Iteração de Ponto Fixo

Parte II: convergência

Elias S. Helou Neto

Quando a sequência gerada por

$$x_{k+1} = \phi(x_k)$$

convergirá para um ponto fixo de ϕ?

Resposta: teorema do ponto fixo de Banach.

Ponto Fixo
Convergência

Quando a sequência gerada por

$$x_{k+1} = \phi(x_k)$$

convergirá para um ponto fixo de ϕ?

Resposta: teorema do ponto fixo de Banach.

Mas podemos adotar uma abordagem mais concreta e elementar.

Ponto Fixo

O teorema do valor médio garante que se ϕ for diferenciável então

$$\phi(y) - \phi(x) = \phi'(\tilde{y})(y - x),$$

onde $\tilde{y} \in (x, y)$.

Note que acima podemos utilizar $y = x_k$ obtendo

$$|\phi(x_k) - \phi(x)| = |\phi'(\tilde{x}_k)||x_k - x|,$$

ou seja, supondo ainda que x é ponto fixo de ϕ,

$$|x_{k+1} - x| = |\phi'(\tilde{x}_k)||x_k - x|.$$

Ponto Fixo

Convergência

Suponhamos que:

- A derivada ϕ' é contínua
- x é ponto fixo com $|\phi'(x)| < 1$
- x_0 está suficientemente próximo de x

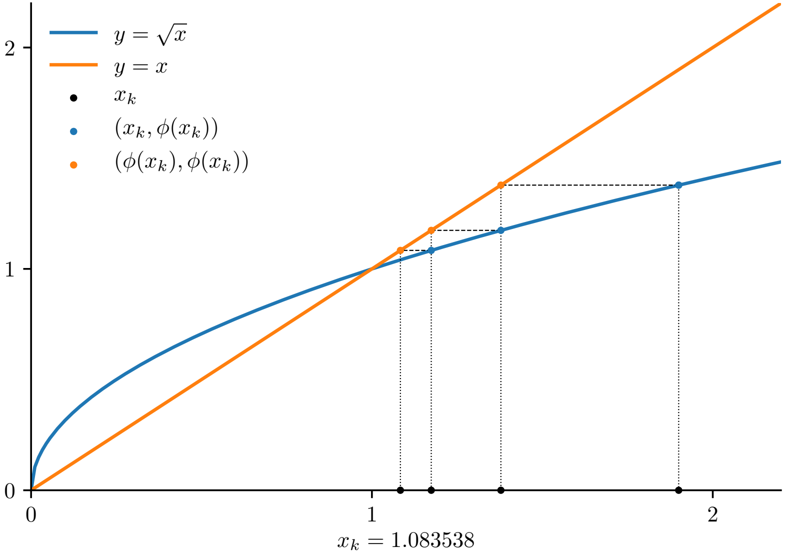
então

$$x_k \to x.$$

Exercício: Analise a validade da segunda hipótese em todos os pontos fixos das funções $\sqrt{x}$ e x^2. Relacione a sua análise com os resultados dos experimentos da mini-aula anterior.

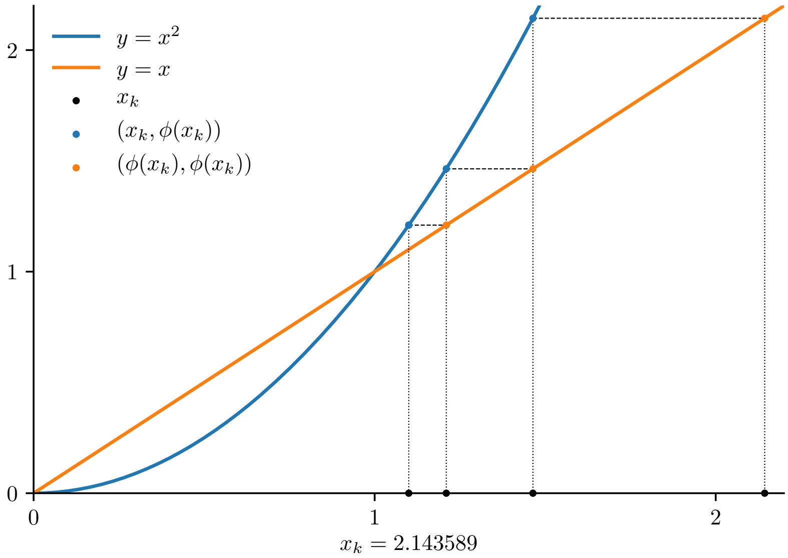
Ponto Fixo

Convergência



Ponto Fixo

Convergência



Como $|\phi'(x)| < 1$, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$|y - x| \leq \epsilon \Rightarrow |\phi'(y)| \leq c < 1.$$

Portanto, se $|x_k - x| \leq \epsilon$ então, lembrando da fórmula obtida anteriormente,

$$|x_{k+1} - x| = |\phi'(\tilde{x}_k)||x_k - x|$$

com $\tilde{x}_k \in (x_k, x)$. Ou seja, $|\tilde{x}_k - x| \leq \epsilon$ e, portanto:

$$|x_{k+1} - x| \leq c|x_k - x|.$$

Repetindo o argumento temos

$$|x_{k+N} - x| \leq c^N|x_k - x|.$$

Observe que

$$\frac{|x_{k+1} - x|}{|x_k - x|} = |\phi'(\tilde{x}_k)|,$$

ou seja, caso $x_k \to x$, temos

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x|}{|x_k - x|} = |\phi'(x)|.$$

Isto significa que o método convergirá tanto mais rapidamente quanto menor em módulo for a derivada da função de iteração ϕ em x.

Exercício: motive a conclusão acima geometricamente.

Ponto Fixo

Exercícios

- Mostre com um exemplo que é possível convergir ainda que $|\phi'(x_0)| > 1$. Dica: pense na função x^2 e em seu ponto fixo $x = 0$. Por que isso não contradiz o que foi provado acima?
- Considere as seguintes iterações de ponto fixo:
  - $x_{k+1} = 6 - x_k^2$
  - $x_{k+1} = \sqrt{6 - x_k}$
  - $x_{k+1} = 6/x_k - 1$
  - $x_{k+1} = 6/(1 + x_k)$.

  Note que 2 é um ponto fixo comum a todas. Identifique $\phi(x)$ em todos os casos, e calcule $\phi'(2)$. Com base nesse cálculo, quais sequências irão convergir e ordene as convergentes pela velocidade esperada de convergência.
- Verifique numericamente as conclusões do exercício anterior.