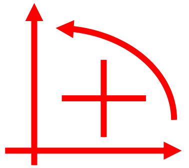




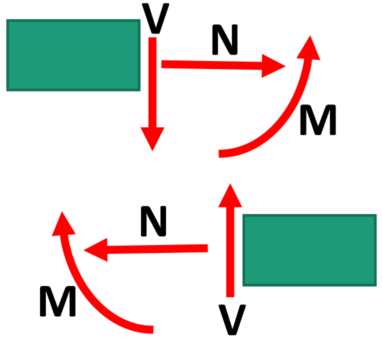


N_S=-50 kN; V_S=+30 kN; M_S=-70kNm

Convenção para o equilíbrio: GRINTER

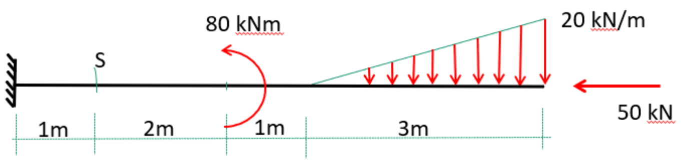


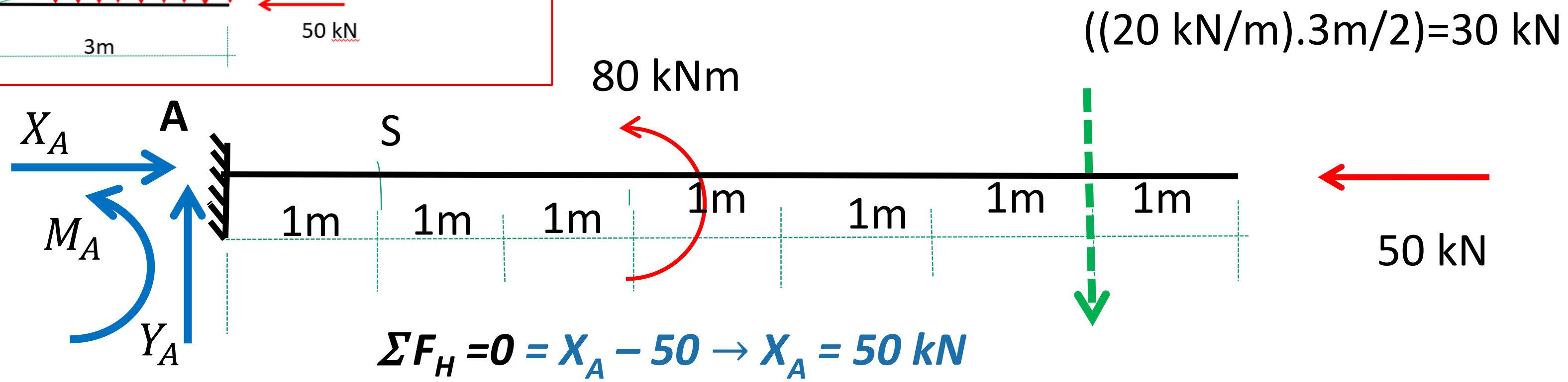
Convenção para esforços solicitantes:



EXERCICIO 1.

Determinar os valores dos esforços solicitantes na seção S da viga em balanço da figura



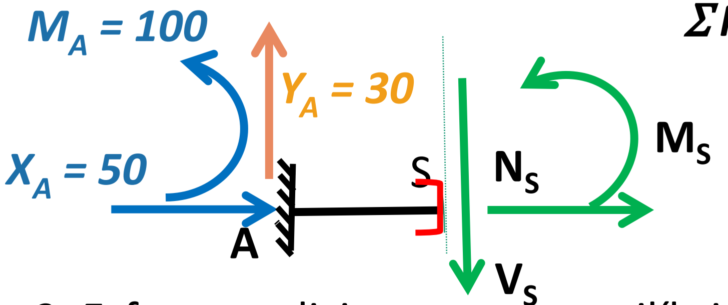


$\Sigma F_H = 0 = X_A - 50 \rightarrow X_A = 50\ kN$

$\Sigma F_V = 0 = Y_A - 30 \rightarrow Y_A = 30\ kN$

$\Sigma M_{(A)} = 0 = +M_A + 80 - 30 \cdot 6 \Longrightarrow M_A = 100\ kNm$

1. Reações no apoio



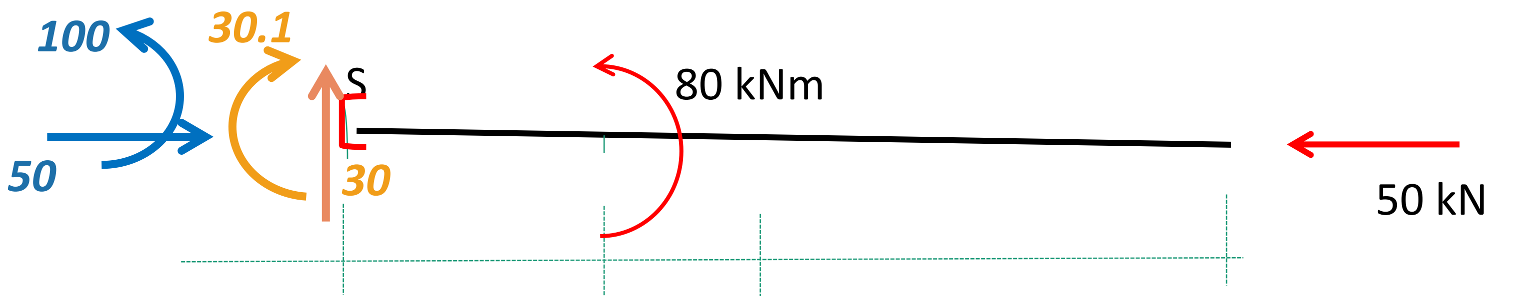
2. Esforços solicitantes por equilíbrio

$\Sigma F_H = 0 = N_S + 50 \rightarrow N_S = -50\ kN$

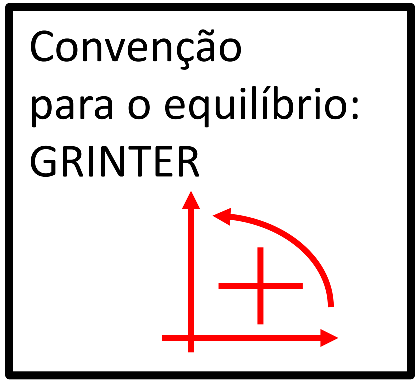
$\Sigma F_V = 0 = -V_S + 30 \rightarrow V_S = +30\ kN$

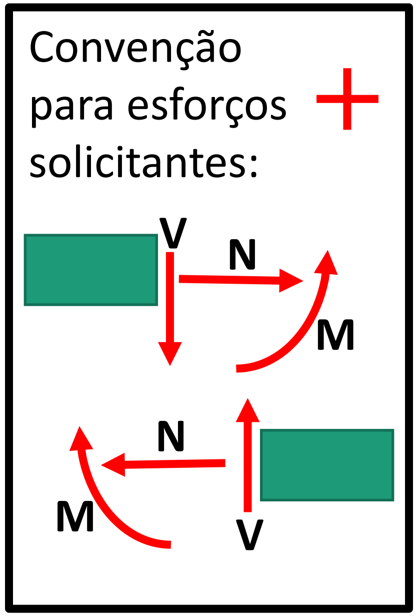
$\Sigma M_{(A)} = 0 = +M_S + 100 - 30 \cdot 1 \Longrightarrow M_s = -70\ kNm$

3. Esforços solicitantes pelo teorema do corte



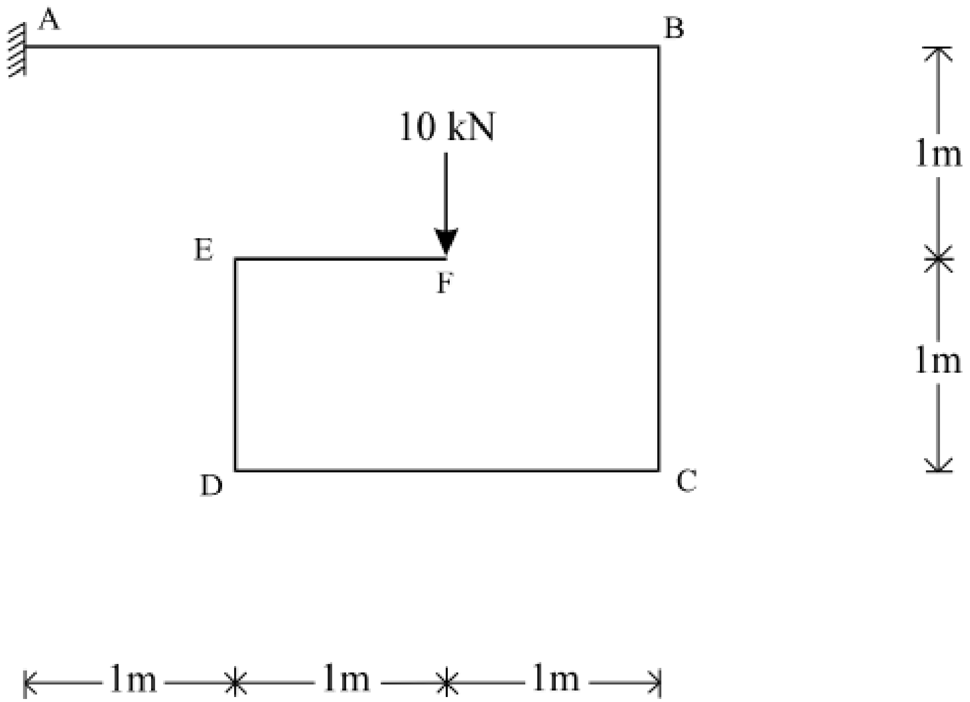
N_S= - 50 kN; V_S= + 30 kN; M_S= - 70kNm





EXERCÍCIO 2.

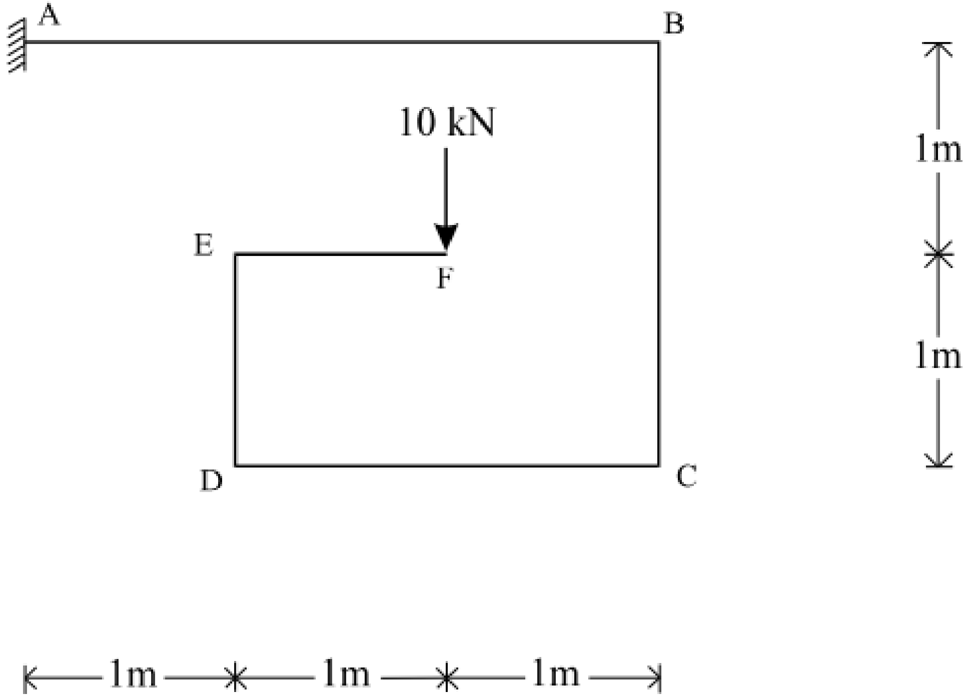
Traçar o diagrama dos esforços solicitantes

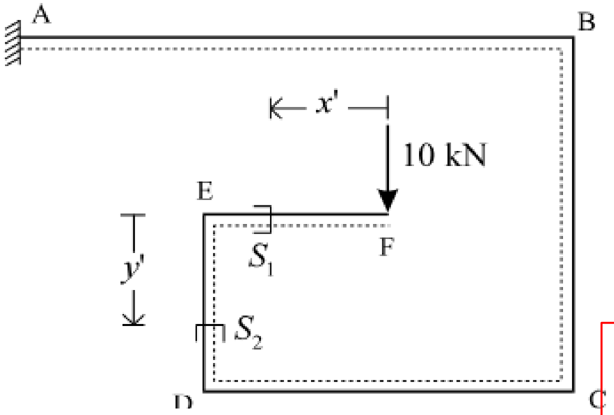


Fonte: Lindenberg Neto, H. Introdução à Mecânica das estruturas, apostila Epusp, São Paulo, 1997

EXERCÍCIO 2.

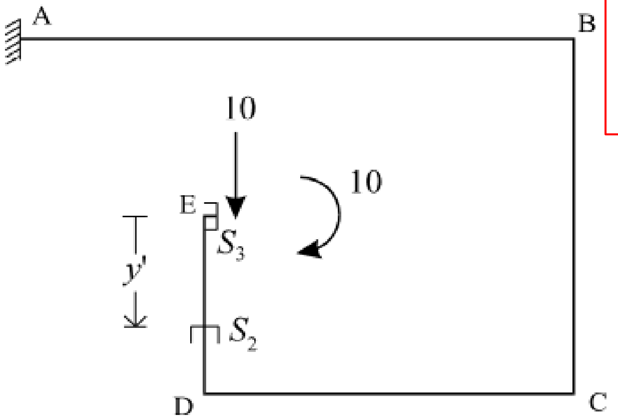
Traçar o diagrama dos esforços solicitantes



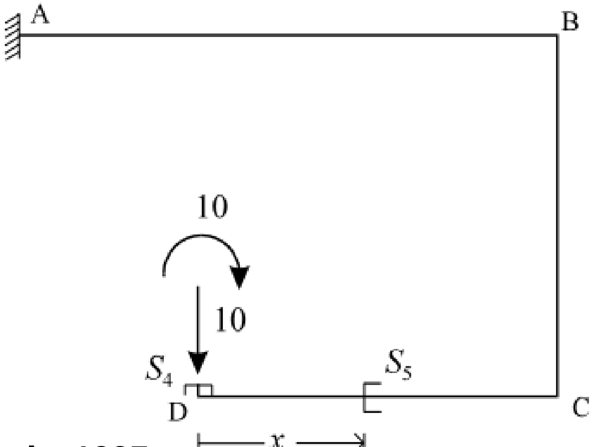


Em S_1: $N(x') = 0$
$V(x') = 10\ kN$
$M(x') = -10 * x'\ kNm$

Em $E_-(x' = 1)$:
$N_{S_3} = N(1) = 0;$
$V_{S_3} = V(1) = 10\ kN;$
$M_{S_3} = M(1) = -10\ kNm$



Em S_2: $N(y') = -10\ kN$
$V(y') = 0\ kN$
$M(y') = -10\ kNm$



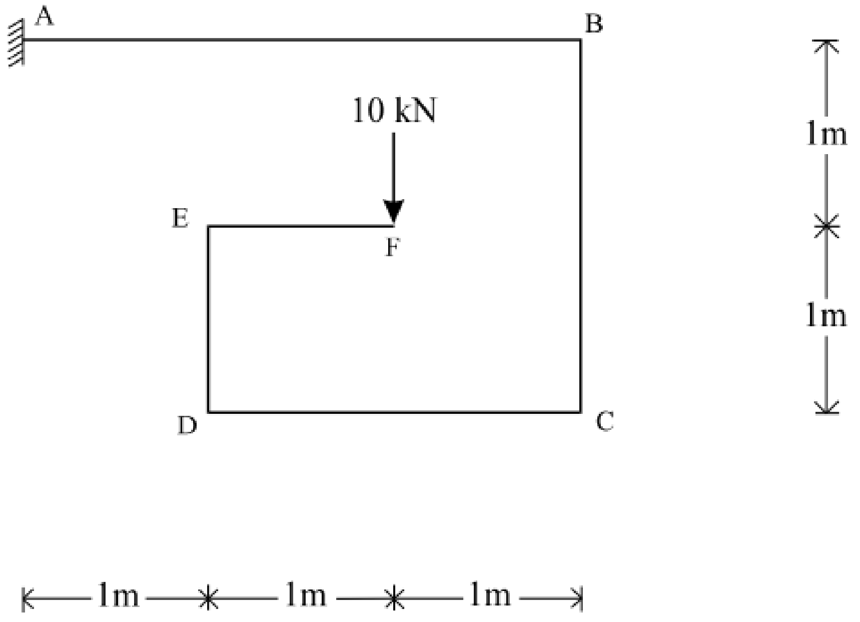
Em D_- $(y' = 1)$:
$N_{S_4} = N(1) = -10\ kN$
$V_{S_4} = V(1) = 0;$
$M_{S_4} = M(1) = -10\ kNm$

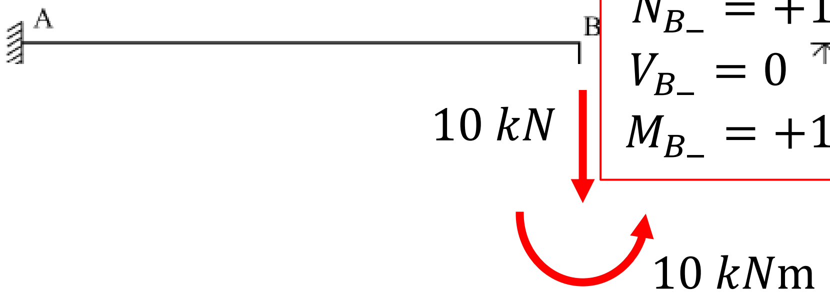
Em E_+:
$N_{E_+} = -10\ kN;$
$V_{E_+} = 0$
$M_{E_+} = -10\ kNm$

Fonte: Lindenberg Neto, H. Introdução à Mecânica das estruturas, apostila Epusp, São Paulo, 1997

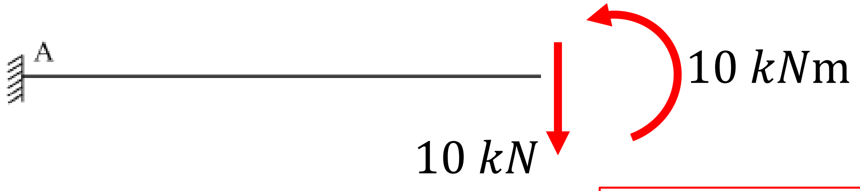
EXERCÍCIO 2.

Traçar o diagrama dos esforços solicitantes

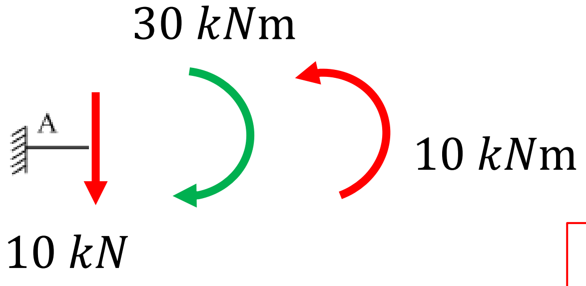




$N_{B_-} = +10kN$
$V_{B_-} = 0$
$M_{B_-} = +10\ kNm$



$N_{B_+} = 0$
$V_{B_+} = +10\ kN$
$M_{B_+} = +10\ kNm$

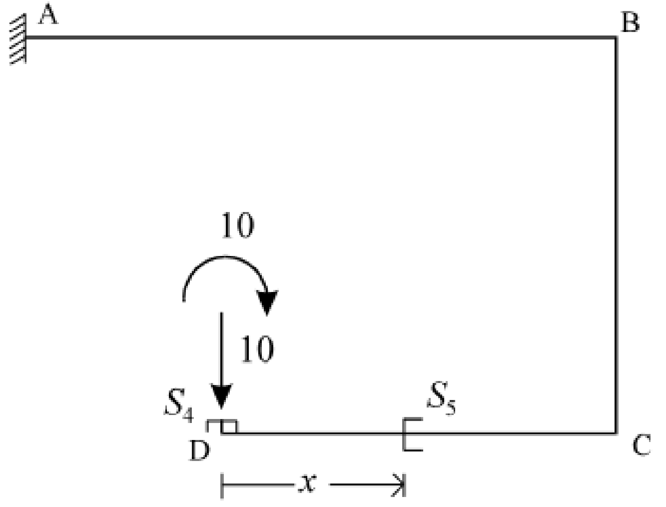


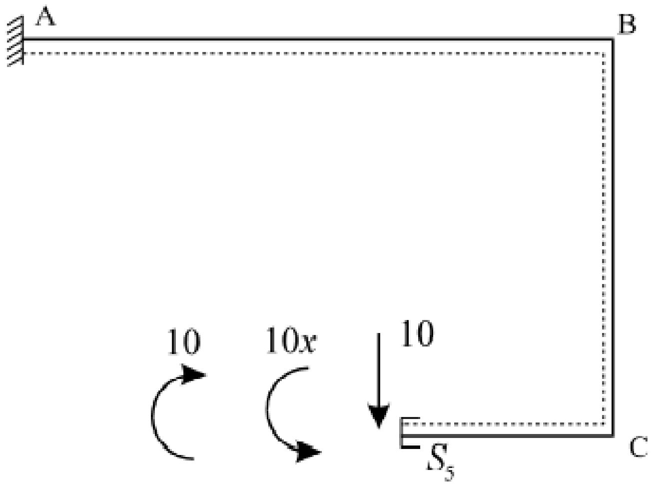
$N_A = 0$
$V_A = +10\ kN$
$M_A = -20\ kNm$

Fonte: Lindenberg Neto, H. Introdução à Mecânica das estruturas, apostila Epusp, São Paulo, 1997

EXERCÍCIO 2.

