MAT0111 - Cálculo Diferencial e Integral I – 2023

Lista 3

1. Mostre que a equação $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ possui pelo menos uma solução real e localize tal solução em um intervalo de comprimento 1.

2. Mostre que a equação $x^3 - 6x^2 + 3x + 4 = 0$ possui três soluções distintas.

3. Existe algum número real que é uma unidade maior que seu cubo?

4. Em cada caso, verifique se f é derivável no ponto x_0. Decida também (justificando) se f é contínua ou não.

   (a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x}{\sqrt{x-1}}, & \text{se } x > 1, \\ 1, & \text{se } x \leq 1. \end{cases} \qquad x_0 = 1.$

   (b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + \operatorname{sen} x, & \text{se } x > 0, \\ x^5 + 4x^3, & \text{se } x < 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases} \qquad x_0 = 0.$

   (c) $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases} \qquad x_0 = 0.$

5. Encontre a derivada das funções abaixo.

   (a) $f(x) = 5x - 1$;

   (b) $f(x) = x^2 + 3x - 4$;

   (c) $g(x) = 5x^8 - 2x^5 + 6$;

   (d) $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$;

   (e) $R(x) = \dfrac{\sqrt{10}}{x^7}$;

   (f) $y = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x}}$;

   (g) $y = 4\pi^2$;

   (h) $u = \sqrt[3]{t^2} + 2\sqrt{t^3}$;

   (i) $v = x\sqrt{x} + \dfrac{1}{x^2\sqrt{x}}$;

   (j) $y = \operatorname{cossec} x \operatorname{tg} x$;

   (k) $F(x) = (x^2 - x + 1)^3$;

   (l) $y = 4 \sec 5x$;

   (m) $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{2z - 1}}$;

   (n) $y = \operatorname{tg} \sqrt{\operatorname{sen} x}$;

   (o) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$;

   (p) $h(x) = \dfrac{2x^3 + 1}{x + 2}$;

   (q) $y = x \operatorname{sen}\left(\sqrt{x^5} - x^2\right)$;

   (r) $y = \sqrt{x \operatorname{tg}^2 x}$;

   (s) $f(\theta) = \dfrac{\sqrt{\theta} + \operatorname{cossec} \theta}{\theta^3 + 3\theta^2}$;

   (t) $y = \dfrac{x^2 \operatorname{tg} x}{\sec x}$;

   (u) $f(z) = z \operatorname{sen} z \cos z$;

   (v) $s(t) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(t - \operatorname{sen} t)}$;

   (w) $f(x) = \dfrac{2x}{(x + \sqrt{x})^{\frac{1}{3}}}$;

   (x) $h(t) = \operatorname{tg}(3t^2 + 5)$;

   (y) $f(u) = \dfrac{u^2}{\operatorname{sen} u \cos u}$;

   (z) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x} \operatorname{sen} x}{x^2 \cos x^2}$;

6. Discuta as "soluções" abaixo para o problema: "Considere a função $f(x) = x|x|$. Decida se f é derivável em $x = 0$ e, em caso afirmativo, calcule $f'(0)$. Justifique suas afirmações."

   "Solução" 1. $f'(0) = 0$, pois $f(0) = 0$.

   "Solução" 2. Como a função $g(x) = |x|$ não é derivável em $x = 0$, não é possível usar a regra do produto para derivar f em $x = 0$. Logo, f não é derivável em $x = 0$.

"Solução" 3. Temos $f(x) = h(x)g(x)$, onde $h(x) = x$ e $g(x) = |x|$. Assim:

$$f'(0) = h'(0)g(0) + h(0)g'(0);$$

como $g(0) = 0$ e $h(0) = 0$ então $f'(0) = 0$.

"Solução" 4. Temos

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{se } x < 0; \\ x^2, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Logo,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

e

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} -x = 0.$$

Portanto, $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$, ou seja, $f'(0) = 0$.

7. Sejam f e g funções deriváveis em $\mathbb{R}$ tais que $f(g(x)) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Sabendo que $f'(1) = 2$ e $g(0) = 1$, calcule $g'(0)$.

8. Sabe-se que r é uma reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^3 + 3x$ e paralela à reta $y = 6x - 1$. Determine r.

9. Determine a equação da reta que é perpendicular à reta $2y + x = 3$ e tangente ao gráfico de $f(x) = x^2 - 3x$.

10. A reta s passa pelo ponto $(3, 0)$ e é normal ao gráfico de $f(x) = x^2$ no ponto (a, b). Determine (a, b) e a equação de s.

11. Sabe-se que r é uma reta que passa pela origem e que é tangente ao gráfico de $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$. Determine r.