1. A componente zonal da equação de Navier-Stokes pode ser escrita assim: $\frac{Du}{Dt} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + fv - 2\Omega\cos(\theta)w + A_x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, onde os $A_i$ representam a viscosidade turbulenta. O argumento de Reynolds para estimar o valor dos $A_i$ foi de que a escala dos termos **viscosos** deve ser similar à escala dos termos **não-lineares**. Use este argumento (i.e.: análise de escala) para mostrar que $A_z << A_x$. $\boxed{10}$

**Resposta:**

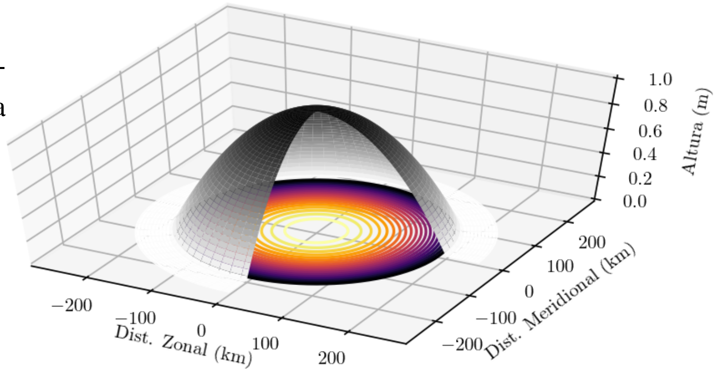
Termos não lineares são da forma $u\frac{\partial u}{\partial x}$, cuja escala é $\frac{U^2}{L}$.
Termos viscosos horizontais são da forma $A_x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, cuja escala é $A_x\frac{U}{L^2} \simeq \frac{U^2}{L} \quad \therefore \quad A_x \sim UL$.
Termos viscosos verticais são da forma $A_z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, cuja escala é $A_z\frac{U}{H^2} \simeq \frac{U^2}{L} \quad \therefore \quad A_z \sim U\frac{H^2}{L} \Rightarrow A_z \simeq \frac{H^2}{L^2}A_x$. Se $H$=5 km e $L$=5000 km, $A_z \simeq 10^{-6}A_x$.

2. Mostre que num modelo geostrófico com fluido homogêneo as isolinhas de $\psi$, $\eta$ e $p'$ não se cruzam. $\boxed{15}$

**Resposta:**

... ctrl-c, ctrl-v ...
Partindo da geostrofia em coords. retangulares: $u = -\frac{1}{f\rho}\frac{\partial p'}{\partial y}$, $v = \frac{1}{f\rho}\frac{\partial p'}{\partial x}$ e integrando a hidrostática: $\rho g = -\frac{\partial p}{\partial z}$ em $z$, obtenho $p' = \rho g \eta$ que substituo nas eqs. do momentum: $u = -\frac{g}{f}\frac{\partial \eta}{\partial y}$, $v = \frac{g}{f}\frac{\partial \eta}{\partial x}$. Por fim, basta a definição de linhas de corrente $u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$ e $v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ para notarmos que os três casos se reduzem à forma $u = -C_{[\psi,\,\eta,p']}\frac{\partial[\psi,\,\eta,p']}{\partial y}$ e $v = C_{[\psi,\,\eta,p']}\frac{\partial[\psi,\,\eta,p']}{\partial x}$ onde $C_i$ é uma constante positiva. Dessa forma, contornos desses 3 escalares não se cruzam, são "paralelos".

3. A ideia central deste problema é entender porque algumas estruturas se propagam sozinhas no oceano. Considere um vórtice cuja anomalia da altura $\eta$ tem perfil parabólico, como o da Figura. $\eta$ é razoavelmente bem representado, num dado instante, pela superfície em tons de cinza descrita por: $\eta(r < R) = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2$; e $\eta(r >= R) = 0$. Os contornos internos são linhas de corrente circulares. Para simplificar o problema, assuma o seguinte:




   - $R$ constante, i.e.: simetria radial;
   - profundidade $H$ constante, i.e.: fundo plano;
   - densidade $\rho_0$ constante, i.e.: fluido homogêneo;
   - vortic. planetária $f = 2\Omega \sin\theta$;
   - centro do vórtice em $\theta = 30°$S.