Traçar o diagrama dos esforços solicitantes





Em S_5: $N(x) = 0$
$V(x) = -10\ kN$
$M(x) = (-10\ x + 10) kNm$

Em $C_-(x = 2)$: $N_{C_-} = 0$
$V_{C_-} = -10\ kN$
$M_{C_-} = -10\ kNm$

Em C_+: $N_{C_+} = +10 kN$
$V_{C_+} = 0$
$M_{C_+} = -10\ kNm$

Em B_-: $N_{B_-} = +10 kN$
$V_{B_-} = 0$
$M_{B_-} = +10\ kNm$

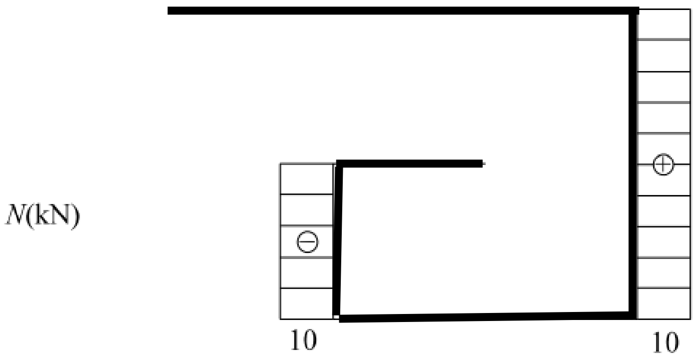
Em B_+: $N_{B_+} = 0$
$V_{B_+} = +10\ kN$
$M_{B_+} = +10\ kNm$

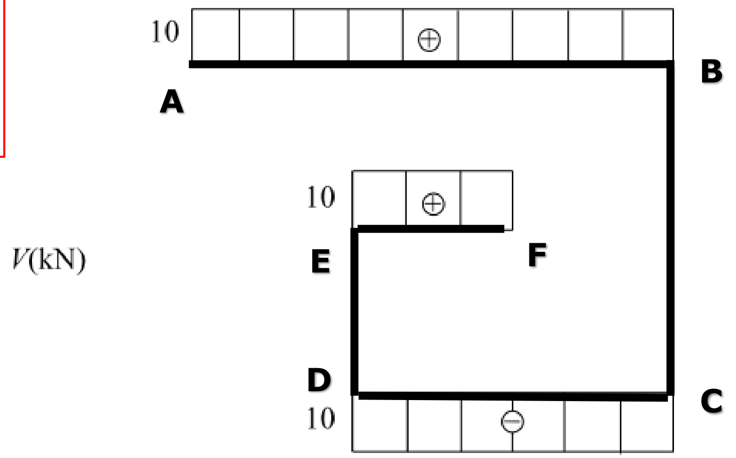
Em A_-: $N_A = 0$
$V_A = +10\ kN$
$M_A = -20\ kNm$

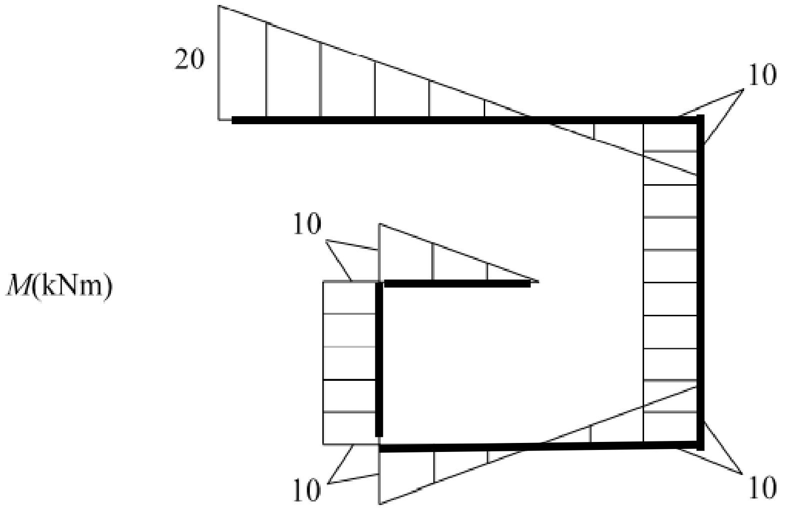
Em E_-:
$N_{S_3} = 0;$
$V_{S_3} = 10\ kN;$
$M_{S_3} = -10\ kNm$

Em D_- :
$N_{S_4} = -10\ kN$
$V_{S_4} = 0;$
$M_{S_4} = -10\ kNm$

Em D_+ :
$N_{D_+} = 0\ kN$
$V_{D_+} = -10\ kN;$
$M_{D_+} = +10\ kNm$

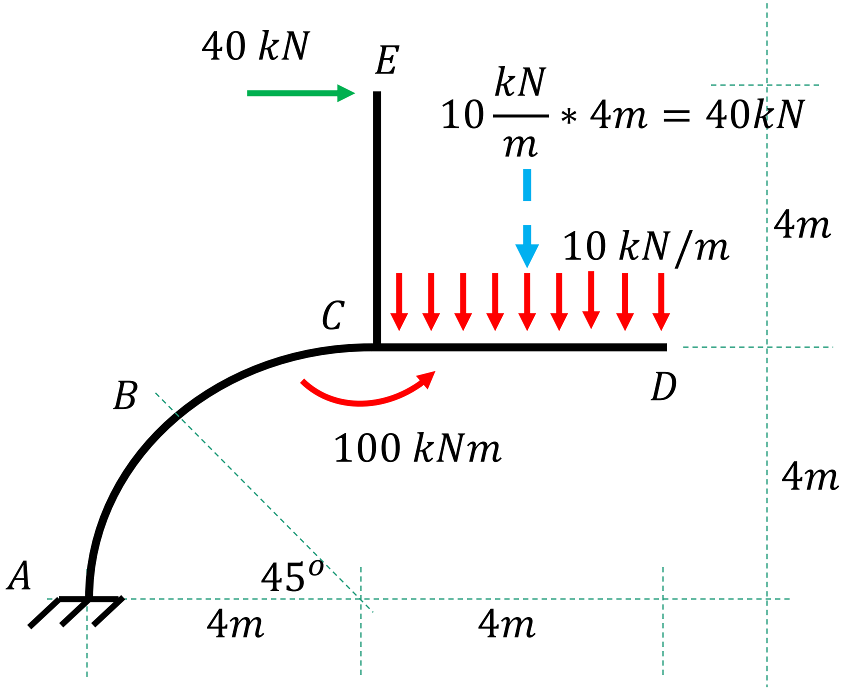


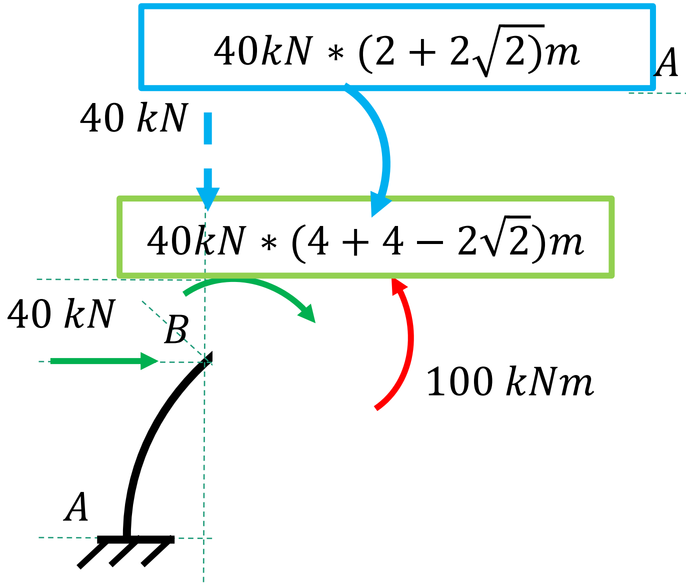


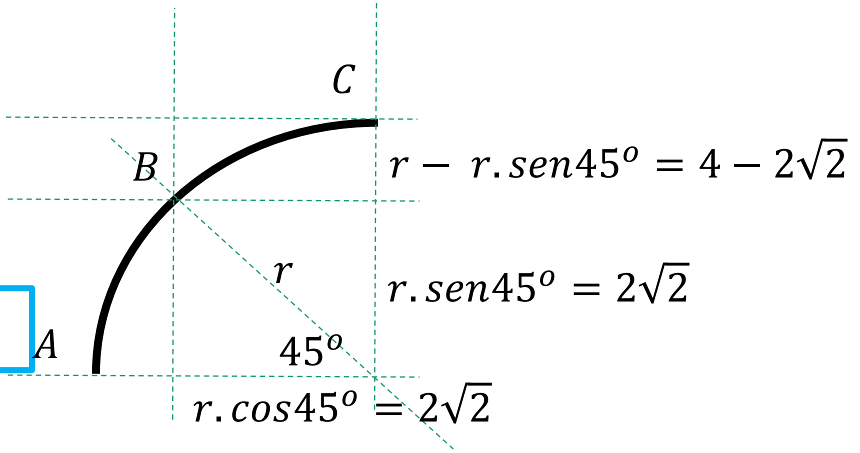


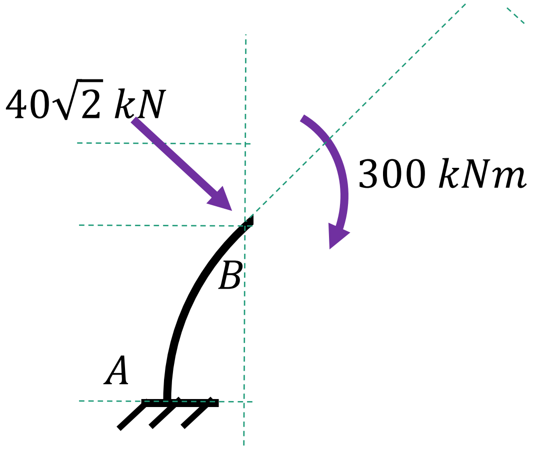
EXERCÍCIO 3.

Determinar os esforços solicitantes em B









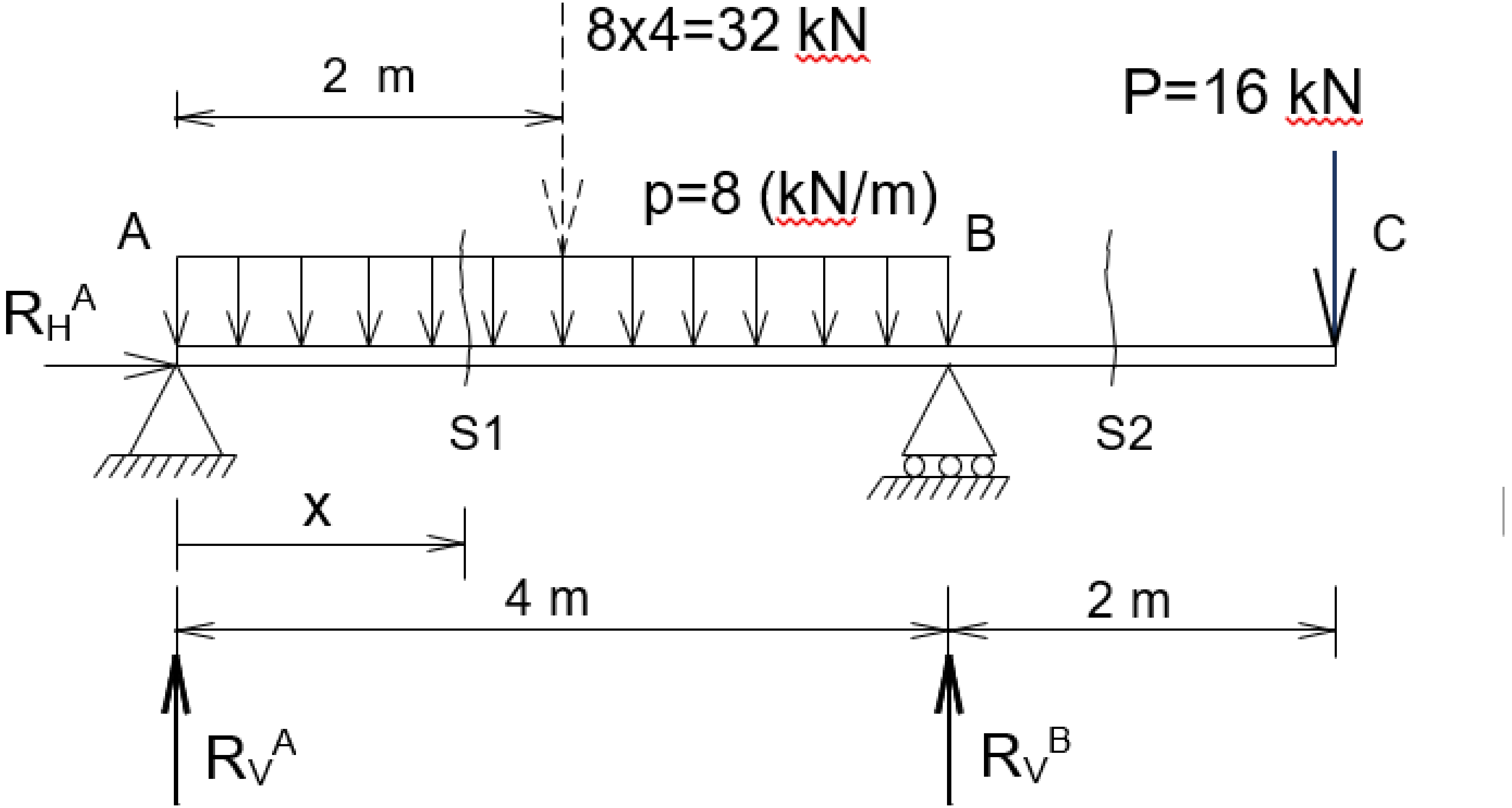
$N_B = 0$

$V_B = +40\sqrt{2}\ kN$

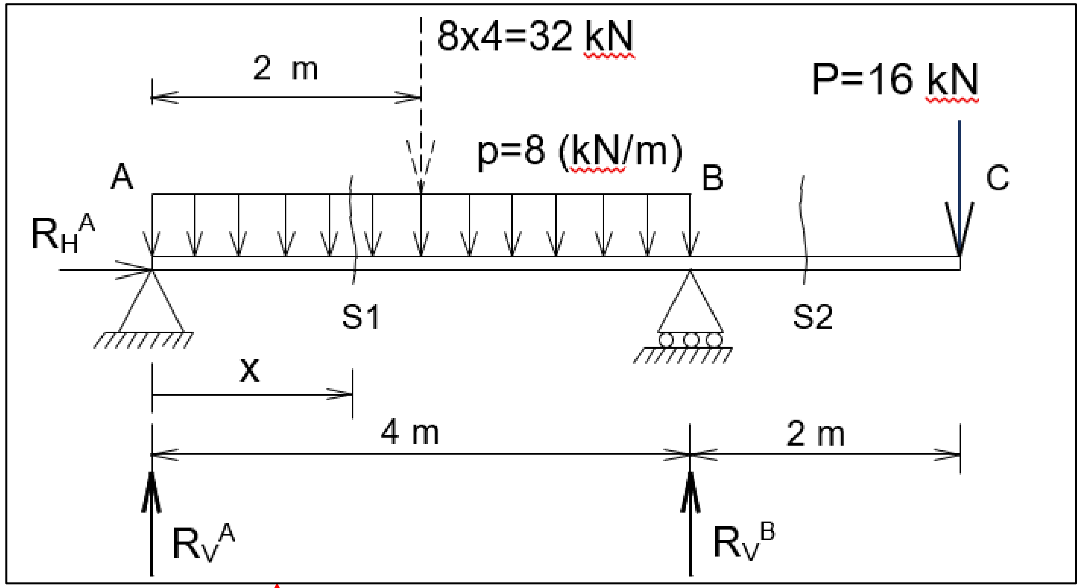
$M_B = -300kNm$

EXERCÍCIO 4.

Traçar os diagramas de estado da viga simplesmente apoiada com balanço à direita, com os carregamentos indicados (conforme modelo matemático na figura, é estrutura plana)



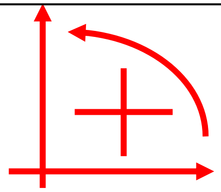
APLICANDO O EQUILÍBRIO



1. REAÇÕES NOS APOIOS

No equilíbrio, adota-se a convenção de Grinter

•Primeira equação para o equilíbrio (**Resultante é zero**)



$\Sigma F_H = \mathbf{0} = \boldsymbol{R_H^A}$

$\Sigma F_V = 0 = R_V^A - 32 + R_V^B - 16$

•Segunda equação para o equilíbrio (**Momento em torno de qualquer eixo é zero**)

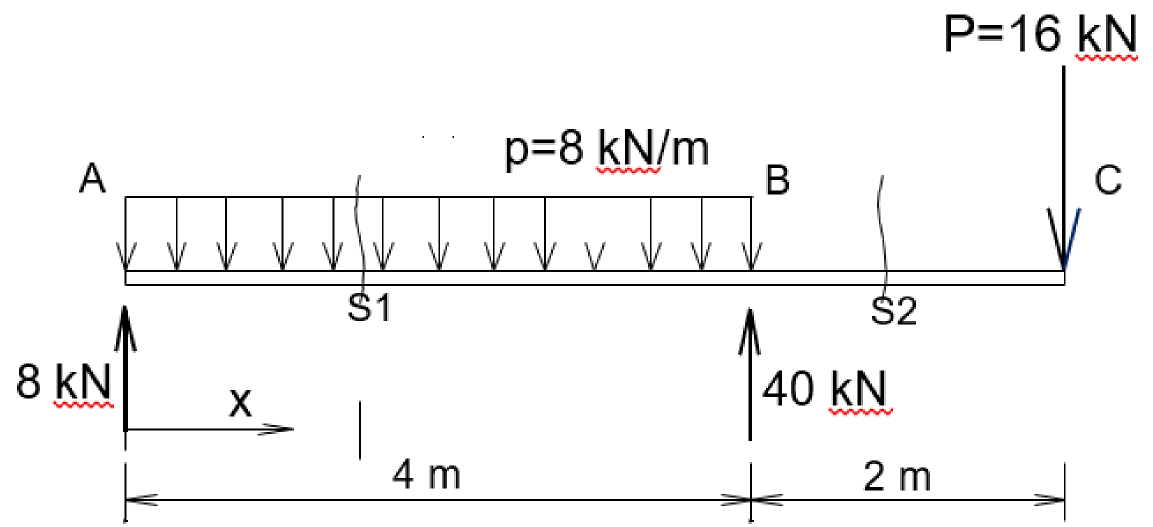
Em torno do eixo ortogonal ao plano da figura, em A:

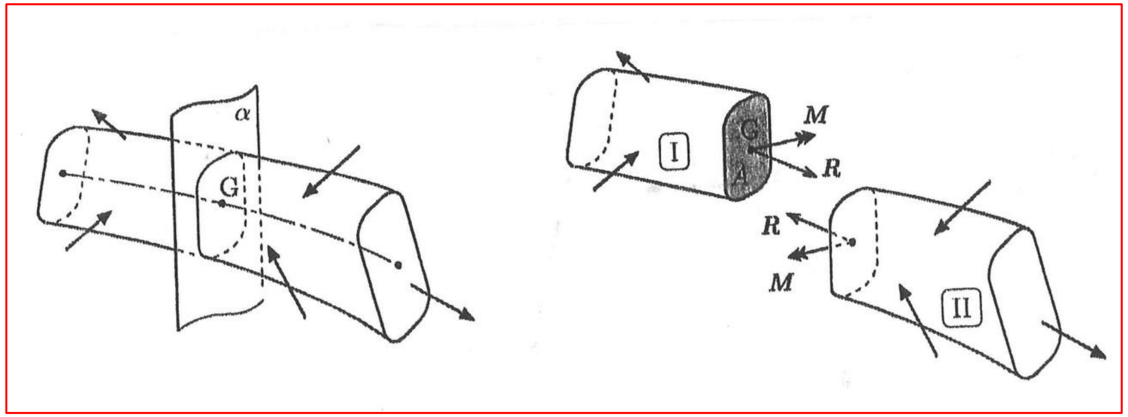
$\Sigma M_{(A)} = 0 = -32 \cdot 2 + R_V^B \cdot 4 - 16 \cdot 6 \Rightarrow \boldsymbol{R_V^B = 40\ kN}$

Em torno do eixo ortogonal ao plano da figura, em B:

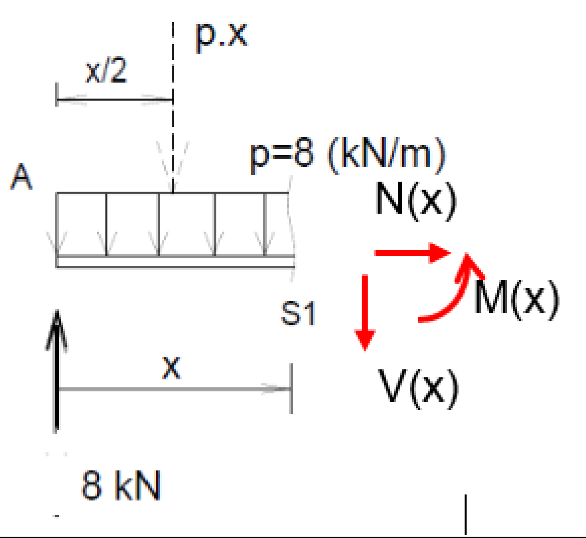
$\Sigma M_{(B)} = 0 = -R_V^A \cdot 4 + 32 \cdot 2 - 16 \cdot 2 \Rightarrow \boldsymbol{R_V^A = 8\ kN}$.

