

Iteração de Ponto Fixo

Parte I: introdução

Elias S. Helou Neto

Ponto Fixo

Definição

Dizemos que $x \in \mathbb{R}$ é um ponto fixo de $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ quando

$$\phi(x) = x.$$

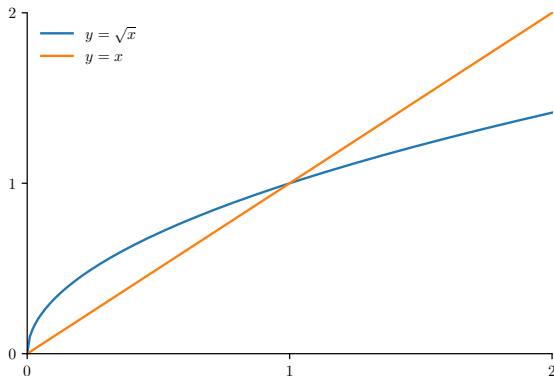
Ponto Fixo

Exemplos

A função $\phi(x) = \sqrt{x}$ possui o ponto fixo $x = 1$ já que

$$\phi(1) = \sqrt{1} = 1.$$

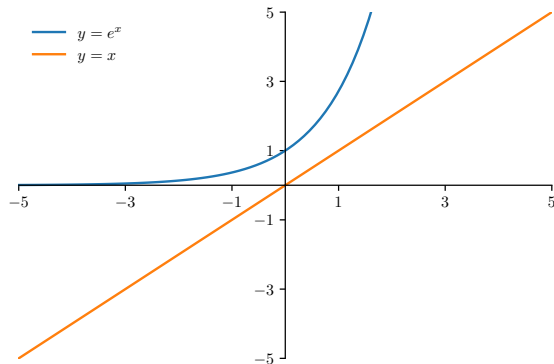
Note que um ponto fixo é a intersecção entre o gráfico de $y = \phi(x)$ com o gráfico de $y = x$:



Ponto Fixo

Exemplos

A função $\phi(x) = e^x$ não possui ponto fixo, como podemos ver na figura abaixo



Exercício: prove que $\phi(x) = e^x$ não possui ponto fixo.

Ponto Fixo

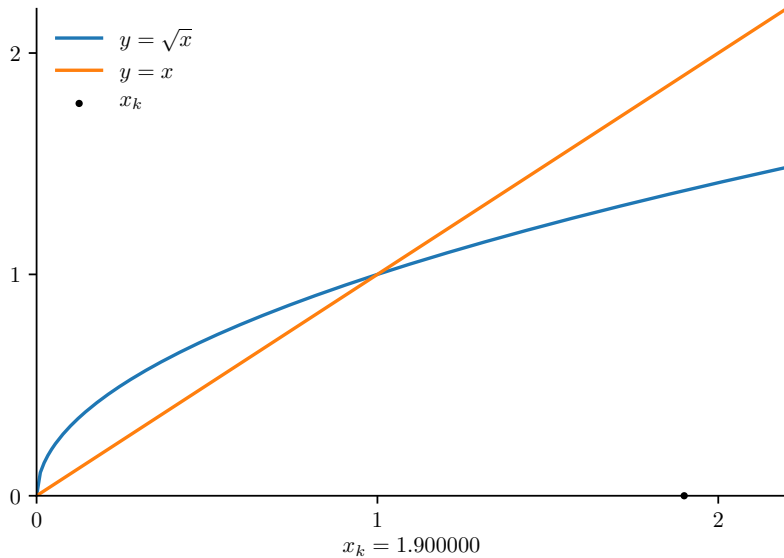
Iteração

$$x_{k+1} = \phi(x_k)$$

Sob condições adequadas temos $x_k \rightarrow x$ onde x é um ponto fixo, ou seja, $\phi(x) = x$.

