1

a) Mostre que $f(x) = \sqrt{x} - \cos x$ possui uma raiz no intervalo $[0, 1]$.
b) Prove que essa raiz é única.
c) Sem executar o método, preveja o número de iterações que o algoritmo da bissecção utilizaria para obter uma estimativa com precisão de 10^{-4}.
d) Execute o método da bissecção e encontre a raiz com precisão de 10^{-4}.

2

Seja $f(x) = (x+2)(x+1)^2 x(x-1)^3(x-2)$. Para qual raiz de f o método da bissecção vai convergir quando aplicado a cada um dos seguintes intervalos:
a) $[-1.5, 2.5]$ **b)** $[-0.5, 2.4]$ **c)** $[-0.5, 3]$ **d)** $[-3, -0.5]$

3

Encontre um valor aproximado para $\sqrt[3]{25}$ com precisão de 10^{-5} utilizando o método da bissecção.

4

Um cocho de comprimento L tem o formato de um cilindro cortado ao meio longitudinalmente. Quando cheio de água até uma distância h do topo, o volume da água é dado por

$$L\left[0.5\pi r^2 - r^2 \operatorname{arcsen}(h/r) - h\sqrt{r^2 - h^2}\right].$$

Suponha que $L = 10\text{m}$, $r = 1\text{m}$ e $V = 12.4\text{m}^3$. Encontre o valor de h com precisão de 1cm.

5

Mostre que as funções abaixo possuem um ponto fixo que é raiz de $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$:

a) $\psi_1(x) = \sqrt[4]{3 + x - 2x^2}$

b) $\psi_2(x) = \sqrt{\dfrac{x + 3 - x^4}{2}}$

c) $\psi_3(x) = \sqrt{\dfrac{x+3}{x^2+2}}$

d) $\psi_4(x) = \dfrac{3x^4 + 2x^2 + 3}{4x^3 + 4x - 1}$

6

Calcule a raiz x^* de f que está contida no intervalo $[1, 1.5]$ com precisão de 10^{-7} utilizando o método da bissecção e avalie $\psi_i'(x^*)$ para as funções de iteração da questão anterior.

Para quais dessas funções você espera que as iterações da forma $x_{k+1} = \psi_i(x_k)$ convirjam se x_0 estiver próximo de x^*?

Qual deveria convergir mais rápido? Ordene as funções pela velocidade esperada delas. Teste suas respostas rodando a iteração de ponto fixo para obter x^* com precisão de 10^{-5} partindo de $x_0 = 1$. Faça esse cálculo utilizando cada uma das funções ψ_i do exercício anterior.

7

Para c uma constante positiva dada, considere a iteração $x_{k+1} = 2x_k - cx_k^2$.

a) Mostre que se as iterações convergem para algum ponto fixo positivo ele vale $1/c$. Esta é uma forma de calcular o inverso de um número utilizando apenas produtos e diferenças.

b) Encontre um intervalo I em torno de $1/c$ para o qual o algoritmo convirja se $x_0 \in I$.

8

Note que se $A(x) \neq 0$ para todo x então todo ponto fixo da função $\psi(x) = x + A(x)f(x)$ é raiz de f e vice-versa. Se f for diferenciável em uma raiz x^* e $f'(x^*) \neq 0$, encontre $A(x)$ tal que $\psi'(x^*) = 0$.

Qual é a relevância da exigência $\psi'(x^*) = 0$?

9

Faça um gráfico justificando o nome "método da tangente", pelo qual também é conhecido o método de Newton. A partir deste gráfico chegue à fórmula para as iterações do método: $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$.

10

Utilize o método de Newton para obter um algoritmo para calcular $\sqrt[n]{a}$ utilizando apenas as operações aritméticas básicas.

11

Utilize o método de Newton para encontrar soluções, com precisão de 10^{-5}, dos seguintes problemas:

a) $e^x + 2^{-x} + 2\cos x - 6 = 0 \quad$ para $x \in [1, 2]$.

b) $\ln(x-1) + \cos(x-1) = 0 \quad$ para $x \in [1.3, 2]$.

c) $\operatorname{sen} x - e^{-x} = 0 \quad$ para $x \in [0, 1.3]$, $x \in [3, 4]$ e $x \in [6, 7]$.

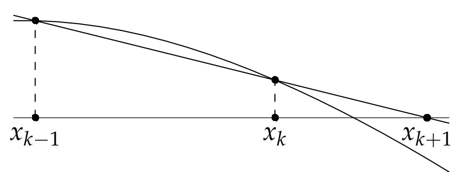
12

Utilize o método de Newton para encontrar, com precisão de 10^{-10}, o valor de x que produz o ponto na curva $y = 1/x$ mais próximo de $(2, 1)$. Utilize algum software para esta tarefa (como o Octave) e gere gráficos precisos das iterações. *Dica: minimize a função $d(x)^2$, onde $d(x)$ é a distância de $(x, 1/x)$ até $(2, 1)$.*

13

a) Na figura ao lado vemos uma iteração do método da secante. Explique o desenho e chegue à fórmula

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$



a partir da motivação geométrica.

b) Relacione geométrica e analiticamente o método da secante com o método de Newton.

c) Explique porque o método da secante pode ser mais vantajoso que o método de Newton mesmo apresentando uma ordem de convergência aproximadamente igual a 1.62, menor do que a quadrática do Método de Newton.

