Lista 3

MAT0120 - Álgebra I para a Licenciatura

$1^{\underline{o}}$ semestre de 2023

1. Sejam A e B conjuntos finitos com m e n elementos, respectivamente. Mostre que o número de funções de A e B é m^n.
2. Encontre uma fórmula fechada para a soma $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$.
3. Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale:
   a) $9 \mid 10^n - 1$
   b) $3 \mid 10^n - 7^n$
   c) $8 \mid 3^{2n} - 1$
   d) $6 \mid 5^{2n+1} + 1$
   e) $5 \mid n^2 - n$
4. a) Mostre que a é par se, e somente se, a^2 é par.
   b) Mostre que se $b \neq 0$ então $x^2 = 2b^2$ não tem solução em $\mathbb{Z}$.
5. Seja F_n a sequência de inteiros assim definida:
   $$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ para } n \geq 3$$
   Prove que as seguintes resultados ou dê contra exemplos:
   a) $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-3} + F_{2n-1} = F_{2n}$.
   b) $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$ para $n \geq 2$ e $m \geq 1$.
   c) $F_{n+1}^2 = F_{n+2}F_n + (-1)^n$ para $n \geq 1$.
6. Seja $P = \{a \in \mathbb{Z} \ : \ a > 0\}$. Prove, usando axiomas:
   a) $a \in P$ e $b \in P \Rightarrow a + b \in P$.
   b) $a \in P$ e $b \in P \Rightarrow ab \in P$.
   c) Para todo inteiro a, vale exatamente uma das afirmações $a = 0$ ou $a \in P$ ou $-a \in P$.
7. Sejam $p_1, p_2, \cdots, p_k$ inteiros maiores que 1 e $n = p_1 \cdots p_k + 1$. Prove que para $1 \leq i \leq k$, $p_i \nmid n$.
8. Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ uma função tal que:
   i) $f(1) = 1$;
   ii) $f(a + b) = f(a) + f(b)$, para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}$.

   Prove que $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{Z}$.