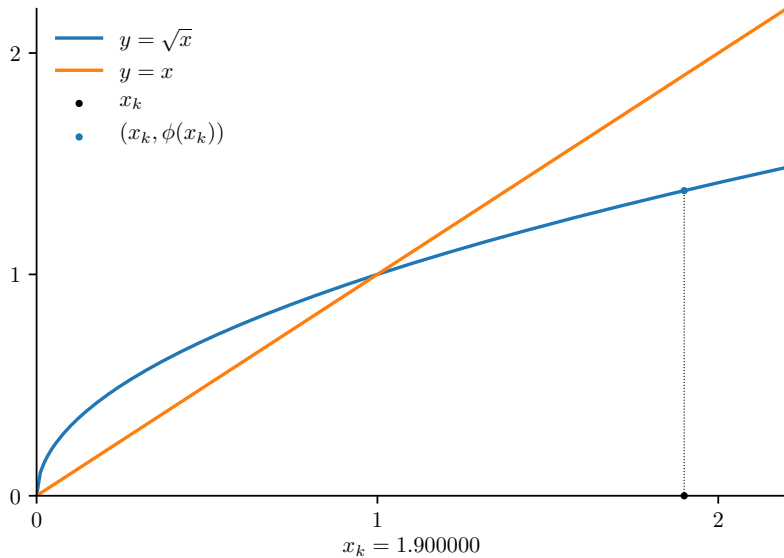
Ponto Fixo

Iteração



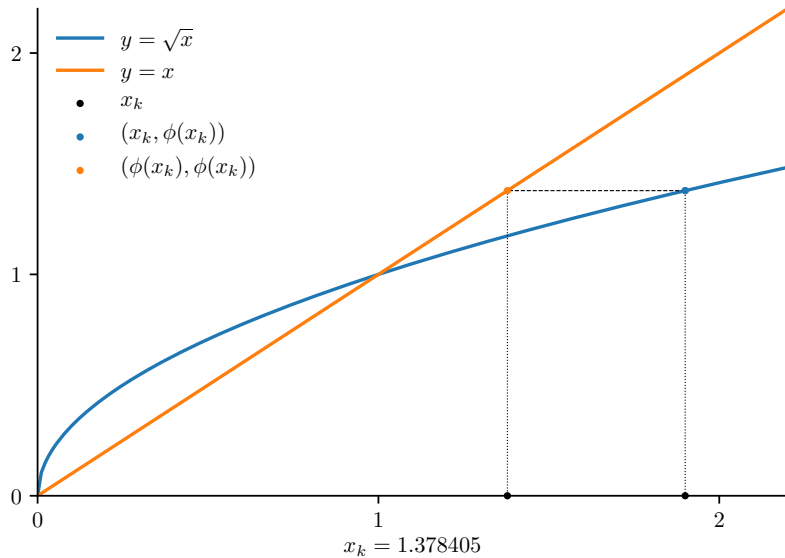
Ponto Fixo

Iteração



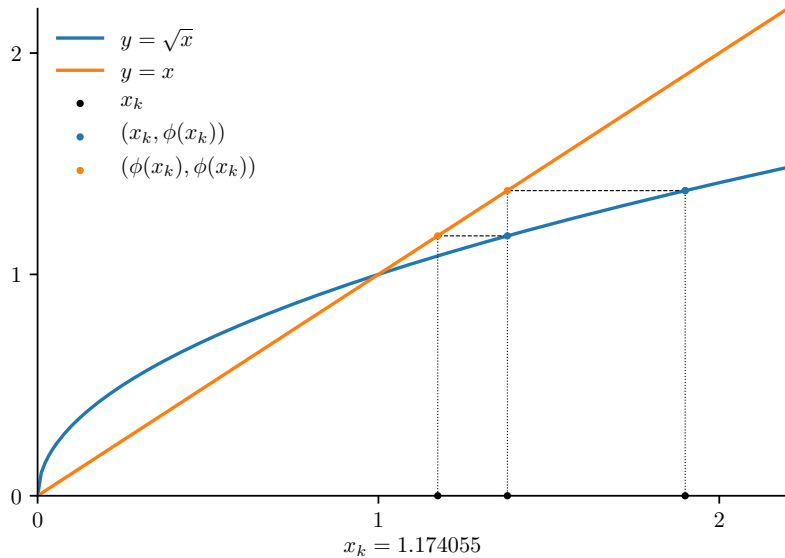
Ponto Fixo

Iteração



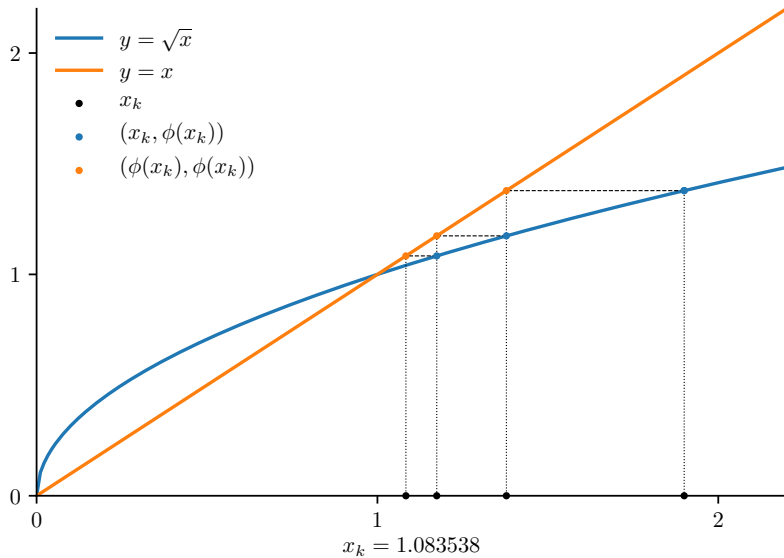
Ponto Fixo

Iteração



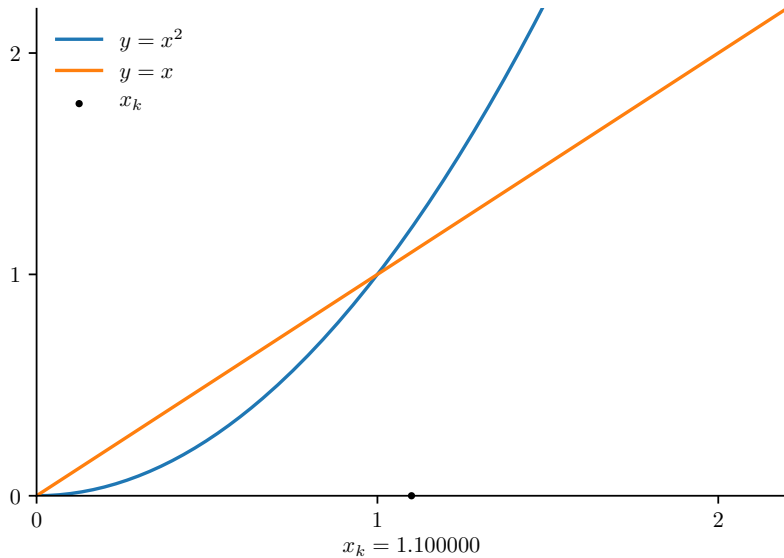
Ponto Fixo

Iteração



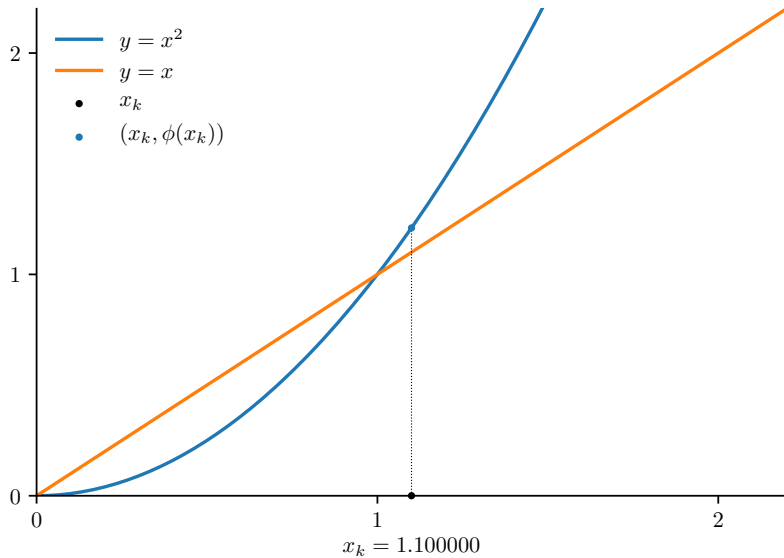
Ponto Fixo

Iteração