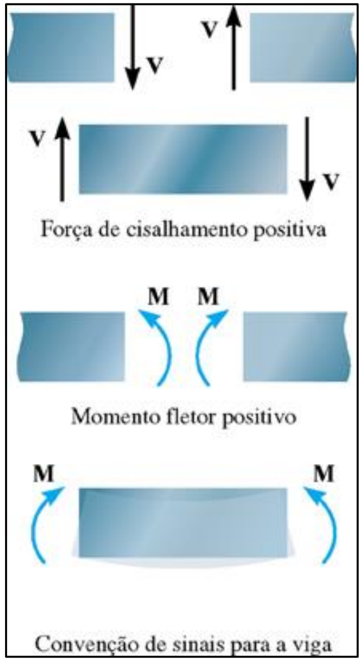
2. DIAGRAMA DO CORPO LIVRE

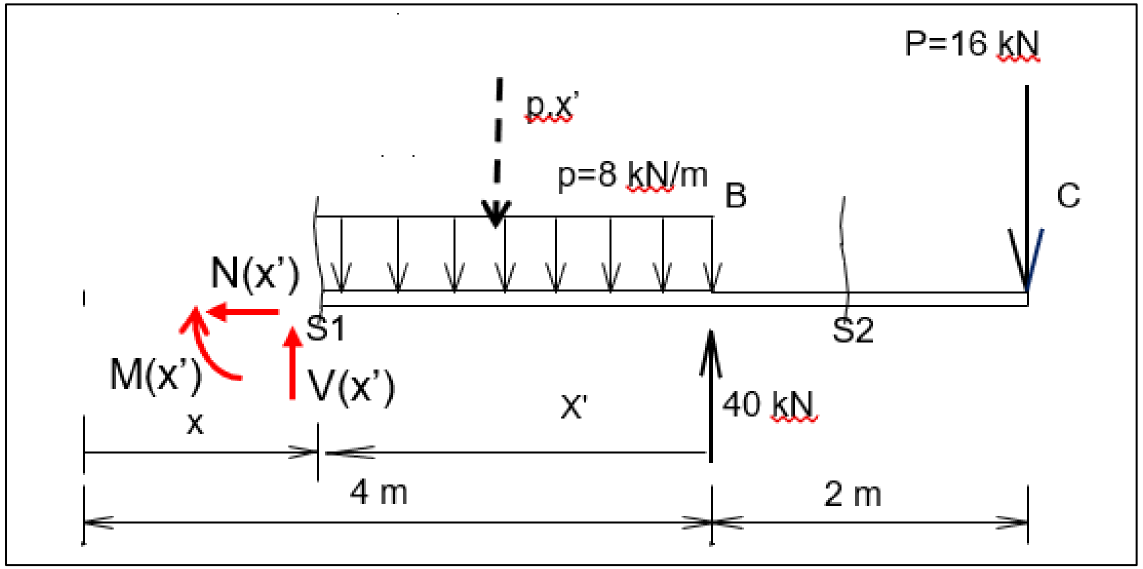


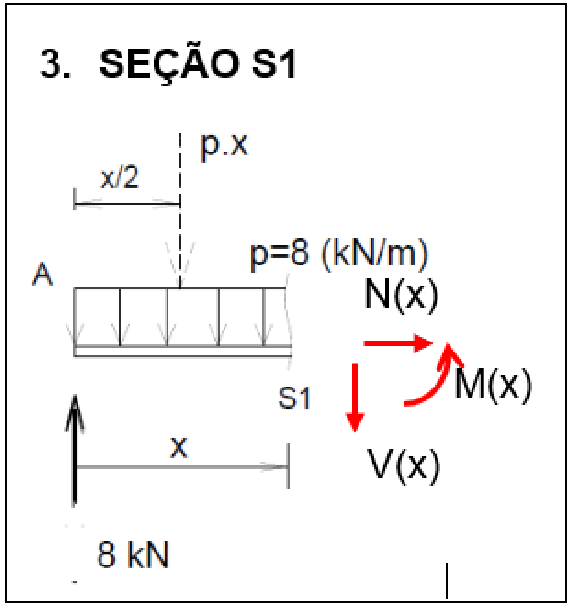


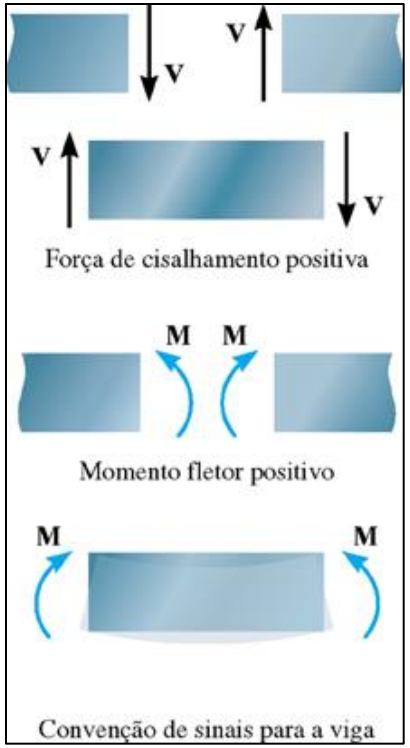
3. SEÇÃO S1











- Primeira equação para o equilíbrio (**Resultante é zero**)

$\sum F_H = 0 = N(x)$

$\sum F_V = 0 = 8 - 8.x - V(x) \Rightarrow \boldsymbol{V(x) = -8.x + 8}$

- Segunda equação para o equilíbrio (**Momento em torno de qualquer eixo é zero**)

Em torno do eixo ortogonal ao plano da figura, em S1:

$\sum M_{(S1)} = 0 = -8.x + 8.x.\frac{x}{2} + M(x) \Rightarrow \boldsymbol{M(x) = -4.x^2 + 8.x}$

- Trecho de A $(x = 0)$ até B $(x = 4)$

$V_A = -8.0 + 8 = 8\,;$

$V_B = -8.4 + 8 = -24\,;$

$M_A = -4.0^2 + 8.0 = 0;$

$M_B = -4.4^2 + 8.4 = -32;$

$M_{(x=1)} = -4.1^2 + 8.1 = 4$

$p - força\ distribuída$

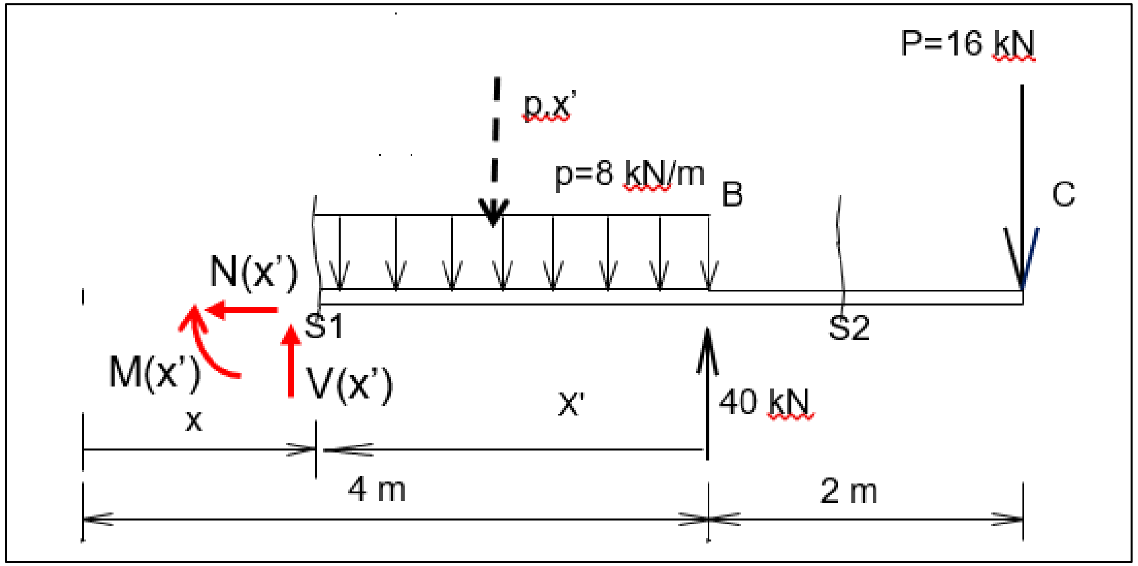
$V - força\ cortante$

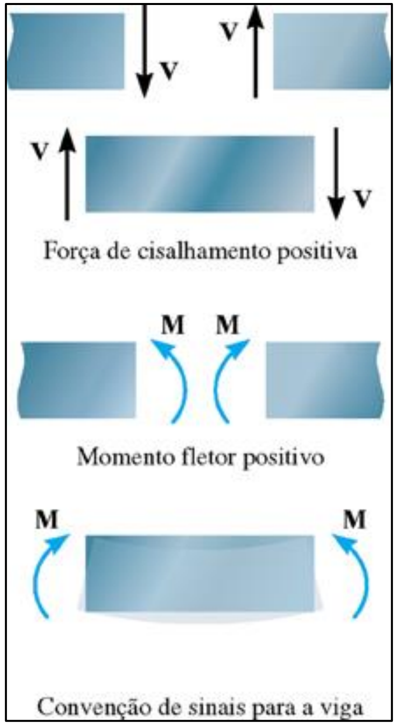
$M - momento\ fletor$

$x - origem\ em\ A$

$$\frac{dV(x)}{dx} = -p(x)\ ; \quad \frac{dM(x)}{dx} = V(x)$$

APLICANDO O EQUILÍBRIO





$p - força\ distribuída$
$V - força\ cortante$
$M - momento\ fletor$
$x - origem\ em\ A$

$$\frac{dV(x)}{dx} = -p(x)\ ;\ \frac{dM(x)}{dx} = V(x)$$

- Primeira equação para o equilíbrio (**Resultante é zero**)

$$\sum F_H = 0 = -N(x') \Longrightarrow N(x') = 0$$

$$\sum F_V = 0 = V(x') - 8.x' + 40 - 16 \Longrightarrow \boldsymbol{V(x') = 8.x' - 24}$$

- Segunda equação para o equilíbrio (**Momento em torno de qualquer eixo é zero**)

Em torno do eixo ortogonal ao plano da figura, em S1:

$$\sum M_{(S1)} = 0 = -M(x') - 8.x'.\frac{x'}{2} + 40.x' - 16.(x'+2)$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{M(x') = -4.x'^2 + 24.x' - 32}$$

- Trecho de B $(x' = 0)$ até A $(x' = 4)$:

$$V_B = 8.0 - 24 = -24;$$
$$V_A = 8.4 - 24 = 8\ ;$$
$$M_B = -4.0^2 + 24.0 - 32 = -32;$$
$$M_A = -4.4^2 + 24.4 - 32 = 0$$
$$M_{(x'=3)} = -4.3^2 + 24.3 - 32 = 4$$

APLICANDO O EQUILÍBRIO

- Primeira equação para o equilíbrio (**Resultante é zero**)

$\sum F_H = 0 = N(x)$

$\sum F_V = 0 = 8 - 8.x - V(x) \Rightarrow \mathbf{V(x) = -8.x + 8}$

- Segunda equação para o equilíbrio (**Momento em torno de qualquer eixo é zero**)

Em torno do eixo ortogonal ao plano da figura, em S1:

$\sum M_{(S1)} = 0 = -8.x + 8.x.\frac{x}{2} + M(x) \Rightarrow \mathbf{M(x) = -4.x^2 + 8.x}$

- Trecho de A $(x = 0)$ até B $(x = 4)$

$V_A = -8.0 + 8 = 8$;
$V_B = -8.4 + 8 = -24$;
$M_A = -4.0^2 + 8.0 = 0$;
$M_B = -4.4^2 + 8.4 = -32$;
$M_{(x=1)} = -4.1^2 + 8.1 = 4$

- Primeira equação para o equilíbrio (**Resultante é zero**)

$\sum F_H = 0 = -N(x') \Rightarrow N(x') = 0$

$\sum F_V = 0 = V(x') - 8.x' + 40 - 16 \Rightarrow \mathbf{V(x') = 8.x' - 24}$

- Segunda equação para o equilíbrio (**Momento em torno de qualquer eixo é zero**)

Em torno do eixo ortogonal ao plano da figura, em S1:

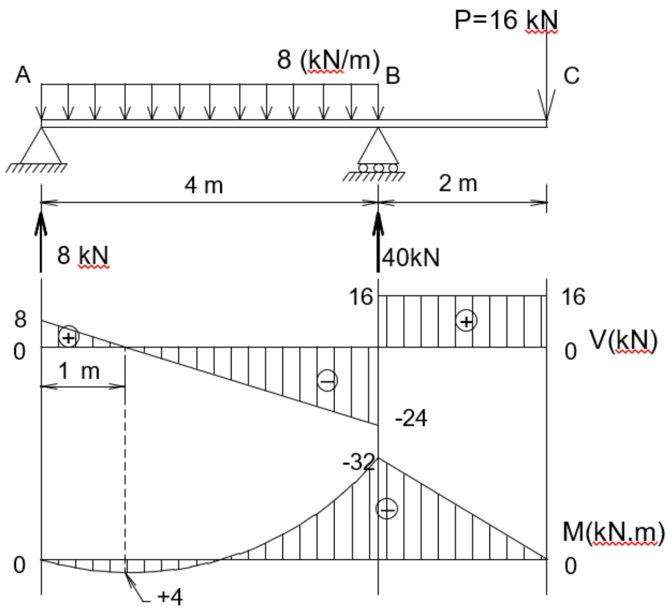
$\sum M_{(S1)} = 0 = -M(x') - 8.x'.\frac{x'}{2} + 40.x' - 16.(x' + 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbf{M(x') = -4.x'^2 + 24.x' - 32}$

- Trecho de B $(x' = 0)$ até A $(x' = 4)$:

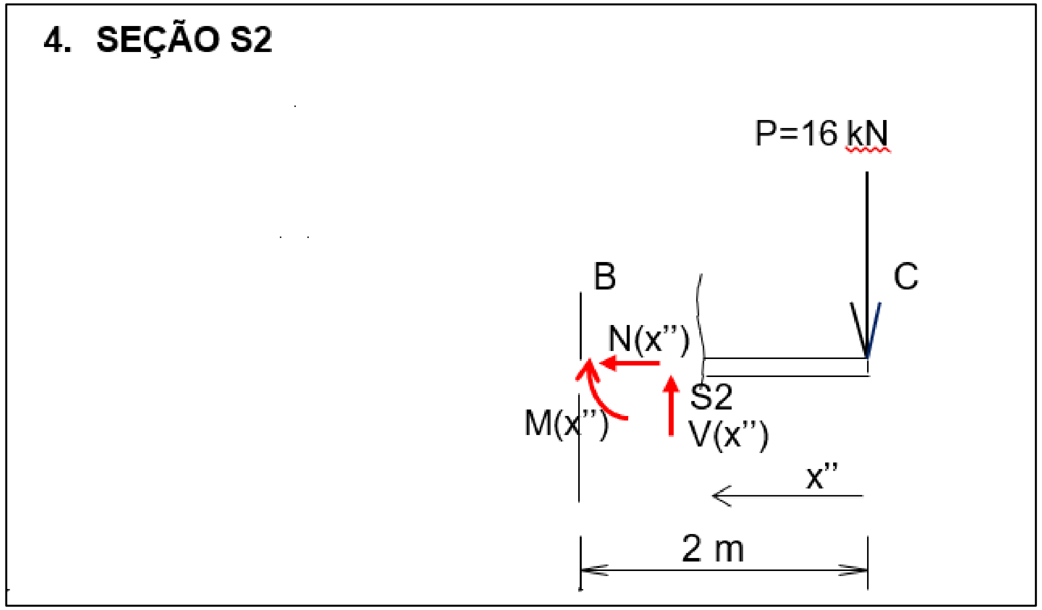
$V_B = 8.0 - 24 = -24$;
$V_A = 8.4 - 24 = 8$;
$M_B = -4.0^2 + 24.0 - 32 = -32$;
$M_A = -4.4^2 + 24.4 - 32 = 0$
$M_{(x'=3)} = -4.3^2 + 24.3 - 32 = 4$

5. DIAGRAMAS DOS ESFORÇOS SOLICITANTES



Observe que, considerando a parte da esquerda como a parte da direita, as funções de x e as funções de x' são diferentes, mas os valores das forças cortantes e dos momentos fletores são iguais.

