Iteração de Ponto Fixo

Parte III: aplicação

Elias S. Helou Neto

Considere um ponto $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2)^T \in \mathbb{R}^2$ e uma curva

$$\Gamma = \{\boldsymbol{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))^T : t \in \mathbb{R}\}.$$

Determine numericamente o ponto de Γ mais próximo de $\boldsymbol{p}$.

Lembre-se que o problema

$$f(x) = 0$$

possui inúmeras aplicações e note que se $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $A(x) \neq 0$ para todo x, então

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow A(x)f(x) + x = x.$$

Ponto Fixo

Raízes de Funções

Portanto, definindo

$$\phi(x) = A(x)f(x) + x$$

convertemos o problema de encontrar uma raiz em um de ponto fixo

$$x = \phi(x).$$

Ponto Fixo

Raízes de Funções

Com $\phi(x) = A(x)f(x) + x$ temos

$$\phi'(x) = A'(x)f(x) + A(x)f'(x) + 1.$$

Mas, para um ponto fixo $x^* = \phi(x^*)$, temos $f(x^*) = 0$, logo

$$\phi'(x^*) = A(x^*)f'(x^*) + 1.$$

Ponto Fixo

Raízes de Funções

Mas

$$\phi'(x^*) = A(x^*)f'(x^*) + 1$$

significa que

$$\phi'(x^*) = 0 \Leftrightarrow A(x^*) = -\frac{1}{f'(x^*)}.$$

Essa igualdade é satisfeita com $A(x) = -1/f'(x)$ e, portanto,

$$\phi(x) = A(x)f(x) + x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$