Física 3 IFUSP
12 de Abril de 2023

Prof. José Roberto B. Oliveira

Prova 1

1) [2,0] Considerando as forças fundamentais da natureza e as leis do eletromagnetismo

a) Uma canoa vazia flutua sobre a água em um lago tranquilo. Qual das 4 forças da natureza está envolvida na interação da água do lago com a canoa impedindo que ela afunde? Que outra força da natureza age sobre a canoa de modo que ela permanece em um equilíbrio aproximado na superfície do lago? Explique.

b) Uma explosão nuclear transforma uma pequena quantidade de massa em uma grande quantidade de energia. Sabemos que a matéria contém cargas elétricas positivas e negativas. Nesse contexto, poderíamos afirmar que a explosão nuclear transforma uma pequena quantidade de cargas elétricas em energia? Explique.

c) Que interação fundamental é capaz de transformar um nêutron em um próton, mais um elétron e um anti-neutrino?

d) Qual dos processos abaixo inexiste na natureza e por quê? (Obs.: A barra sobre o símbolo indica anti-partícula).

I) $n+\bar{n}\rightarrow\pi^{+}+\pi^{-}$

II) $p\rightarrow\pi^{+}+\pi^{-}+\bar{p}$

Resp.:

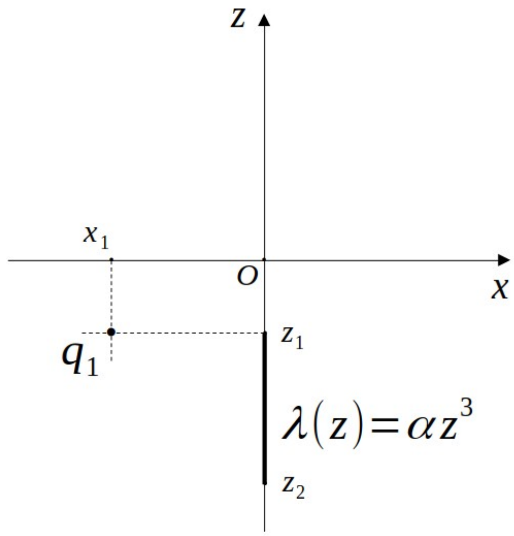
a) A força eletromagnética é a responsável pela interação entre as moléculas de água e o casco da canoa, resultando em uma força vertical para cima, contrabalançada pela força resultante da gravidade entre o planeta Terra e canoa, que é vertical para baixo, e proporcional à massa total da canoa.

b) Não, porque violaria a conservação da carga. A carga total dos produtos das reações nucleares permanece igual à carga inicial, ainda que haja criação e aniquilação de partículas.

c) A força fraca.

d) A segunda (II) porque a carga não é conservada. A carga do próton é $+e,$ no membro esquerdo, enquanto que a do antipróton é $-e.$ A carga total do par de píons carregados com sinais opostos é nula, de modo que o membro direito tem carga total $-e.$ A variação da carga seria $\Delta q=-2e.$ Na primeira equação (I) a carga inicial e final são ambas nulas, portanto o processo é permitido pela lei de conservação da carga.

2) A figura abaixo representa um sistema que contém uma carga elétrica puntiforme $q_1 > 0$, em repouso no plano xz, no ponto $(x_1, 0, z_1)$ e um fio fino disposto ao longo de um trecho do eixo z, no intervalo $z_2 \le z \le z_1$, cuja densidade linear de carga elétrica é dada por $\lambda(z) = \alpha z^3$, onde α é uma constante positiva. As constantes x_1, z_1 e z_2 são todas negativas.



a) [1.0] Determine o campo elétrico gerado pela carga puntiforme q_1 sobre a origem.
b) [1.0]Determine a carga total do fio: Q. Esta carga é positiva ou negativa? Explique.
c) [1.0]Determine o campo elétrico gerado pelo fio sobre a origem do sistema de coordenadas.
d) [0.5]Determine a força elétrica (em Newtons) que age sobre uma pequena carga q_0 quando colocada na origem do sistema de coordenadas, dados:
$q_0 = \frac{1}{9} nC\, ; x_1 = -4$ m; $z_1 = -3$ m; $q_1 = 125$ nC; $z_2 = -5$ m; e $\alpha = 2$ nC/m⁴.

No SI, a constante da Lei de Coulomb é: $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^{2.}}$

Resp.:
a) Sendo a posição do ponto O relativa à carga $\vec{R}_{rel} = (0,0,0) - (x_1, y_1, 0)$, $|\vec{R}_{rel}|^2 = x_1^2 + z_1^2$,

$$\vec{E}_{q1}(O) = k\frac{q_1}{R_{rel}^2}\hat{R}_{rel} = k\, q_1 \frac{(-x_1, 0, -z_1)}{(x_1^2 + z_1^2)^{3/2}}.$$

b) $Q = \int\limits_{(\text{Região})} dq = \int_{z_2}^{z_1} \lambda(z)\, dz = \int_{z_2}^{z_1} \alpha z^3 dz = \frac{\alpha}{4}(z_1^4 - z_2^4)$ Essa carga é negativa porque a densidade de carga é negativa em todo esse intervalo em que $z < 0$: $\lambda = \alpha z^3 < 0$.