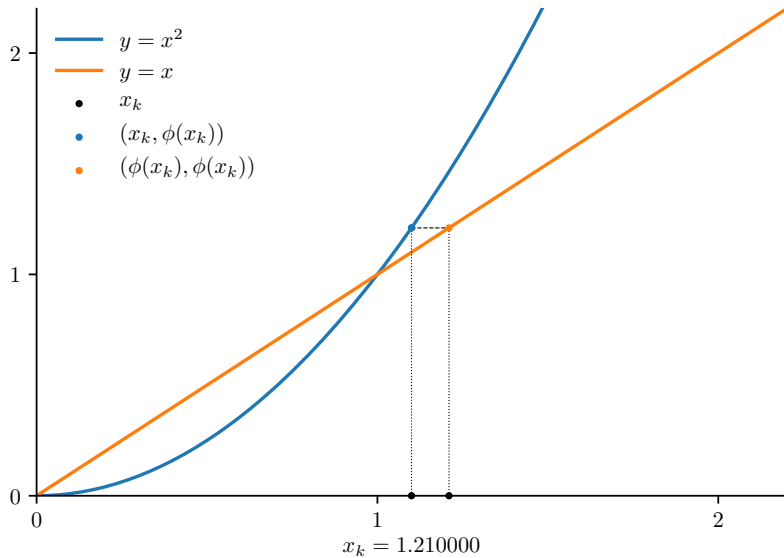
Ponto Fixo

Iteração



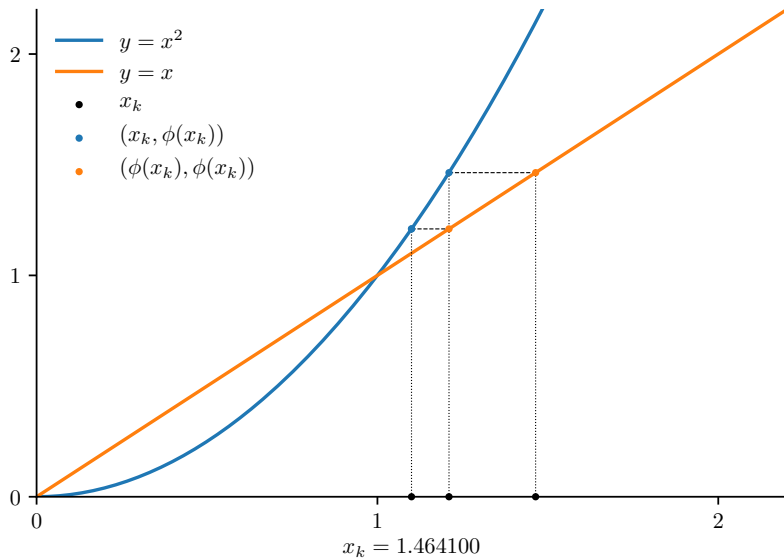
Ponto Fixo

Iteração



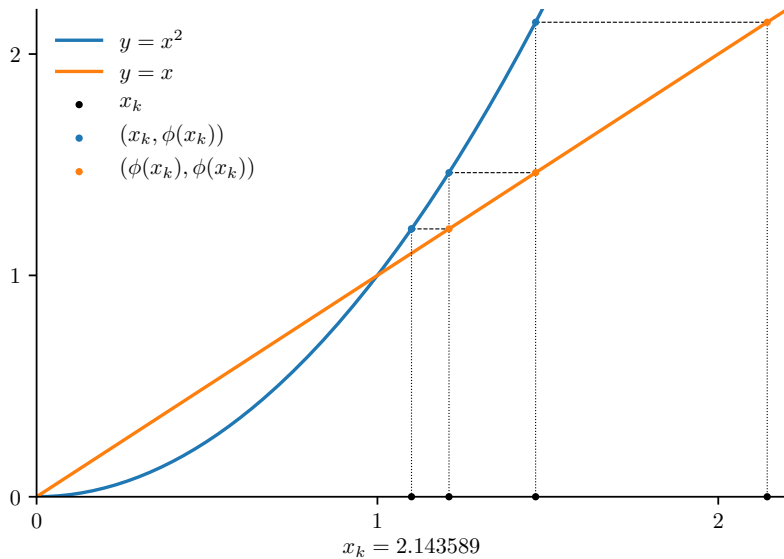
Ponto Fixo

Iteração



Ponto Fixo

Iteração



Exercícios

- ▶ A função \sqrt{x} possui outro ponto fixo além de $x = 1$. O que ocorre quando você tenta convergir para esse ponto utilizando a iteração de ponto fixo? Procure prever o comportamento com o auxílio de um gráfico e depois confirme suas previsões numericamente utilizando um computador.
- ▶ A função x^2 também tem outro ponto fixo além de $x = 1$. Repita o exercício anterior com essa função.
- ▶ Para a função x^2 , analise o comportamento da sequência $\{x_k\}$ gerada por $x_{k+1} = \phi(x_k)$ para todos os possíveis valores de $x_0 \in \mathbb{R}$.