APLICANDO O EQUILÍBRIO



- Primeira equação para o equilíbrio (**Resultante é zero**)

$\sum F_H = 0 = N(x'')$

$\sum F_V = 0 = V(x'') - 16 \Longrightarrow \boldsymbol{V(x'') = 16}$

- Segunda equação para o equilíbrio (**Momento em torno de qualquer eixo é zero**)

Em torno do eixo ortogonal ao plano da figura, em S2:

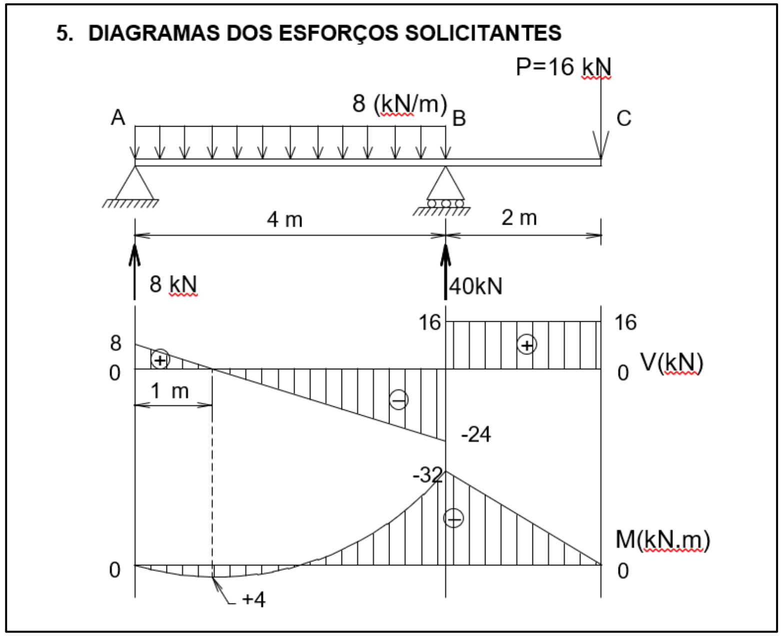
$\sum M_{(S2)} = 0 = -16.x'' - M(x'') \Longrightarrow \boldsymbol{M(x'') = -16.x''}$

Trecho de C $(x'' = 0)$ até B $(x'' = 2)$:

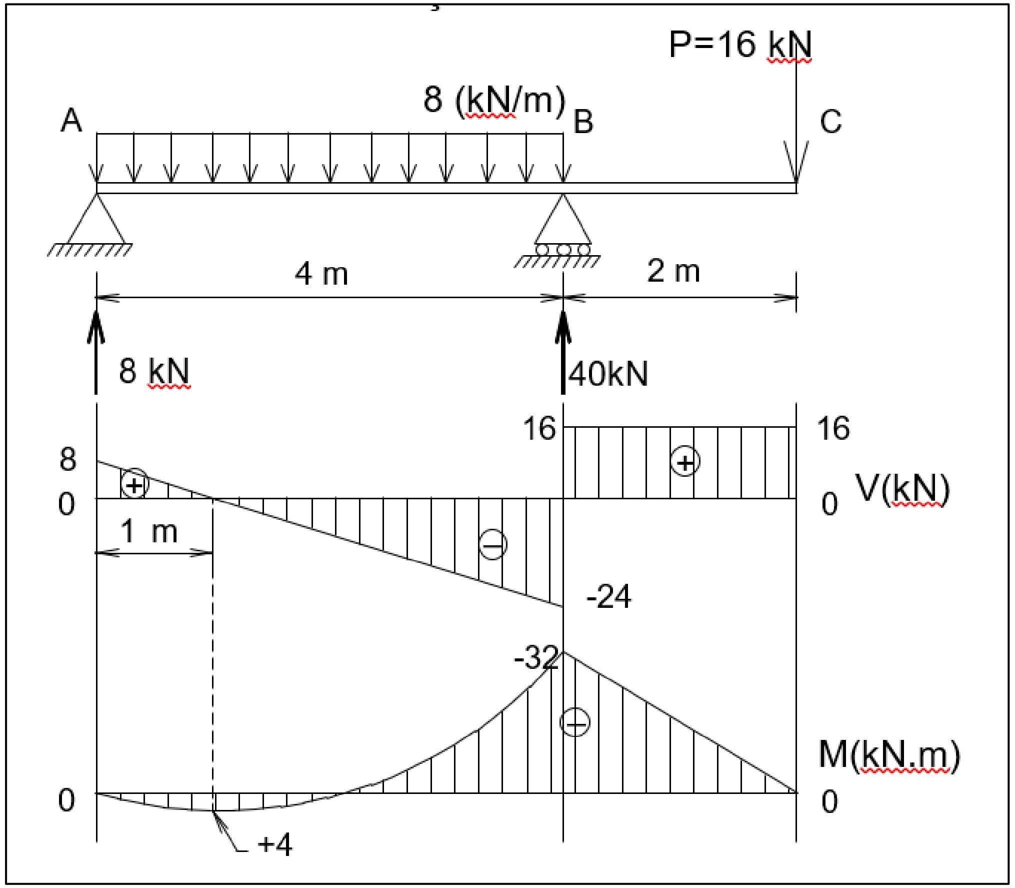
$V_C = 16\ ;\ V_B = 16;\ M_C = 0; M_B = -16.2 = -32$

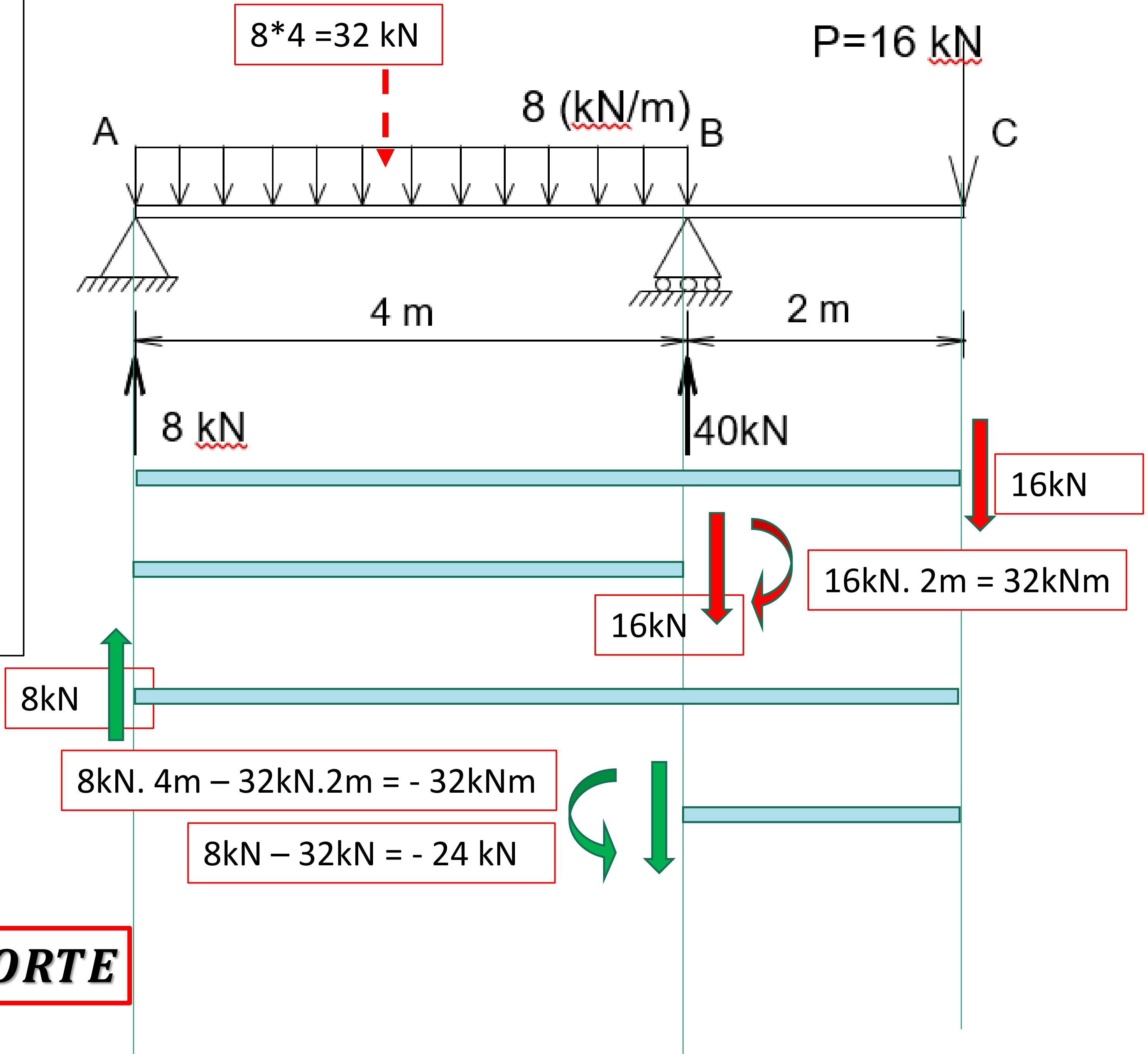
$$\frac{dV(x)}{dx} = -p(x)\ ;\ \frac{dM(x)}{dx} = V(x)$$

$p -$ *força distribuída*
$V -$ *força cortante*
$M -$ *momento fletor*
$x -$ *origem em A*