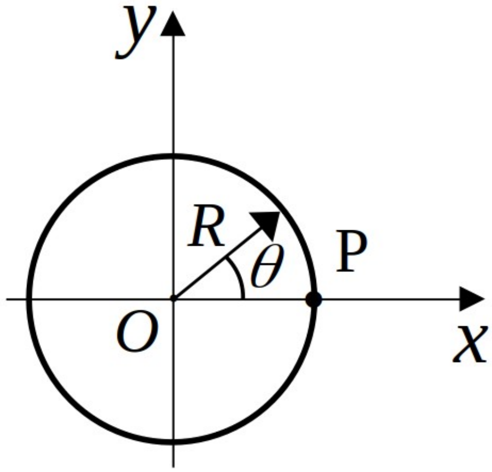
c) $$\vec{E}_{fio}(O) = \hat{k}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{z_2}^{z_1}\frac{\lambda(z)}{z^2}dz = \hat{k}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{z_2}^{z_1}\alpha z\, dz = \hat{k}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\alpha}{2}(z_1^2 - z_2^2) = (0,0,1)\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\alpha}{2}(z_1^2 - z_2^2)$$

d)
$$\vec{F} = q_0(\vec{E}_{q1} + \vec{E}_{fio}) = k\, q_0\left[q_1\frac{(-x_1, 0, -z_1)}{(x_1^2 + z_1^2)^{3/2}} + (0,0,1)\frac{\alpha}{2}(z_1^2 - z_2^2)\right] = 1 \times [(4,0,3) + (0,0,-16)] \times 10^{-9} = (4,0,-13) \text{ nN}$$

3) Um anel fino de raio R está carregado com uma densidade linear de carga elétrica dada por:

$$\lambda(\theta)=\lambda_0(1-\cos\theta)^{1/2}$$

em coordenadas polares, sendo λ_0 uma constante.



a) [1,5] Determine a componente x do campo elétrico no ponto P, de coordenadas cartesianas $(x_P, y_P)=(R,0)$.

b) [1,0] A componente y do campo elétrico nesse ponto é nula ou não? Explique.

Resp.:

a) A coordenada relativa do ponto P até uma carga dq no ponto genérico do anel $(R\cos\theta, R\sin(\theta))$ é: $\vec{R}_{rel}=(R,0)-(R\cos\theta, R\sin(\theta))=R((1-\cos\theta),-\sin\theta)$ portanto:

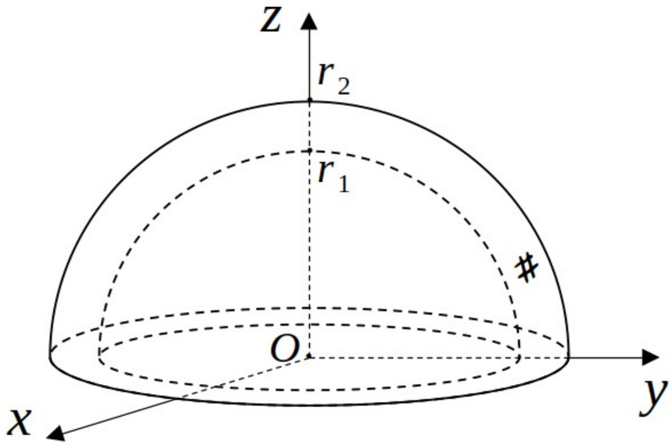
$$|\vec{R}_{rel}|^2=R^2[(1-\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2]=R^2(1-2\cos\theta+1)=2R^2(1-\cos\theta)$$

e

$$E_x=k\int_{(\text{Região})}\frac{dq\,R(1-\cos\theta)}{R_{rel}{}^3}=k\int_0^{2\pi}\frac{\lambda_0(1-\cos\theta)^{1/2}R(1-\cos\theta)}{(2R^2(1-\cos\theta))^{3/2}}R\,d\theta=k\int_0^{2\pi}d\theta\frac{\lambda_0 R^2}{2^{3/2}R^3}\frac{(1-\cos\theta)^{3/2}}{(1-\cos\theta)^{3/2}}=\frac{k\pi\lambda_0}{2^{1/2}R}$$

b) Como a densidade linear é uma função par em θ, isto é, $\lambda(\theta)=\lambda(-\theta)$, o sistema tem simetria de reflexão em torno do eixo *x*, portanto a componente *y* da solução para o campo elétrico deve ser nula.

4) Uma casca hemisférica (com espessura) é descrita em coordenadas esféricas como a região do espaço tal que: $r_1 \leq r \leq r_2$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \phi < 2\pi$ (vide figura). Suponhamos que esta casca hemisférica esteja carregada com uma densidade volumétrica de carga elétrica constante ρ_0.



a) [0.5] Qual é a única componente cartesiana não nula do campo elétrico produzido por essa casca hemisférica na origem (O) do sistema de coordenadas? Justifique.
b) [1.5] Determine o valor dessa componente do campo elétrico na origem.

Resp.:
a) Como o sistema tem simetria cilíndrica em torno do eixo *z*, a solução para o campo elétrico não pode ter componente perpendicular ao eixo *z* (ao longo do eixo *z*, que passa pela origem), portanto somente a componente *z* deve ser não nula na origem do sistema de coordenadas.

b) Sendo $dV = r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr$ o elemento de volume em coordenadas esféricas, o elemento de carga será $dq = \rho_0 dV = \rho_0 r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr$, enquanto que a coordenada relativa do ponto ao elemento de carga é $-\vec{r} = -(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$.
Assim, $dE_z = -k\,dq\,\frac{r\cos\theta}{r^3} = -k\rho_0 \sin\theta d\theta d\phi dr \cos\theta$, e a integral:

$$E_z = -k\rho_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_{r_1}^{r_2} dr = -k\rho_0 \int_0^1 u\,du\, 2\pi(r_2 - r_1) = -k\pi\rho_0(r_2 - r_1) = -\frac{\rho_0}{4\varepsilon_0}(r_2 - r_1),$$

onde, na integral em θ, foi feita a substituição de variável: $u = \sin\theta$, $du = \cos\theta d\theta$.