14

Repita o exercício 11 utilizando desta vez o método da secante.

15

Um método convergente possui ordem de convergência q quando o limite abaixo existir:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_k - x^*|}{|x_{k-1} - x^*|^q}.$$

a) Utilize esta definição para justificar a aproximação

$$q \approx \frac{\log \frac{|x_k - x^*|}{|x_{k-1} - x^*|}}{\log \frac{|x_{k-1} - x^*|}{|x_{k-2} - x^*|}}.$$

b) Utilize esta aproximação para estimar a ordem de convergência do método da secante quando aplicado ao problema de encontrar o valor de π com precisão de 10^{-14} a partir de (i) $\operatorname{sen} x = 0$ e de (ii) $1 + \cos x = 0$. Explique os resultados.

16

Mostre que a iteração do método da secante

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

pode ser escrita como

$$x_{k+1} = \frac{x_{k-1} f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \tag{i}$$

e como

$$x_{k+1} = x_{k-1} - f(x_{k-1}) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}. \tag{ii}$$

A equação (i) tende a ser menos precisa em aritmética de ponto flutuante do que as outras opções. Você pode explicar esse fenômeno?

17

Esboce o gráfico dos seguintes sistemas não-lineares e determine o número de soluções de cada um deles:

a)

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 - 9 &= 0 \\ x_1 - \operatorname{sen} x_2 &= 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x_1^2 - x_2^4 &= 0 \\ (x_1 x_2)^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

18

Um possível modelo para a dinâmica de duas espécies que competem pelo mesmo recurso pode ser dado pelo par de equações diferenciais

$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt} &= x_1(t)\big(4 - 0.0003x_1(t) - 0.0004x_2(t)\big)\\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= x_2(t)\big(2 - 0.0002x_1(t) - 0.0001x_2(t)\big).\end{aligned}$$

É interessante considerarmos as situações de equilíbrio em que $x_1'(t) = x_2'(t) = 0$, o que resulta no seguinte sistema:

$$\begin{aligned}x_1(4 - 0.0003x_1 - 0.0004x_2) &= 0\\ x_2(2 - 0.0002x_1 - 0.0001x_2) &= 0.\end{aligned}$$

Encontre todas as soluções de equilíbrio.

19

O sistema não-linear

$$\begin{aligned}-x_1(x_1+1) + 2x_2 &= 18\\ (x_1-1)^2 + (x_2-6)^2 &= 25\end{aligned}$$

tem duas soluções.

a) Aproxime as soluções graficamente.

b) Utilize estas aproximações para inicializar iterações do método do ponto fixo $\boldsymbol{x}^k = \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x}^{k-1})$ com funções de iteração $\boldsymbol{\Psi}$ apropriadas e encontre as soluções com precisão de $\|\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}^{k-1}\|_\infty \le 10^{-5}$.

c) Calcule $\|J\boldsymbol{\psi}\|_1$ e $\|J\boldsymbol{\psi}\|_\infty$ em ambas as soluções.

20

Considere o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} &= 0\\ x_1^2 - 81(x_2+0.1)^2 + \operatorname{sen} x_3 + 1.06 &= 0\\ e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} &= 0.\end{aligned}$$

Ele pode ser rearranjado da seguinte forma

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{3}\cos(x_2x_3) + \frac{1}{6} \\
x_2 &= \frac{1}{9}\sqrt{x_1^2 + \operatorname{sen} x_3 + 1.06} - 0.1 \\
x_3 &= -\frac{1}{20}e^{-x_1x_2} - \frac{10\pi - 3}{60}.
\end{aligned}$$

Mostre que se $x_i \in [-1,1]$ para $i = 1,2,3$ então $\|J\boldsymbol{\Psi}(x_1,x_2,x_3)\|_\infty < 1$. Portanto, se existe uma raiz no conjunto $\{(x_1,x_2,x_3) : x_i \in [-1,1]\}$ a iteração de ponto fixo convergirá para ela. Utilize o algoritmo para encontrar a solução com precisão de 10^{-5}, utilizando critério de erro absoluto e a norma $\|\cdot\|_\infty$.

21

Cada iteração do método de Newton para resolver um sistema $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ consiste de duas etapas: primeiro encontre a solução de $\mathrm{J}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^{(k)})\boldsymbol{s}^{(k)} = -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^{(k)})$ e depois faça $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{s}^{(k)}$.

Mostre que esse algoritmo satisfaz $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{x}^{(k)}}(\boldsymbol{x}^{(k+1)}) = \mathbf{0}$ onde $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{x}^{(k)}}$ é o polinômio de Taylor de grau 1 em torno de $\boldsymbol{x}^{(k)}$:

$$\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{x}^{(k)}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^{(k)}) + \mathrm{J}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^{(k)})\left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{(k)}\right).$$

22

Utilize o método de Newton com $\boldsymbol{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ para calcular $\boldsymbol{x}^{(2)}$ (a segunda iteração) para cada um dos seguintes problemas:

a)

$$\begin{aligned}
4x_1^2 - 20x_1 + \frac{1}{4}x_2^2 + 8 &= 0 \\
\frac{1}{2}x_1x_2^2 + 2x_1 - 5x_2 + 8 &= 0
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} &= 0 \\
4x_1^2 - 625x_2^2 + 2x_2 - 1 &= 0 \\
e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} &= 0
\end{aligned}$$