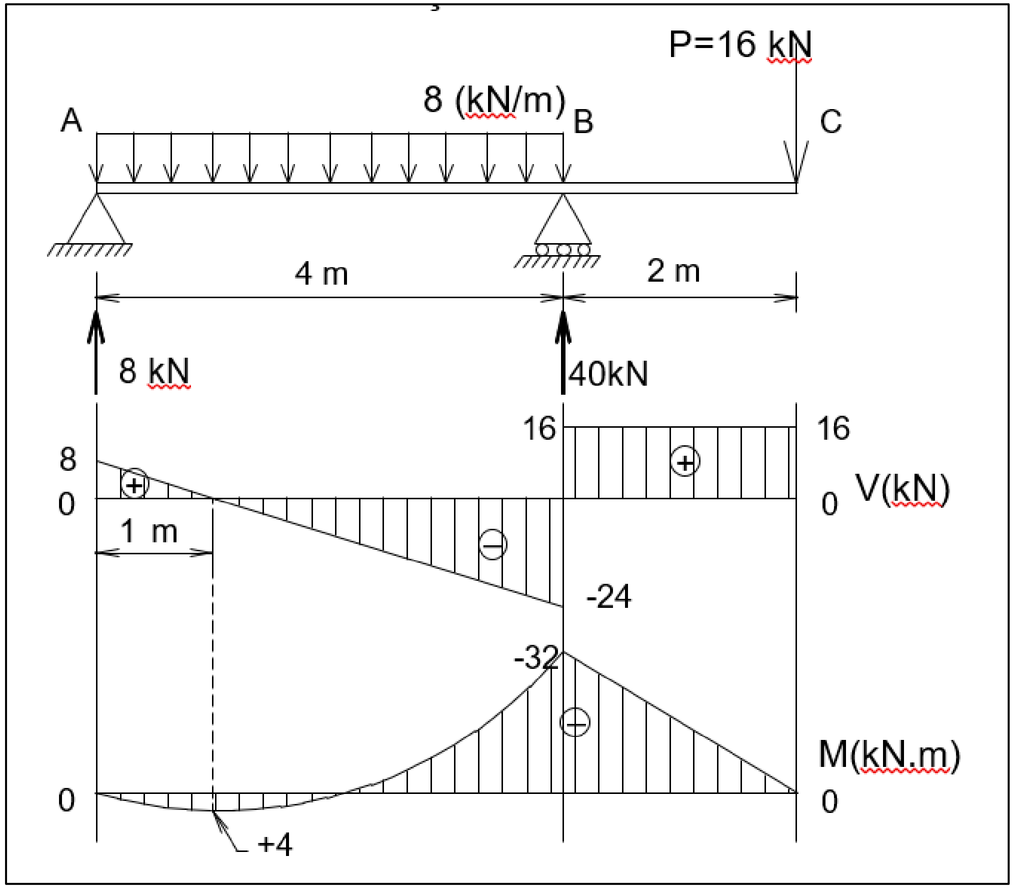
APLICANDO O EQUILÍBRIO

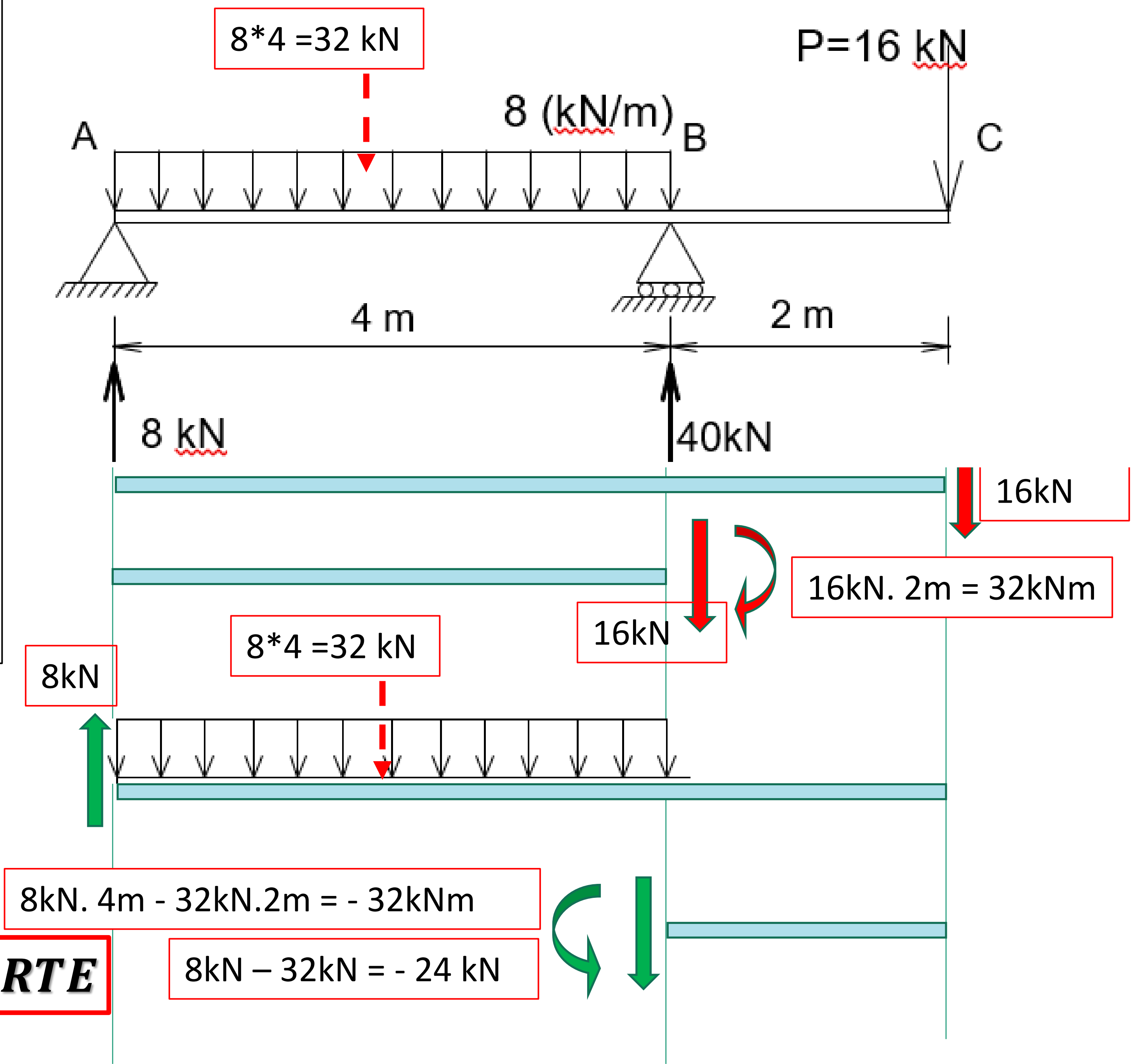




$$\frac{dV(x)}{dx} = -p(x)\ ;\ \frac{dM(x)}{dx} = V(x)$$

APLICANDO O TEOREMA DO CORTE

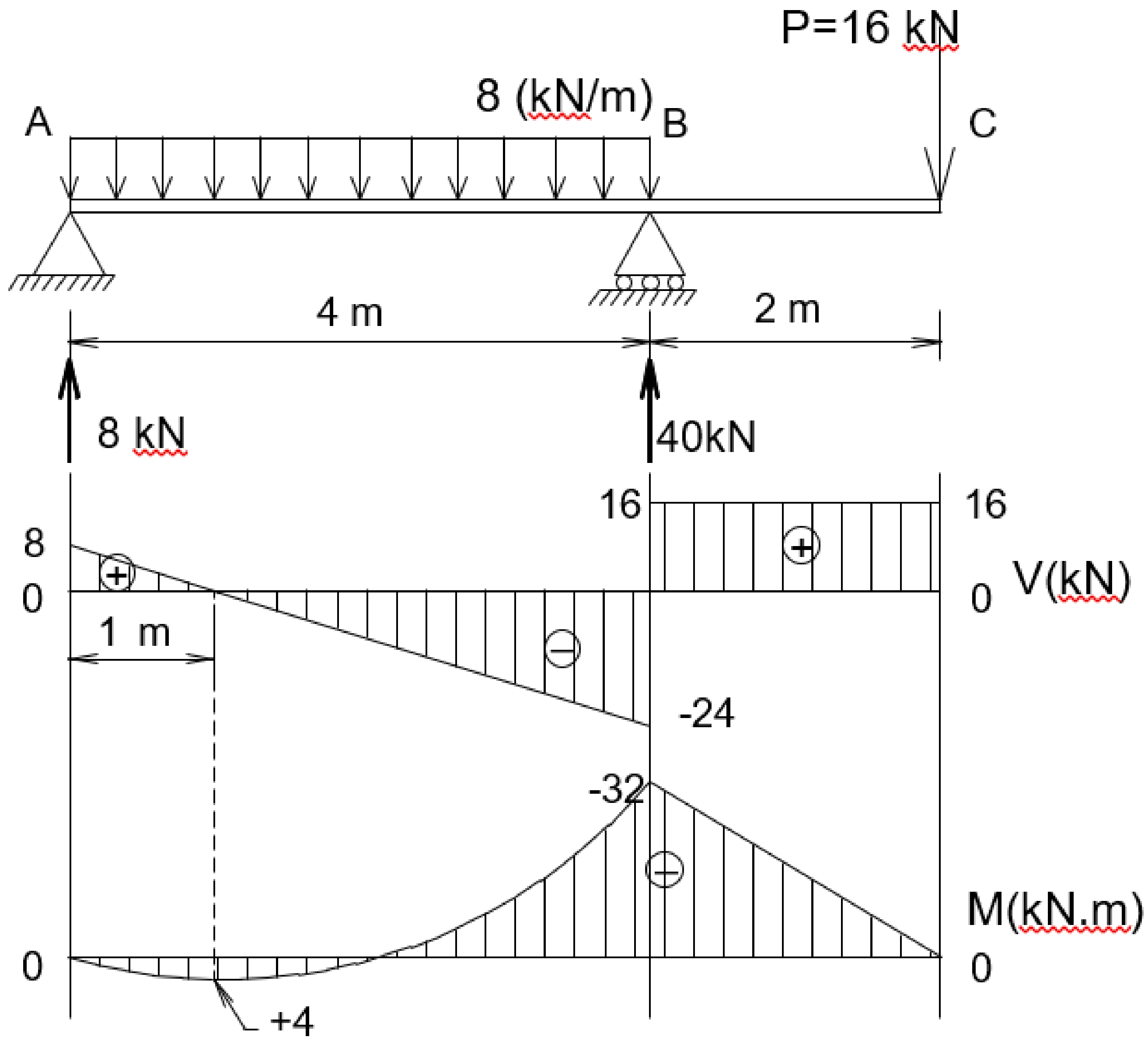




$$\frac{dV(x)}{dx} = -p(x)\ ;\ \frac{dM(x)}{dx} = V(x)$$

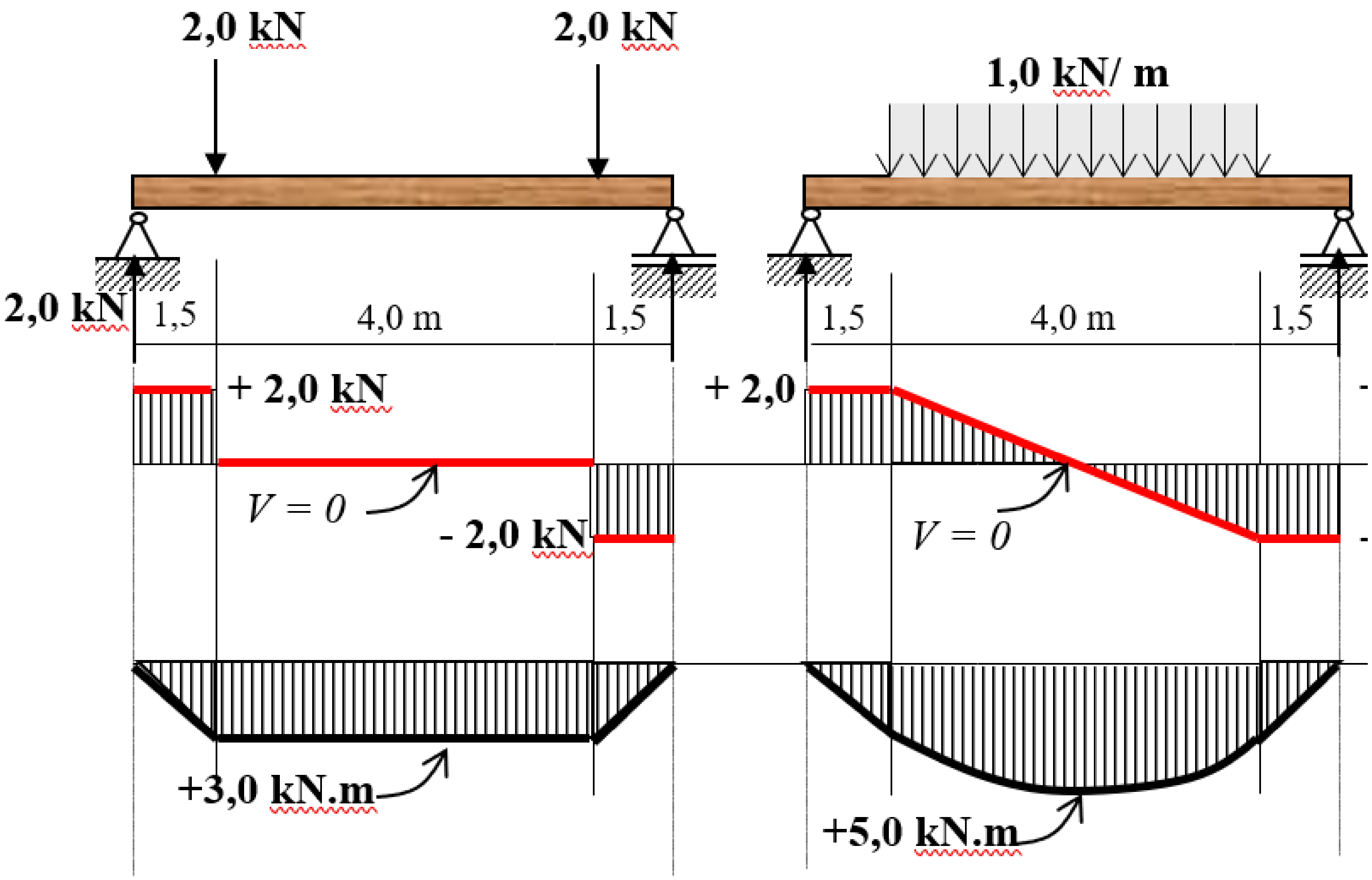
APLICANDO O TEOREMA DO CORTE

5. DIAGRAMAS DOS ESFORÇOS SOLICITANTES



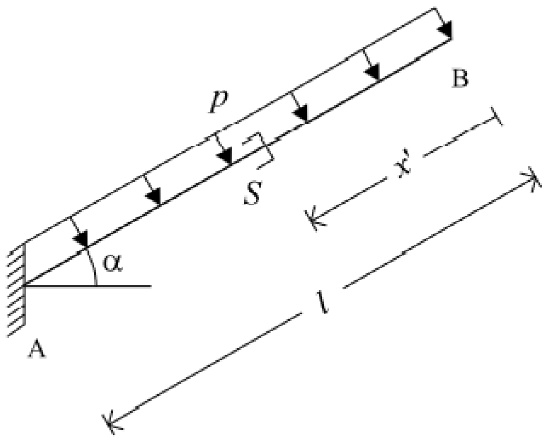
EXERCÍCIO 5.

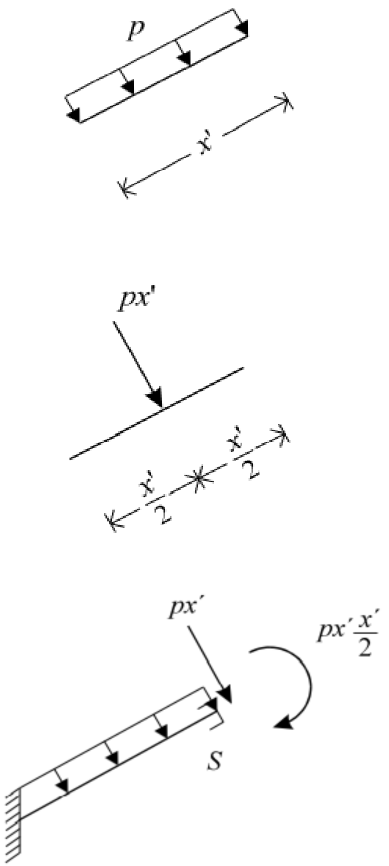
COMPARAR AS DUAS SITUAÇÕES. DETERMINAR AS REAÇÕES DOS APOIOS E ESBOÇAR O DIAGRAMA DOS ESFORÇOS SOLICITANTES.



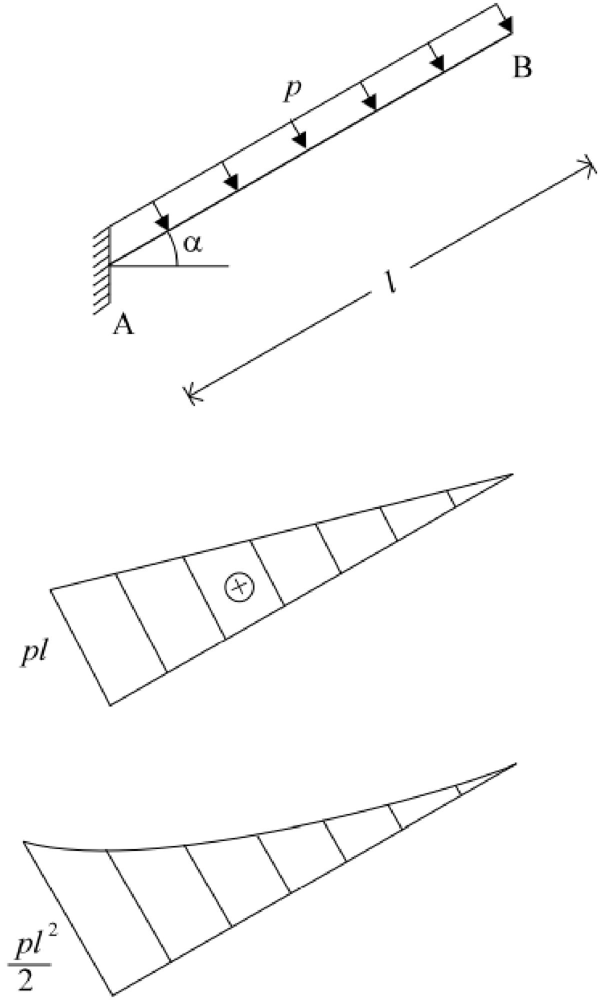
EXERCÍCIO 6.

Traçar os diagramas dos esforços solicitantes da viga em balanço





$$N(x') = 0$$
$$V(x') = +px' \Longrightarrow V_A = V(l) = pl$$
$$M(x') = -\frac{p(x')^2}{2} \Longrightarrow M_A = M(l) = -\frac{pl^2}{2}$$

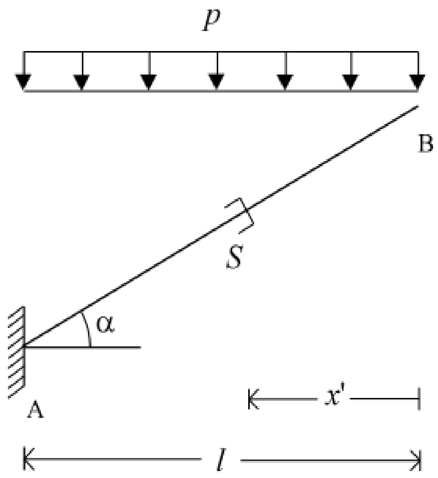


APLICANDO O TEOREMA DO CORTE

Fonte: Lindenberg Neto, H. Introdução à Mecânica das estruturas, apostila Epusp, São Paulo, 1997

EXERCÍCIO 7.

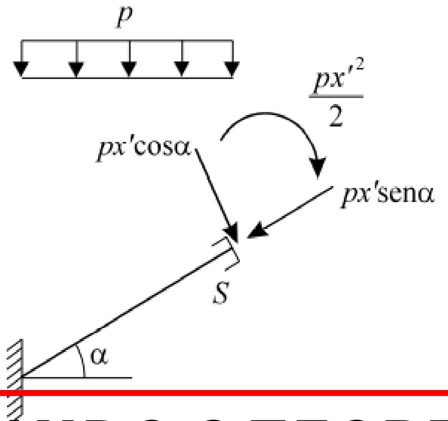
Traçar o diagrama dos esforços solicitantes na viga poligonal



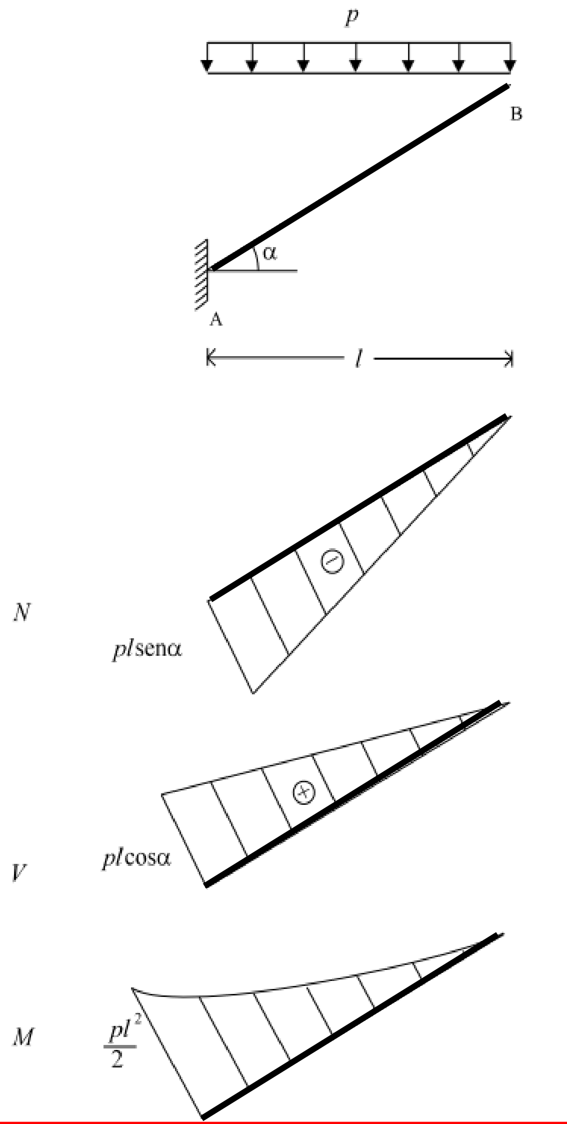
$$N(x') = -px'\,sen\alpha$$

$$V(x') = px'\cos\alpha$$

$$M(x') = -\frac{px'^2}{2}.$$



$$N(0) = 0; N(l) = -plsen\alpha$$
$$V(0) = 0; V(l) = plcos\alpha$$
$$M(0) = 0; M(l) = -\frac{pl^2}{2}$$

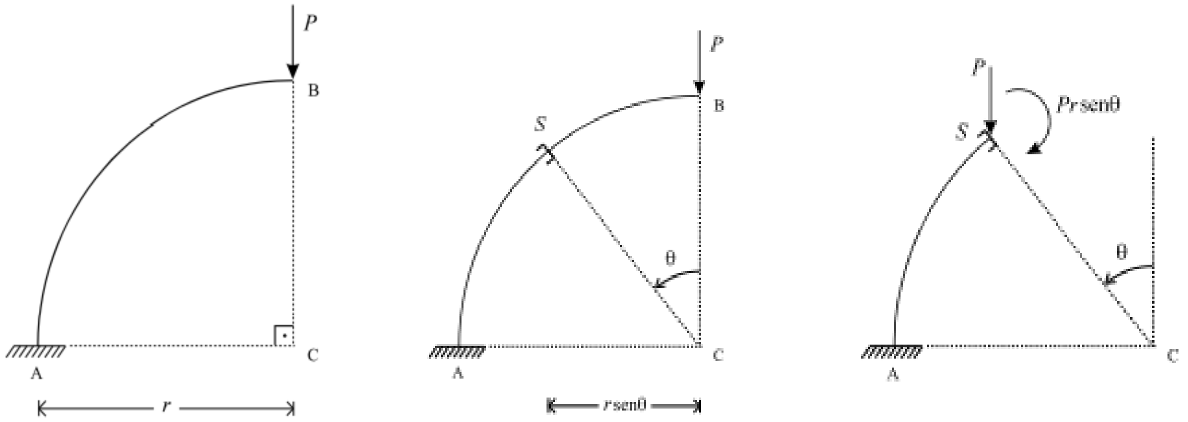


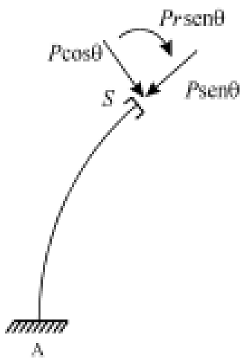
APLICANDO O TEOREMA DO CORTE

Fonte: Lindenberg Neto, H. Introdução à Mecânica das estruturas, apostila Epusp, São Paulo, 1997

EXERCÍCIO 8.

Traçar o diagrama dos esforços solicitantes na viga poligonal





$N(\theta) = -P\text{sen}\theta$

$V(\theta) = P\cos\theta$

$M(\theta) = -Pr\text{sen}\theta$

$N(B) = N(0) = 0$

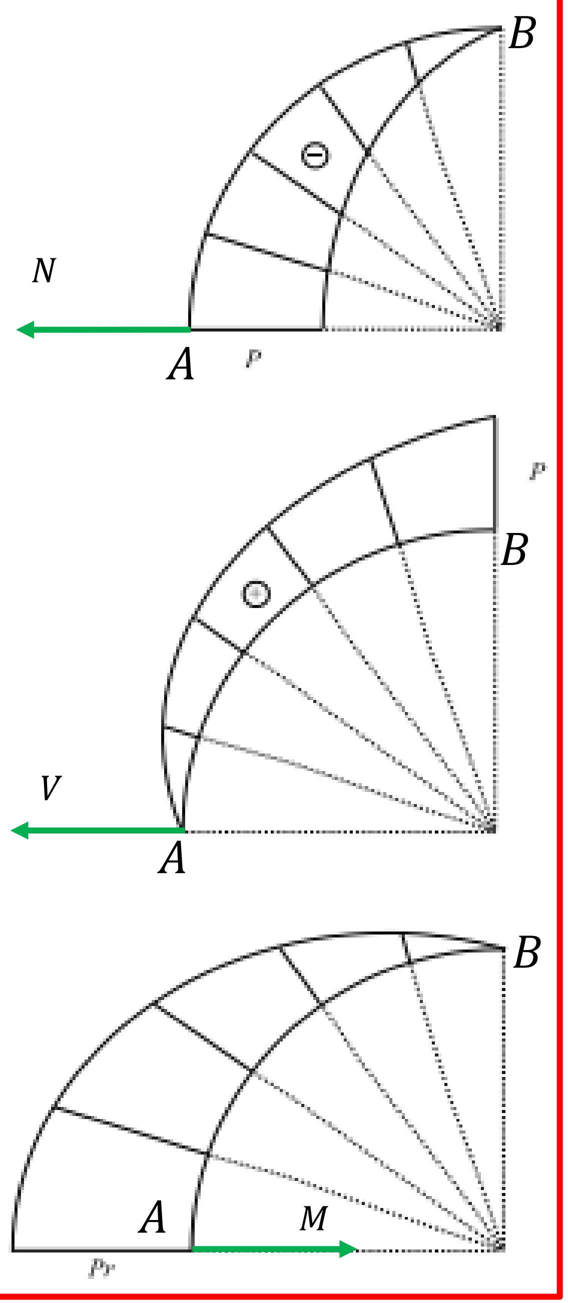
$N(A) = N\left(\frac{\pi}{2}\right) = -P$

$V(B) = V(0) = P$

$V(A) = V\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$M(B) = M(0) = 0$

$M(A) = M\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\text{Pr}$

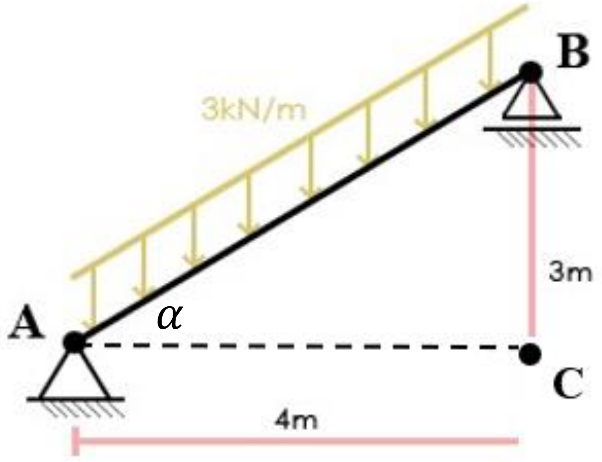


APLICANDO O TEOREMA DO CORTE

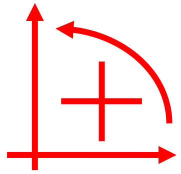
Fonte: Lindenberg Neto, H. Introdução à Mecânica das estruturas, apostila Epusp, São Paulo, 1997

EXERCÍCIO 9.

Determinar as reações dos apoios e esboçar o diagrama dos esforços solicitantes na estrutura da figura



Convenção
para o equilíbrio:
GRINTER

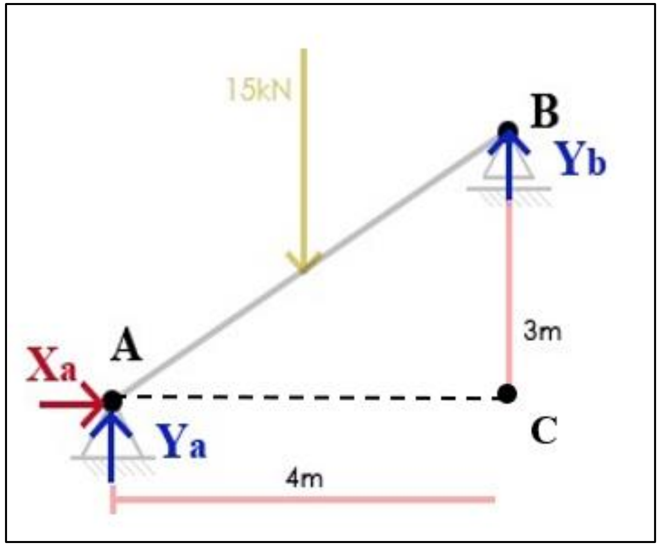


$$sen\ \alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

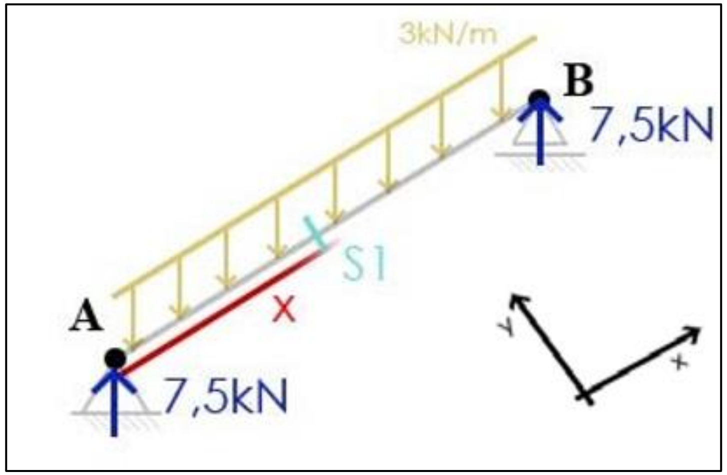
$$\cos\alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

1. **REAÇÕES NOS APOIOS**

- $\Sigma F_H = 0 = Xa \Rightarrow \mathbf{Xa = 0}$
- $\Sigma M_{(A)} = 0 = -15*2 + Yb*4$
  $\Rightarrow \mathbf{Yb = 7{,}5kN}$
- $\Sigma M_{(C)} = 0 = -Ya*4 + 15*2$
  $\Rightarrow \mathbf{Ya = 7{,}5kN}$