   (a) Assumindo equilíbrio geostrófico, obtenha $u_r(\eta)$ e $v_\phi(\eta)$. 10
   **Roteiro:** Substitua $\eta$ e derive para obter $v_\phi(r)$.

   **Resposta:**
   Como $\psi$ forma círculos, $u_r = 0$. Integrando a eq. hidrostática e substituindo $p' = \rho' g\eta$, obtemos $v_\phi = -\frac{g}{f}\frac{\partial \eta}{\partial r}$. Substituindo $\eta$ e derivando em $r$, $v_\phi = \frac{g}{fR^2}\frac{\partial r^2}{\partial r} = \frac{2g}{fR^2}r$

   (b) Esse vórtice é (aproximadamente) irrotacional ou de corpo sólido? 5

   **Resposta:**
   É aproximadamente de corpo sólido pois $v_\phi$ é diretamente proporcional a r. Aproximadamente por causa do $f$ variável.

   (c) Calcule $w_z$. 5

   **Resposta:**
   $u_r = 0$ e $v_\phi$ independe de $\theta$, portanto o divergente horizontal é nulo, o que implica que $w_z$ é constante. Como $w_z$ é zero no fundo, é zero em todo o domínio.

   (d) Para que direção o vórtice se propaga? 15
   **Roteiro:** Calcule o fluxo zonal de massa nas metades norte $F_{xN}$ e sul $F_{xS}$ do vórtice. Fluxo de massa é a integral do momentum na área da seção, por exemplo, $F_{xN} = \int_0^R \int_H^0 \rho_0 v_\phi \, dzdr$. Para facilitar as contas vamos assumir que o centro de massa na região Norte (Sul) fica sobre 29°S (31°S) sendo[1] $\sin(-29°) = -0.485$ e $\sin(-31°) = -0.515$.

   **Resposta:**

$$F_{xN} = \rho_0 \int_0^R \int_H^0 v_\phi dzdr \text{ mas } v_\phi \text{ independe de } z\text{, portanto}$$

$$F_{xN} = H\rho_0 \int_0^R v_\phi dr = H\rho_0 \frac{gr^2}{fR^2}\Big|_0^R = \frac{H\rho_0 g}{f}$$

$$F_{xS} = H\rho_0 \int_R^0 v_\phi dr = -H\rho_0 \frac{gr^2}{fR^2}\Big|_0^R = -\frac{H\rho_0 g}{f}$$

[1] Dica: Não substitua os valores, estes números estão aqui para te ajudar a argumentar.

Os fluxos são **quase** iguais e opostos. Digo quase pois $1/f$ é ligeiramente diferente no norte e no sul, ou seja $|\sin(-29°)^{-1}| \gtrsim |\sin(-31°)^{-1}|$, o lado norte domina e leva o cento de massa para oeste.

(e) A sua resposta anterior mudaria se assumíssemos plano $f$? E plano $\beta$? $\boxed{10}$

**Resposta:**
No plano $f$ o vórtice não se propaga pois o fluxo é igual dos dois lados. No plano $\beta$ ele se propagará para oeste pois $f$ no lado norte continua sendo maior em módulo do que no lado sul por causa do fator $\beta_0 y$.

♠

Regra da cadeia: $(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$, regra do quociente $\left(\frac{g}{h}\right)' = \frac{g'h - gh'}{h^2}$.

- $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial(r\ u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial w_z}{\partial z}$.
- $fv = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x}$, e $-fu = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial y}$
- $\rho g = -\frac{\partial p}{\partial z}$
- $u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$ e $v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$