Sistemas de Equações Lineares

Parte I: definição, propriedades e sistemas triangulares

Elias S. Helou Neto

Sistemas de Equações Lineares
Definição

Um sistemas de equações lineares é uma coleção de equações da forma

$$a_{1,1}x_1 \quad + \quad a_{1,2}x_2 \quad + \quad \cdots \quad + \quad a_{1,n}x_n \quad = \quad b_1$$

Sistemas de Equações Lineares

Definição

Um sistemas de equações lineares é uma coleção de equações da forma

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \end{array}$$

Sistemas de Equações Lineares

Definição

Um sistemas de equações lineares é uma coleção de equações da forma

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\
a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\
a_{3,1}x_1 & + & a_{3,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{3,n}x_n & = & b_3
\end{array}
$$

Sistemas de Equações Lineares

Definição

Um sistemas de equações lineares é uma coleção de equações da forma

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\
a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\
a_{3,1}x_1 & + & a_{3,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{3,n}x_n & = & b_3 \\
 & & & & & & & \vdots & \\
a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m
\end{array}
$$

Sistemas de Equações Lineares

Definição

Um sistemas de equações lineares é uma coleção de equações da forma

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\
a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\
a_{3,1}x_1 & + & a_{3,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{3,n}x_n & = & b_3 \\
 & & & & & & & \vdots & \\
a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m
\end{array}$$

onde:

- os termos $a_{ij} \in \mathbb{R}$ e $b_i \in \mathbb{R}$ com $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$ são dados

Sistemas de Equações Lineares

Definição

Um sistemas de equações lineares é uma coleção de equações da forma

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\
a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\
a_{3,1}x_1 & + & a_{3,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{3,n}x_n & = & b_3 \\
 & & & & & & & \vdots & \\
a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m
\end{array}
$$

onde:

- os termos $a_{ij} \in \mathbb{R}$ e $b_i \in \mathbb{R}$ com $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$ são dados
- desejamos os números $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ que satisfaçam as igualdades

Sistemas de Equações Lineares

Definição

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ a_{3,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ a_{3,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} a_{1,3} \\ a_{2,3} \\ a_{3,3} \\ \vdots \\ a_{m,3} \end{bmatrix} x_3 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ a_{3,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Sistemas de Equações Lineares

Definição

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Sistemas de Equações Lineares
Definição

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

Sistemas de Equações Lineares

Definição

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ e $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

$$\boldsymbol{A x} = \boldsymbol{b},$$

onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ e $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

Consideraremos sistemas quadrados, ou seja, onde $m = n$.

Sistemas de Equações Lineares

Propriedade

Um sistema de equações lineares possui uma, nenhuma ou infinitas soluções.

Sistemas de Equações Lineares

Propriedade

Um sistema de equações lineares possui uma, nenhuma ou infinitas soluções.

Prova: Suponha que haja um número finito de soluções maior do que um e escolha duas delas: $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$. Então para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ distinto, $\alpha\boldsymbol{x} + (1 - \alpha)\boldsymbol{y}$ é uma nova solução do sistema.

Sistemas Triangulares
Definição

Uma matriz $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é dita triangular superior quando é da forma

$$U = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & \cdots & u_{1,n} \\ & u_{2,2} & u_{2,3} & \cdots & u_{2,n} \\ & & u_{3,3} & \cdots & u_{3,n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & u_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Nesta notação, espaços em branco significam que os coeficientes correspondentes da matriz valem 0.

Sistemas Triangulares

Definição

Uma matriz $\mathbb{R}^{m \times n} \ni U = [u_{i,j}]$ é *triangular superior* quando $j < i \Rightarrow u_{i,j} = 0$. Se um sistema linear tem uma matriz associada triangular superior, tal sistema também e dito triangular superior.

Sistemas Triangulares

Definição

Uma matriz $\mathbb{R}^{m \times n} \ni U = [u_{i,j}]$ é *triangular superior* quando $j < i \Rightarrow u_{i,j} = 0$. Se um sistema linear tem uma matriz associada triangular superior, tal sistema também e dito triangular superior.

De forma semelhante, um sistema é *triangular inferior* quando sua matriz $\mathbb{R}^{m \times n} \ni L = [l_{i,j}]$ for triangular inferior, ou seja, se $j > i$ implicar em $l_{i,j} = 0$.

Observe que, se $u_{i,i} \neq 0$, rearranjando

$$\sum_{j=1}^{n} u_{i,j} x_j = b_i$$

temos

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} u_{i,j} x_j - \sum_{j=i+1}^{n} u_{i,j} x_j}{u_{i,i}} = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{i,j} x_j}{u_{i,i}}$$

Sistemas Triangulares

Solução

Basta, portanto, se todos $u_{i,i} \neq 0$, aplicar

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{i,j} x_j}{u_{i,i}}$$

sucessivamente para $i = n, n-1, n-2, \ldots, 1$.