2. DIAGRAMA DO CORPO LIVRE



$$sen\ \alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

APLICANDO O EQUILÍBRIO

3. SEÇÃO S1

$\Sigma X = 0 = N(x) + 7{,}5\text{sen } \alpha - 3x.\text{sen } \alpha$

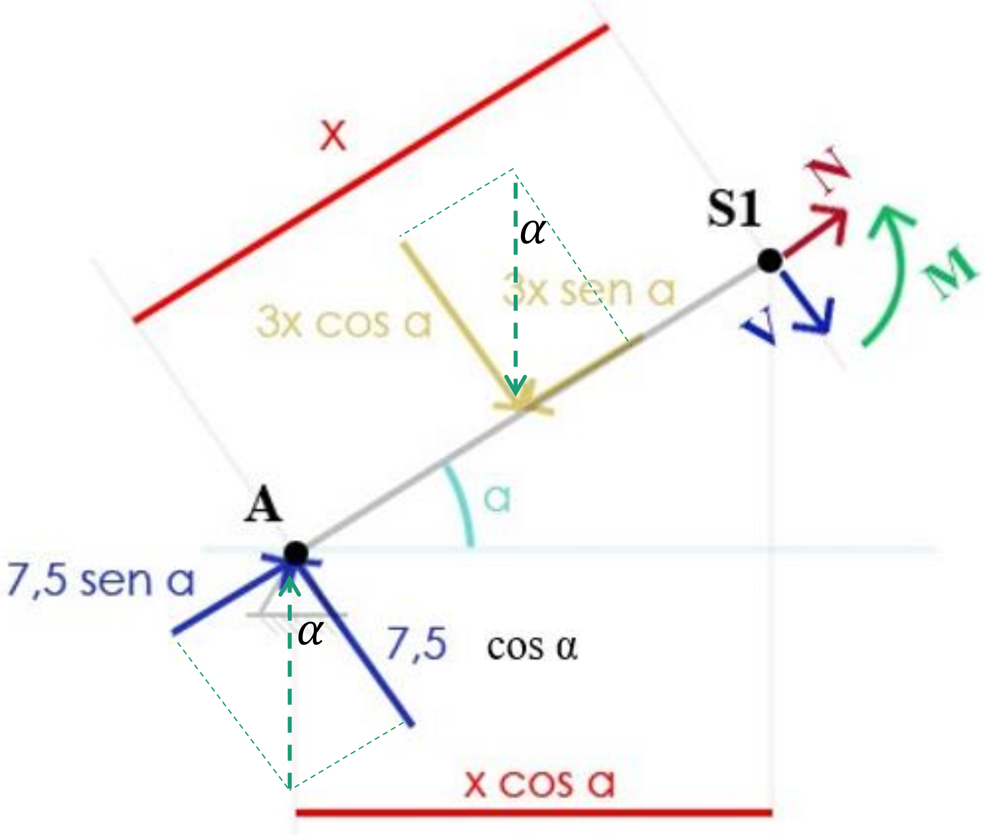
$\Rightarrow \mathbf{N(x) = -4{,}5 + 1{,}8x}$

$\Sigma Y = 0 = 7{,}5.\cos \alpha - 3x.\cos \alpha - V(x)$

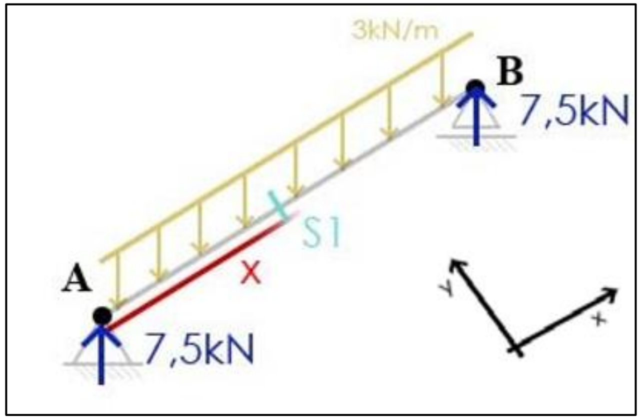
$\Rightarrow \mathbf{V(x) = 6 - 2{,}4x}$

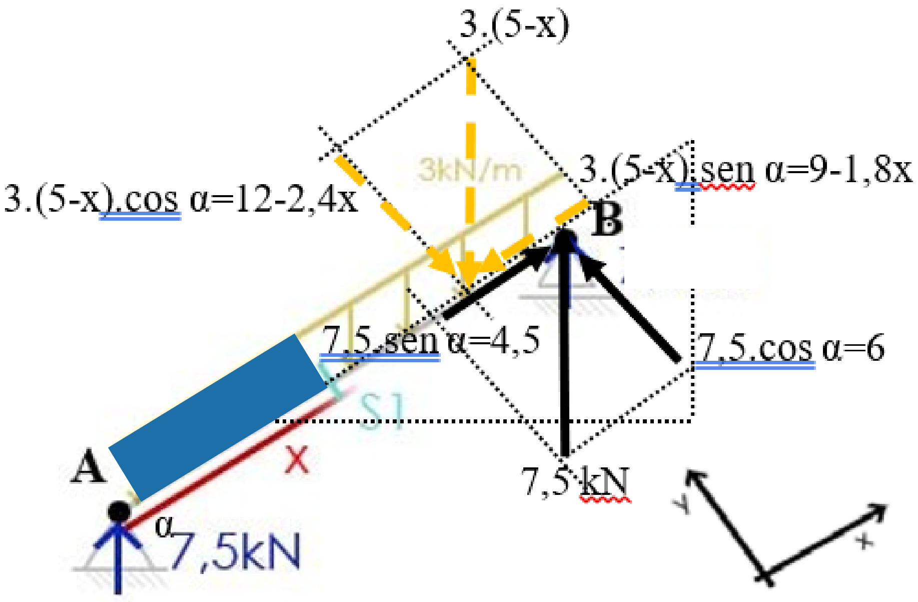
$\Sigma M_{(S1)} = 0 = (-7{,}5.\cos \alpha)*x + (3x.\cos \alpha)*x/2 + M(x)$

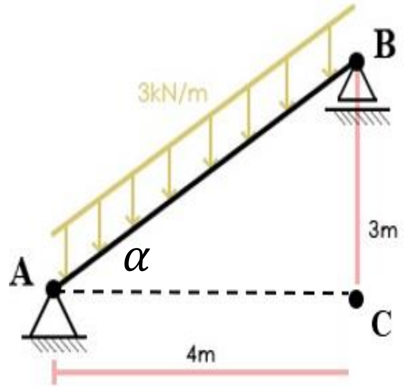
$\Rightarrow \mathbf{M(x) = 6x - 1{,}2x^2}$



3. SEÇÃO S1



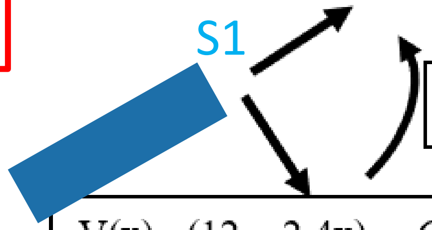




$$sen\ \alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

APLICANDO O TEOREMA DO CORTE



N(x)= 4,5 – (9 – 1,8x) = - 4,5 + 1,8x

M(x)= 6.(5 – x) - (12 – 2,4x).(5 – x)/2 = 6x – 1,2x^2

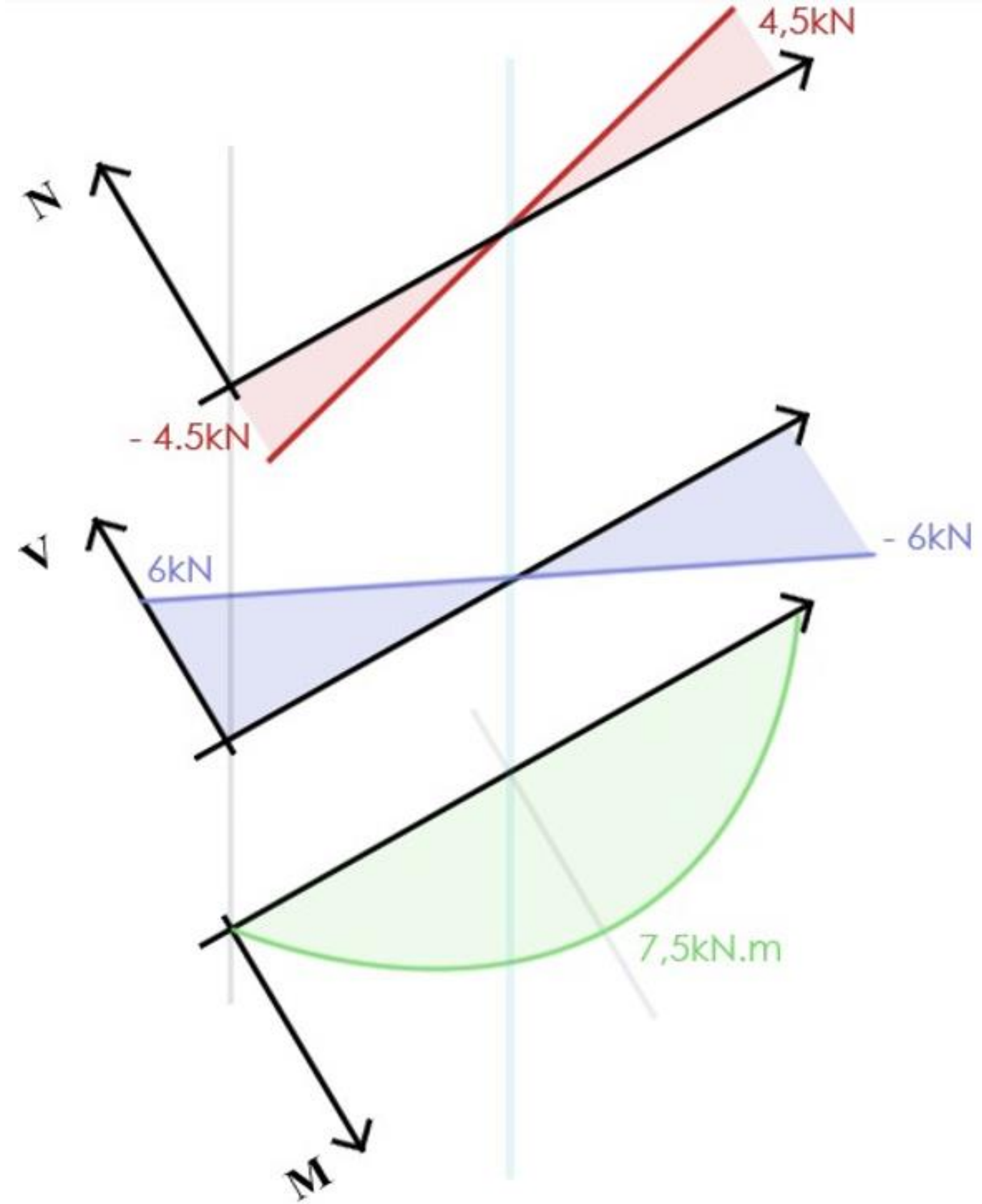
V(x)= (12 – 2,4x) – 6 = 6 – 2,4x

4. DIAGRAMAS DOS ESFORÇOS SOLICITANTES

- **N(x) = - 4,5 + 1,8x**
  - N(0) = -4,5 kN
  - N(5) = 4,5 kN

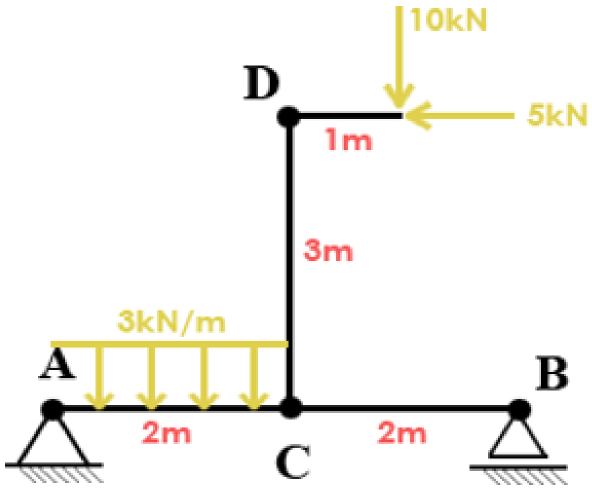
- **V(x) = 6 – 2,4x** ○
  V(0) = 6 kN ○
  V(5) = - 6 kN

- **M(x) = 6x – 1,2x²**
  - M(0) = 0
  - M(5/2) = 7,5 kN.m
  - M(5) = 0

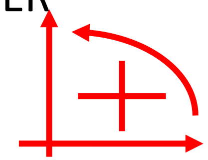


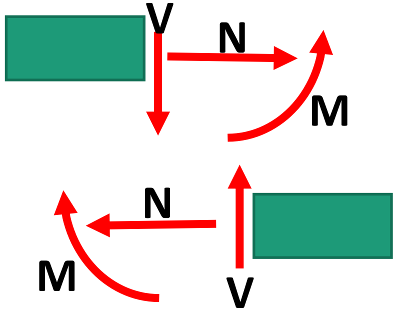
EXERCÍCIO 10.

Determinar as reações dos apoios e esboçar o diagrama dos esforços solicitantes na viga poligonal



A (articulação fixa)
B (articulação móvel)
C, D (engastamentos)



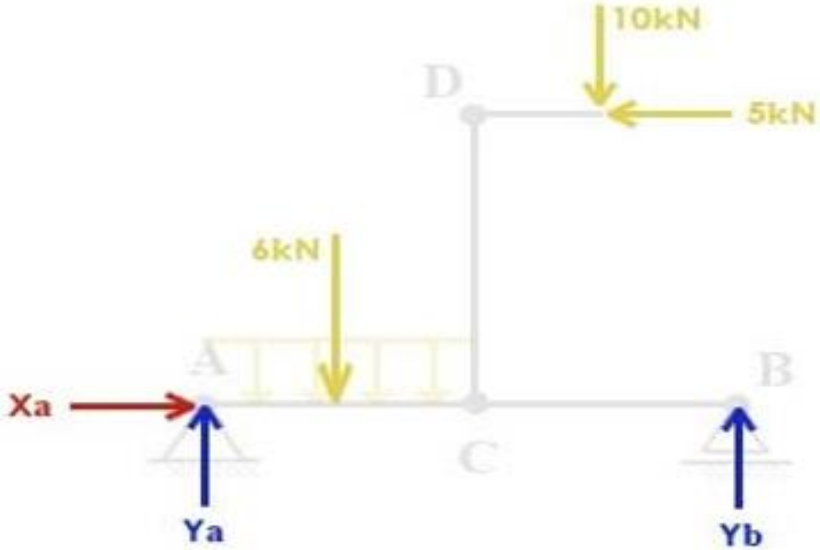


1. REAÇÕES NOS APOIOS

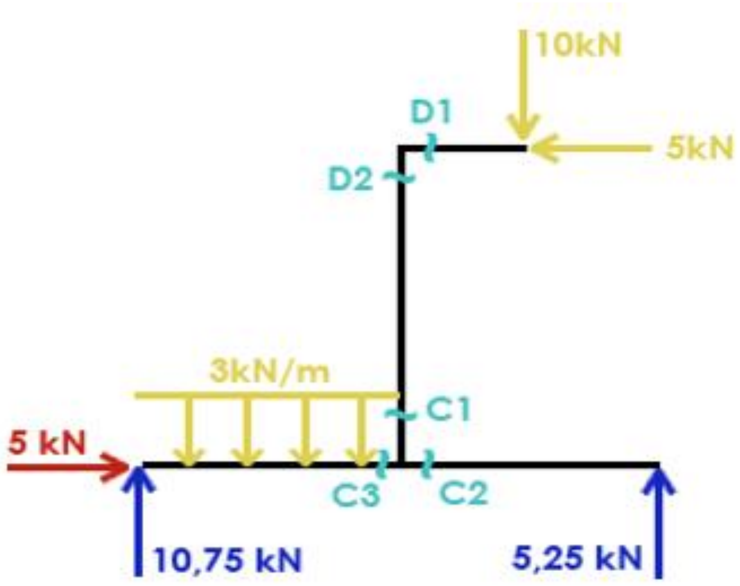
- $\Sigma F_H = 0 = Xa - 5$
  $\Rightarrow$ **Xa = 5 kN**

- $\Sigma M_{(A)} = 0 = -6*1 - 10*3 + 4Yb + 5*3$
  $\Rightarrow$ **Yb = 5,25 kN**

- $\Sigma M_{(B)} = 0 = -4Ya + 6*3 + 10*1 + 5*3$
  $\Rightarrow$ **Ya = 10,75 kN**

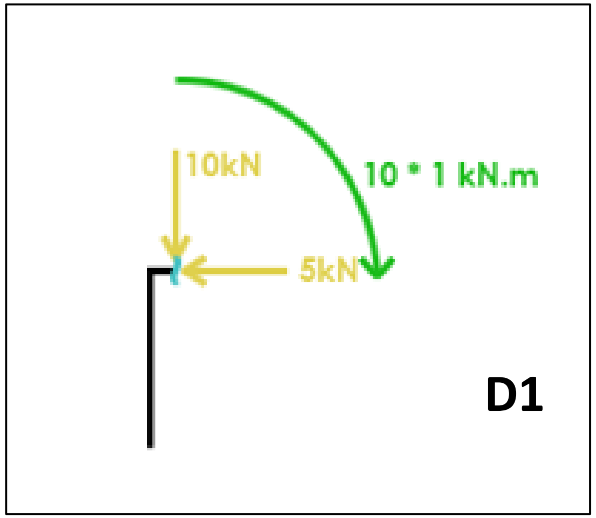


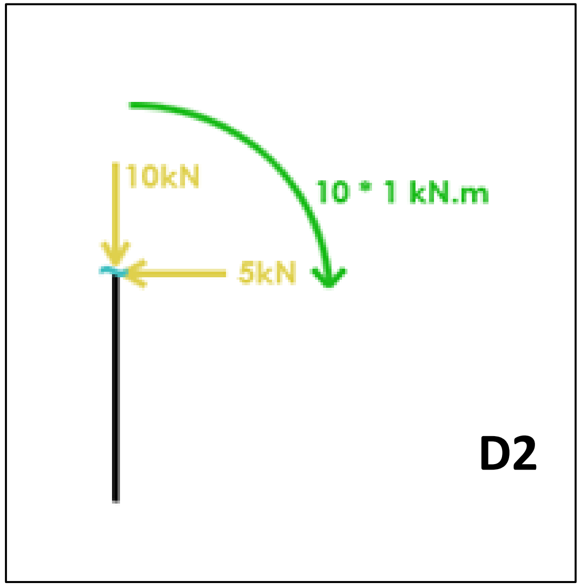
2. DIAGRAMA DO CORPO LIVRE



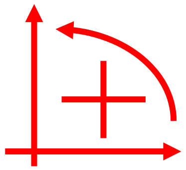
A (articulação fixa)
B (articulação móvel)
C, D (engastamentos)

3. SEÇÃO D1 E SEÇÃO D2

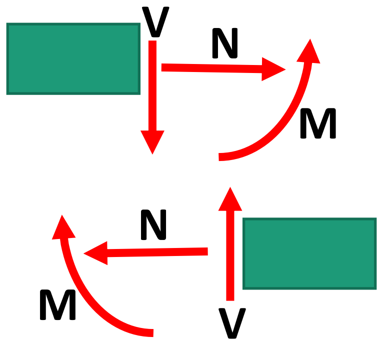




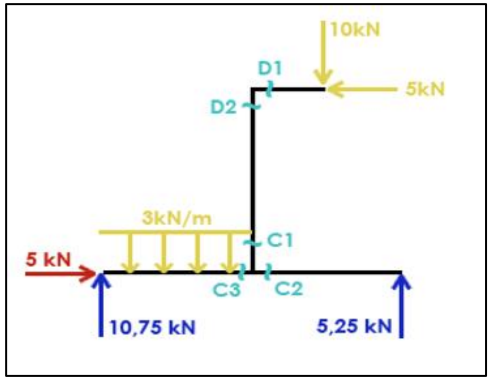
Convenção para o equilíbrio: GRINTER

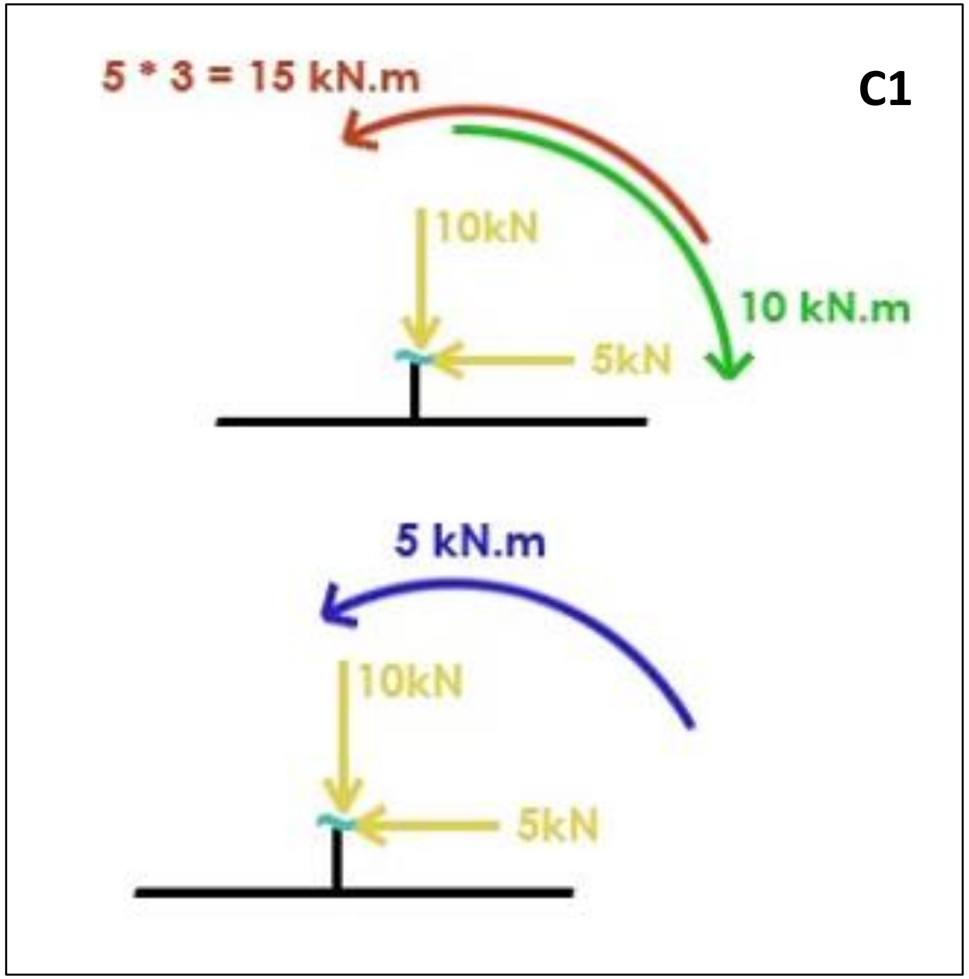


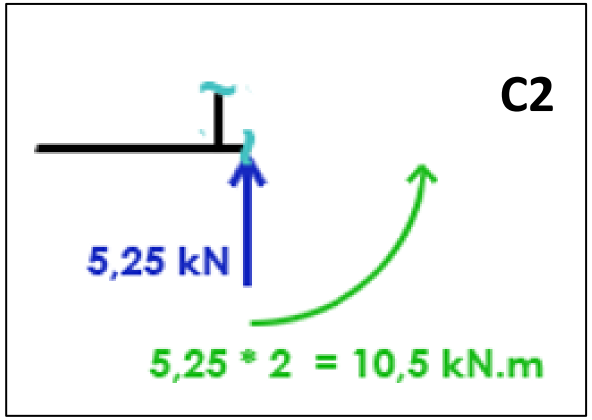
Convenção para esforços solicitantes: +

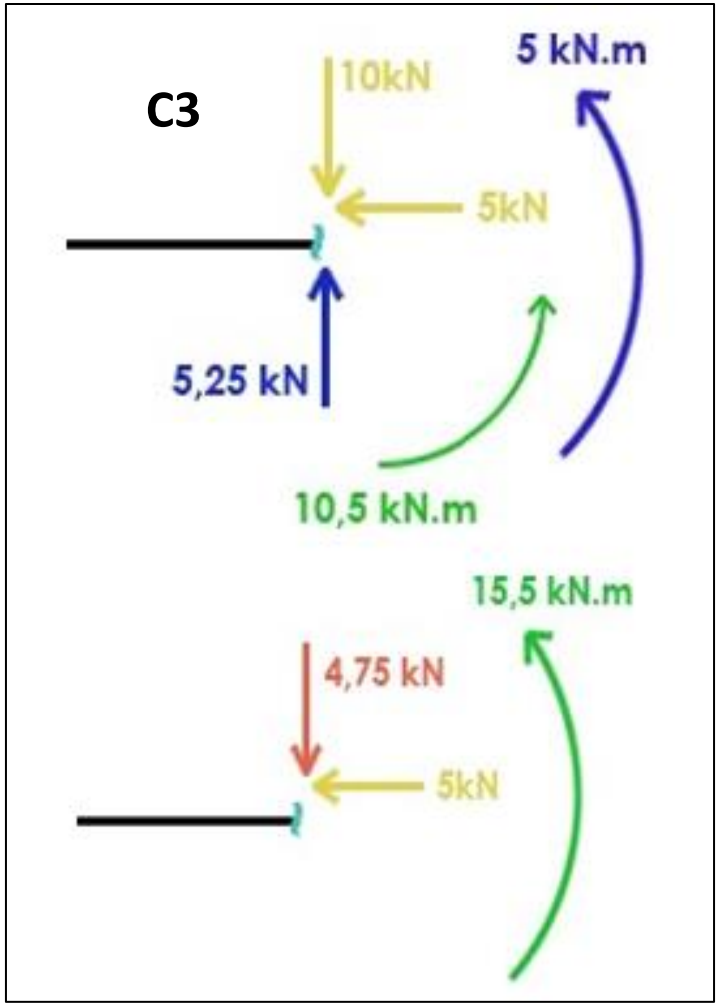


4. SEÇÃO C1, SEÇÃO C2 E SEÇÃO C3

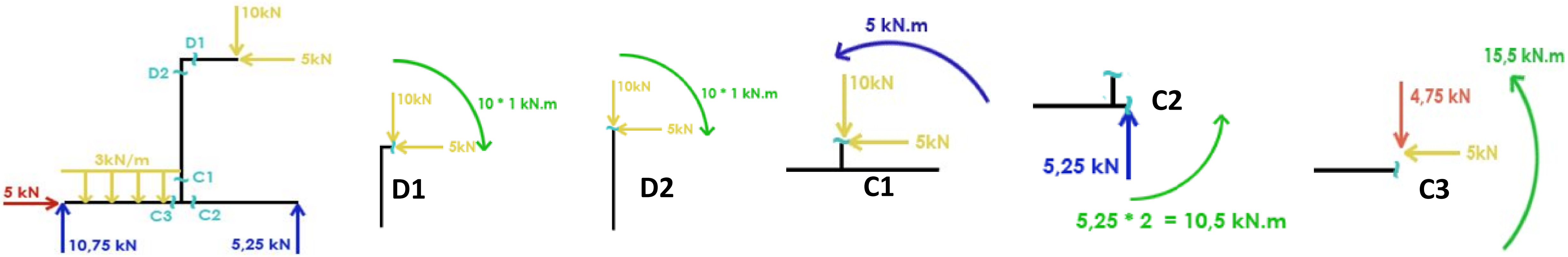




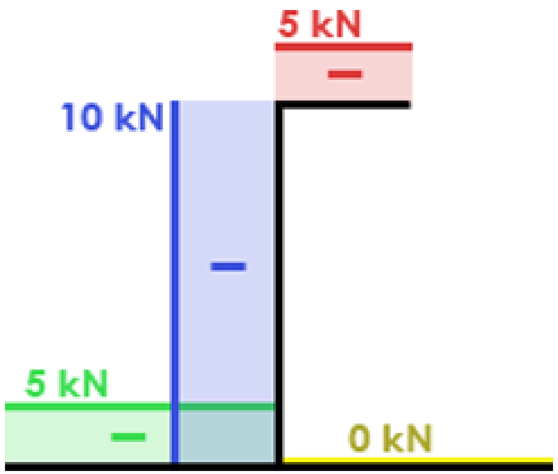




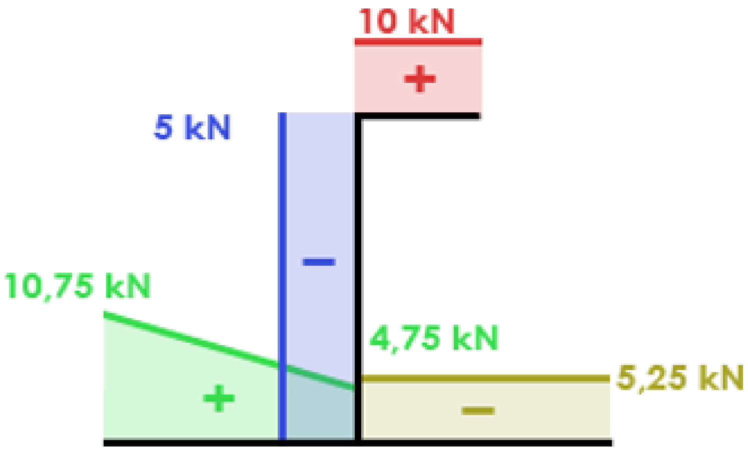
5. DIAGRAMAS DOS ESFORÇOS SOLICITANTES



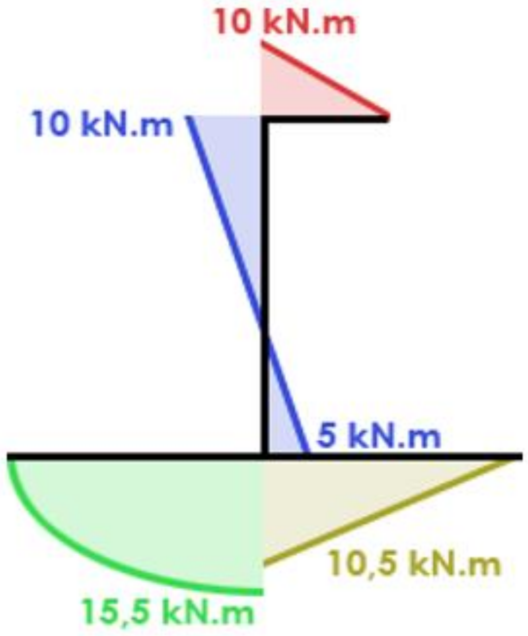
Normal:



Cortante:

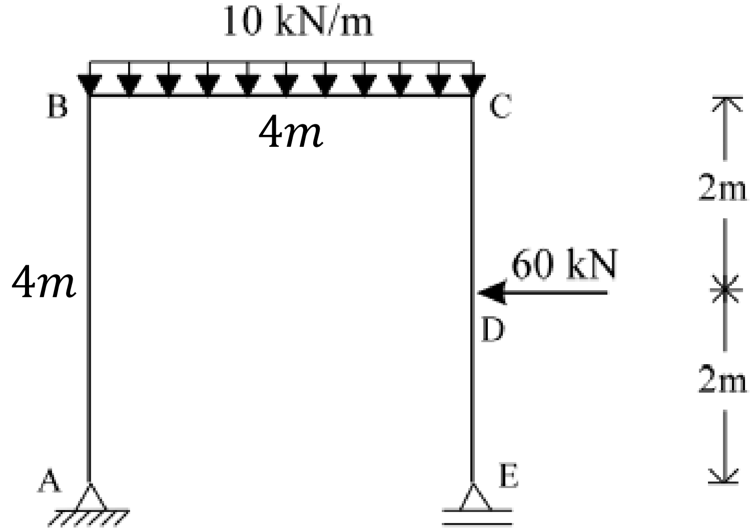


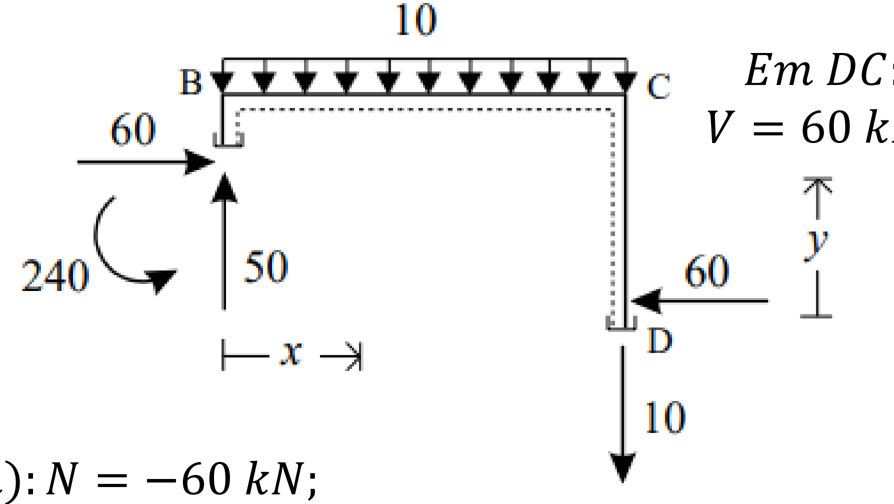
Momento fletor:



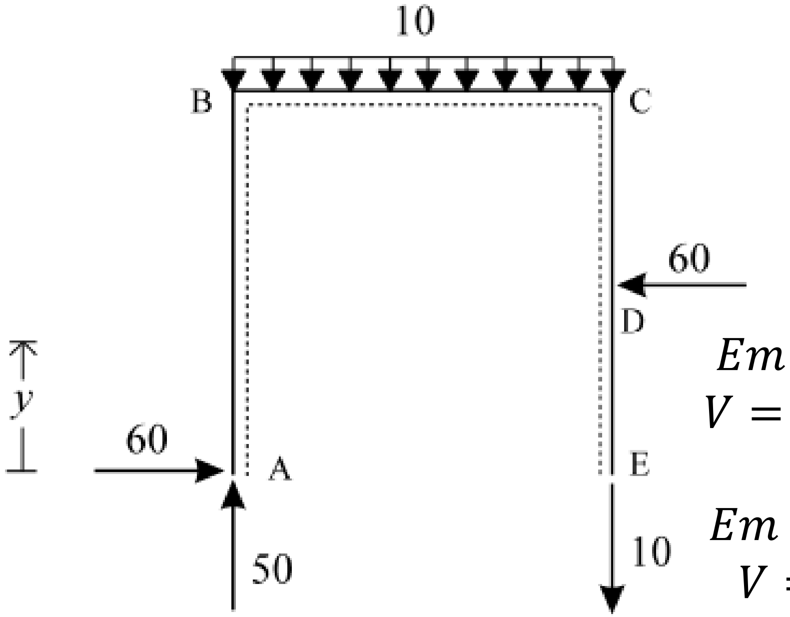
EXERCÍCIO 11.

Esboçar o diagrama dos esforços solicitantes da viga poligonal da figura sabendo que as reações nos apoios A e E são X_A= 60kN, Y_A= 50kN, Y_B= -10kN.





$$Em\ DC: N = 10\ kN;$$
$$V = 60\ kN; M = -60y.$$

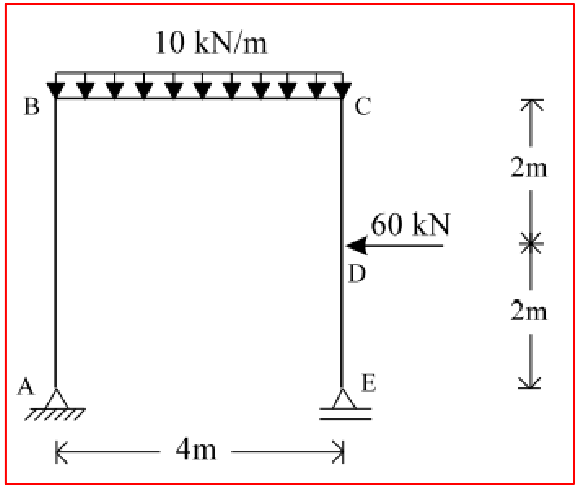


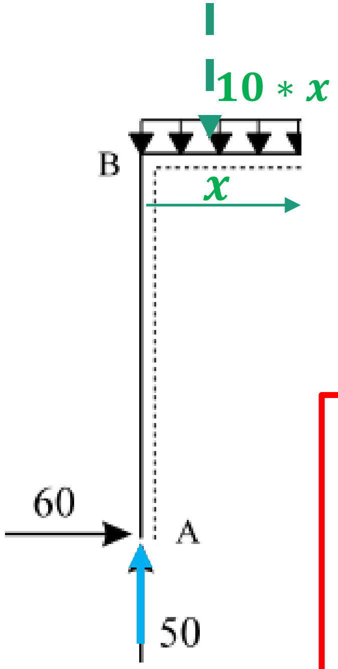
$$Em\ BC\ (4m): N = -60\ kN;$$
$$V = (50 - 10x)kN;$$
$$M = \left(-240 + 50x - 10x\frac{x}{2}\right)kNm$$

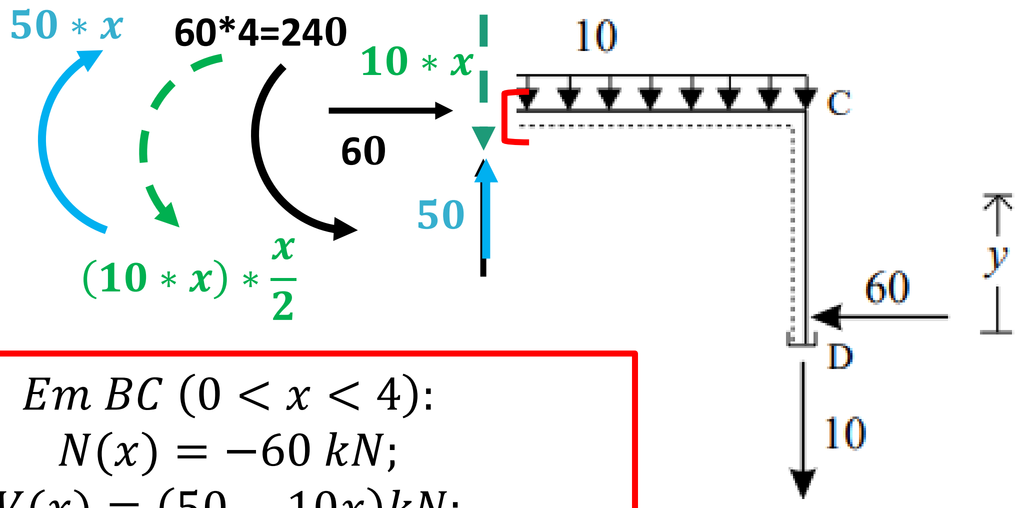
$$Em\ AB: N = -50\ kN;$$
$$V = -60\ kN; M = 60y$$

$$Em\ DE: N = 10\ kN;$$
$$V = 0\ kN; M = 0$$

$$Em\ BC: N_B = -60\ kN; N_C = -60\ kN$$
$$V_B = +50\ kN; V_C = +10\ kN$$
$$M_B = -240\ kNm; M_C = -120\ kNm$$

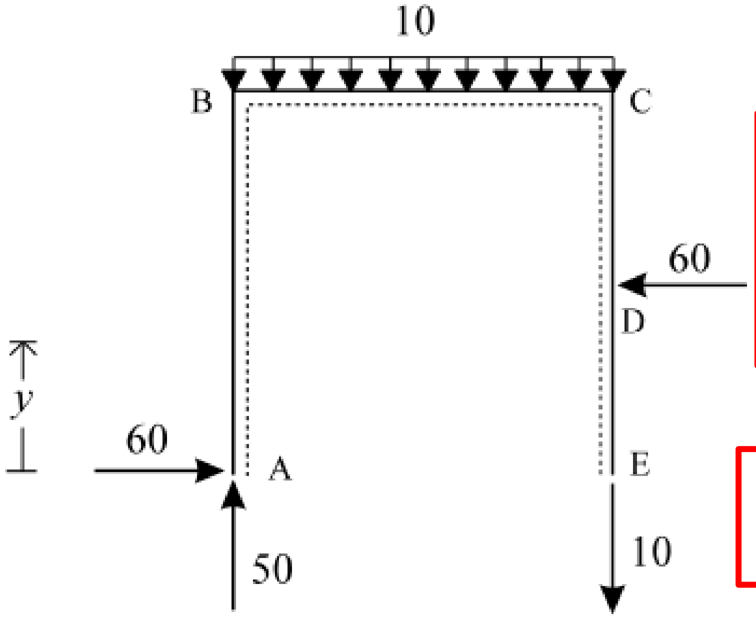






$$Em\ BC\ (0 < x < 4):$$
$$N(x) = -60\ kN;$$
$$V(x) = (50 - 10x)kN;$$
$$M(x) = \left(-240 + 50x - 10x\frac{x}{2}\right) kNm$$

$$Em\ DC\ (0 < y < 2):$$
$$N(x) = 10\ kN;$$
$$V(x) = 60\ kN;$$
$$M(x) = -60y.$$



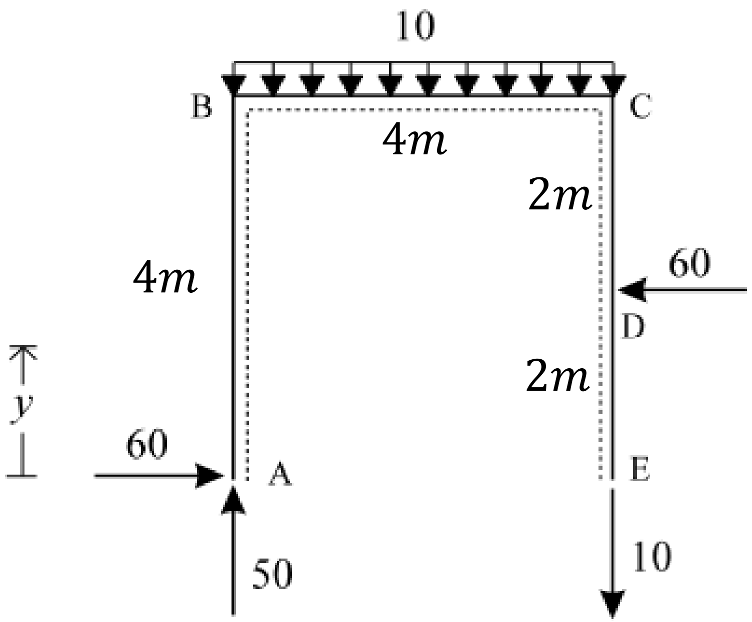
$$Em\ AB (0 < y < 4):$$
$$N(x) = -50\ kN;$$
$$V(x) = -60\ kN;$$
$$M(x) = 60y\ kNm$$

$$Em\ DE: N = 10\ kN;$$
$$V = 0; M = 0$$

$$Em\ BC: N_B = -60\ kN; N_C = -60\ kN$$
$$V_B = +50\ kN; V_C = +10\ kN$$
$$M_B = -240\ kNm; M_C = -120\ kNm$$

EXERCÍCIO 12.

Esboçar o diagrama dos esforços solicitantes da viga poligonal da figura

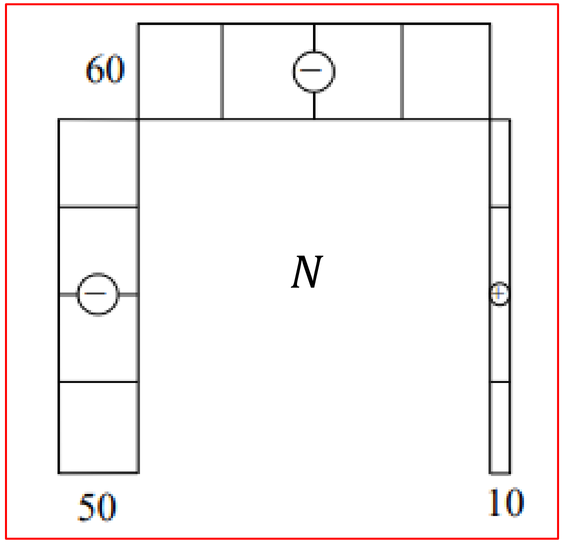


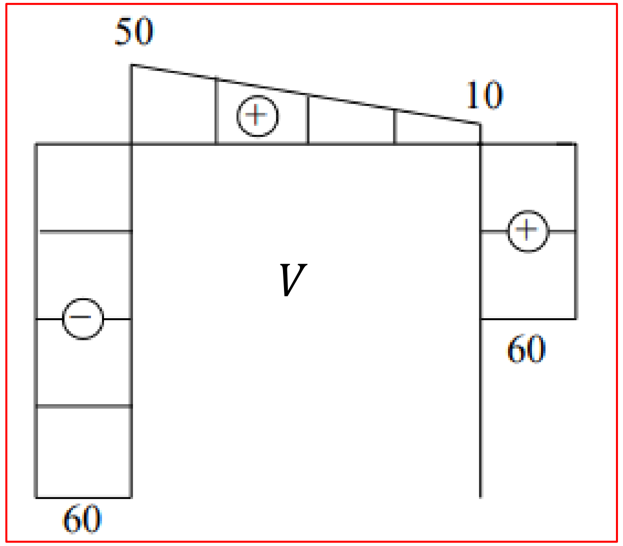
$$Em\ AB: N_A = N_B = -50\ kN;$$
$$V_A = V_B = -60\ kN;$$
$$M_A = 0; M_B = -240\ kNm$$

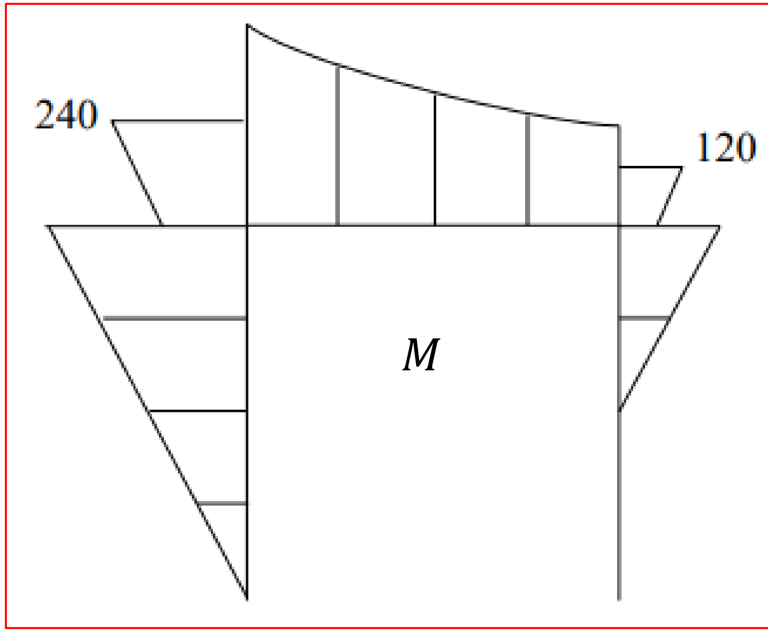
$$Em\ BC: N_B = N_C = -60\ kN$$
$$V_B = +50\ kN; V_C = +10\ kN$$
$$M_B = -240\ kNm; M_C = -120\ kNm$$

$$Em\ DC: N_D = N_C = +10\ kN;$$
$$V_D = V_C = +60\ kN\ ;$$
$$M_D = 0; M_C = -120 kNm.$$

$$Em\ ED: N_E = N_D = 10\ kN;$$
$$V_E = V_D = 0;$$
$$M_E = M_D = 0$$







EXERCÍCIO 13.
P1-2020

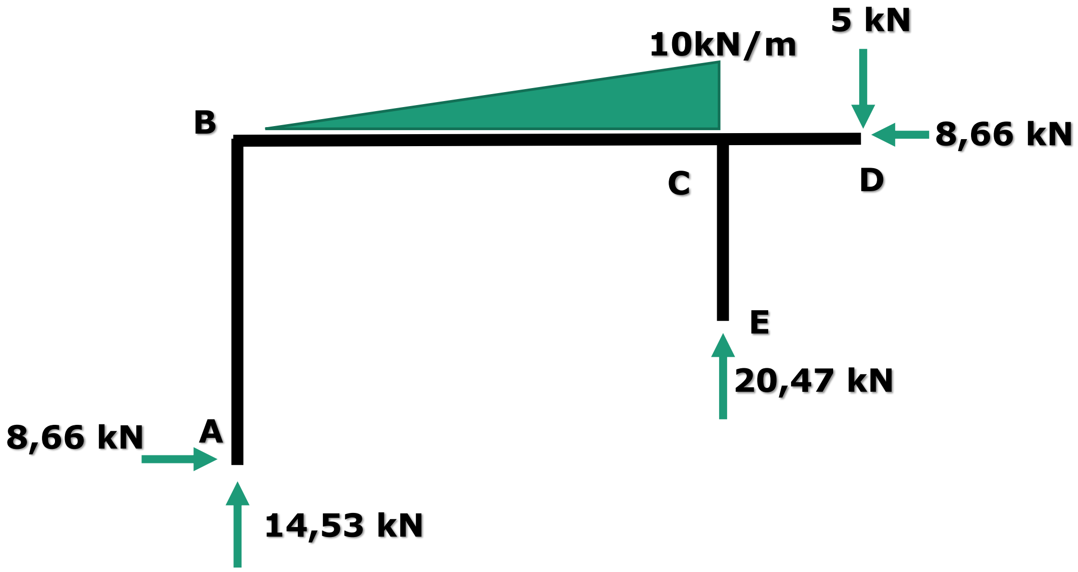
1. REAÇÕES NOS APOIOS

$$\sum X = 0 = X_A - 5\sqrt{3} \Rightarrow X_A = 5\sqrt{3} = 8{,}66$$

$$\sum M_{(A)} = 0 = -30 * 4 - 5 * 7{,}5 + 5\sqrt{3} * 4 + Y_E * 6 \Rightarrow Y_E = 20{,}47$$

$$\sum Y = 0 = Y_A - 30 - 5 + Y_E \Rightarrow Y_A = 14{,}53$$

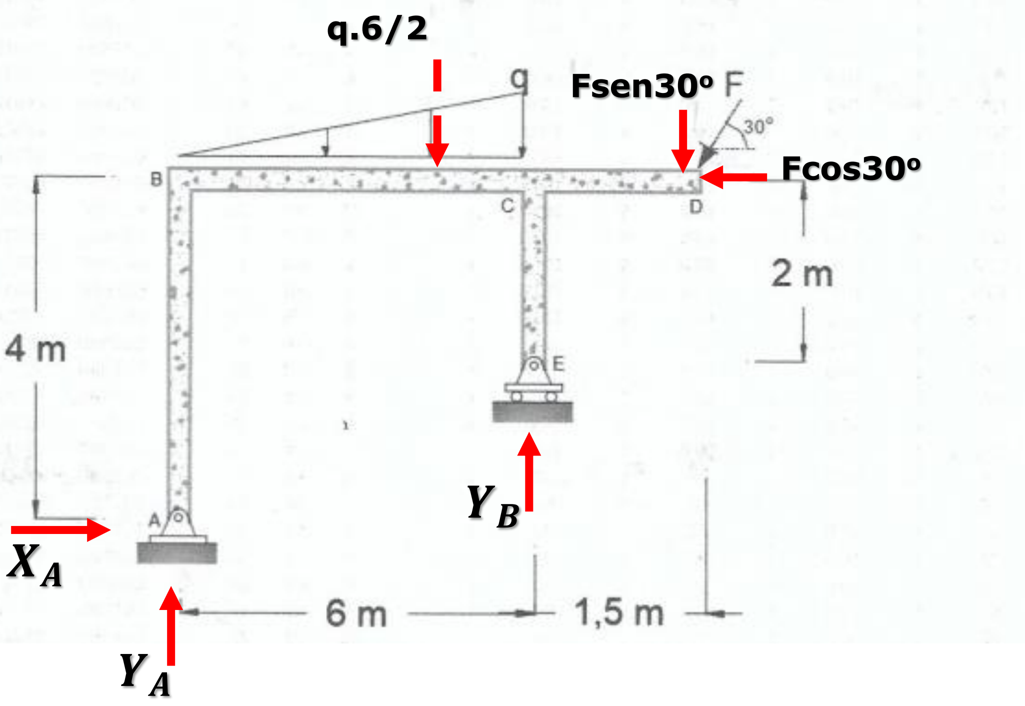
2. DIAGRAMA DO CORPO LIVRE



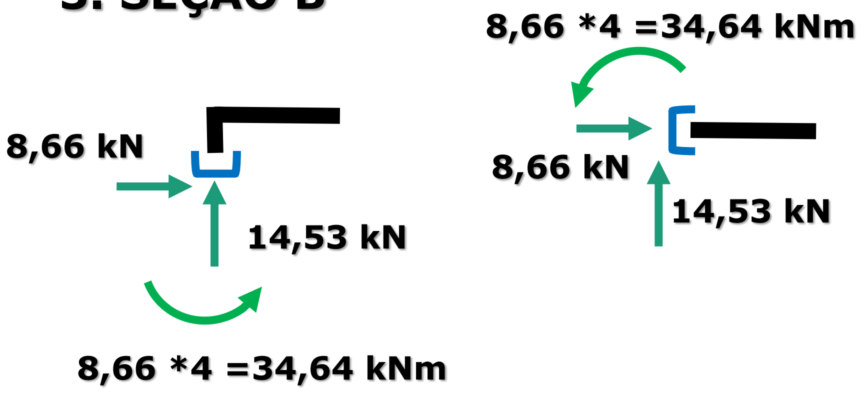
PEF-3200 – 1ª Prova – 27/5/2020

Nº USP:______________ Nome:______________________________

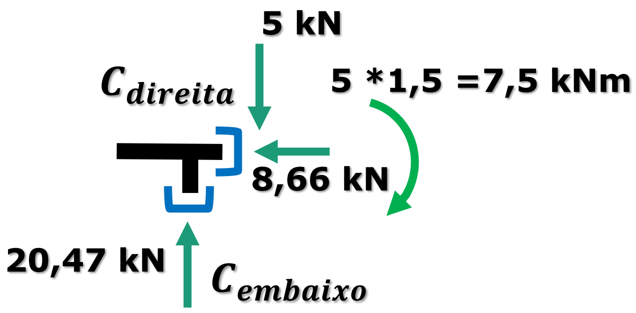
2ª Questão(pontos) Para a estrutura a seguir, sabendo que F = 10 kN e q = 10 kN/m, obtenha os diagramas de esforços solicitantes em todos os trechos, indicando os valores e posições dos extremos dos esforços em cada trecho.

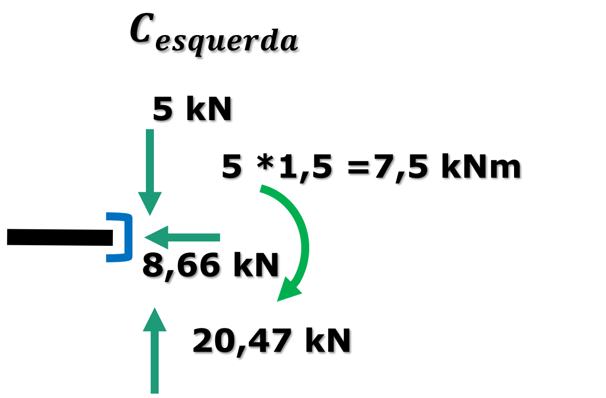


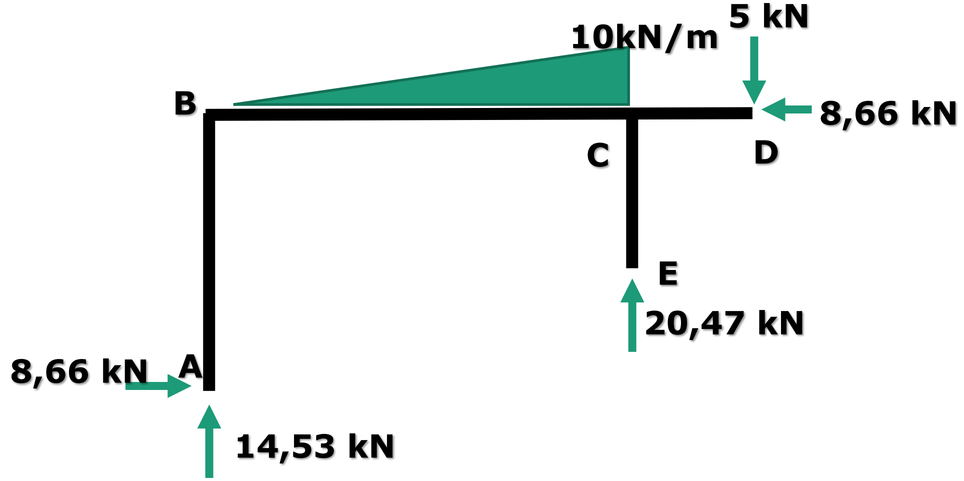
3. SEÇÃO B



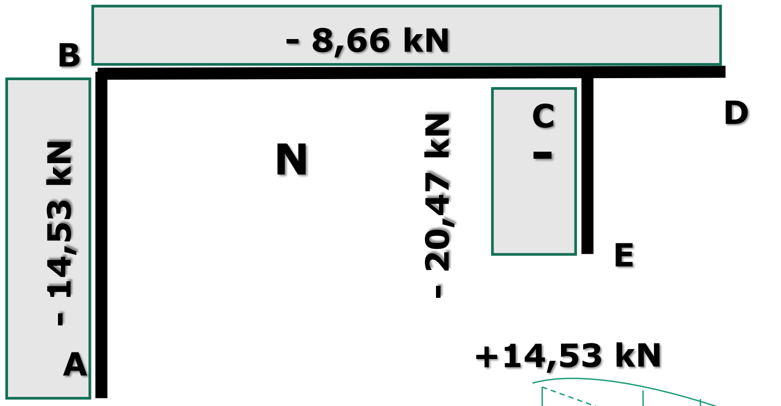
4. SEÇÃO C

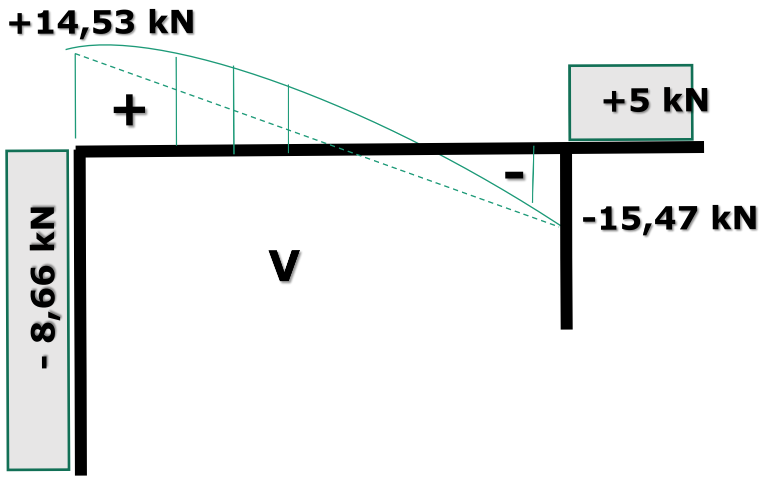


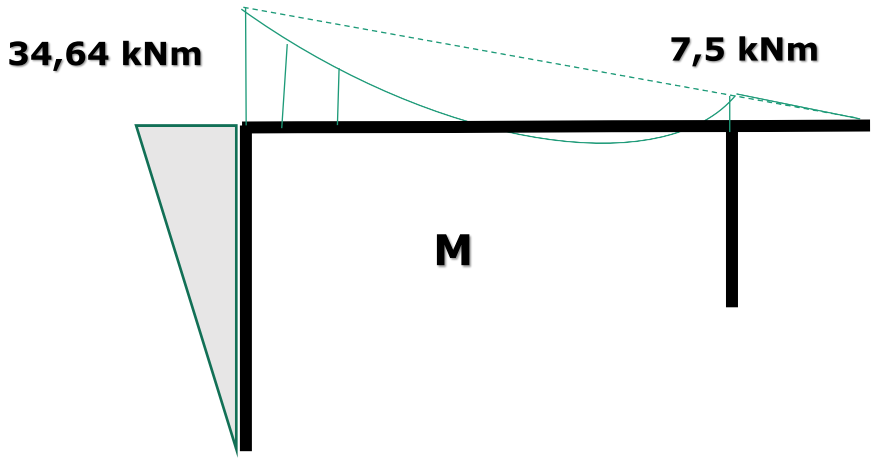




5. DIAGRAMAS DOS ESFORÇOS SOLICITANTES







TAREFA

Determinar os diagramas de esforços solicitantes