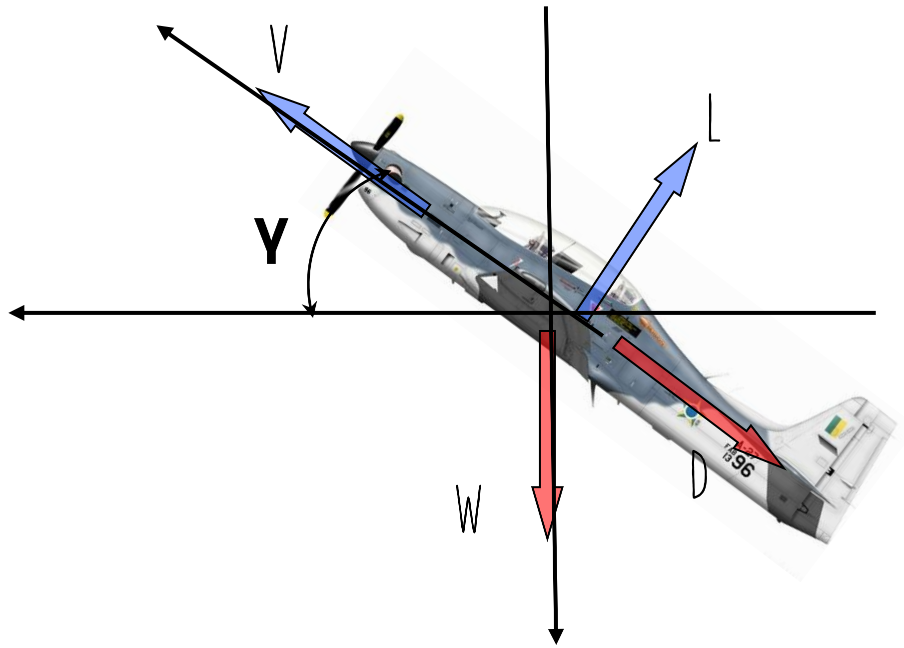
Desempenho de Aeronaves

Voo sem potência

Hipóteses adotadas:

- **Aeronave trimada;**
- **A aeronave é tratada como uma massa pontual, onde somente agem forças;**
- **O peso da aeronave é considerado constante.**



Equações de equilíbrio

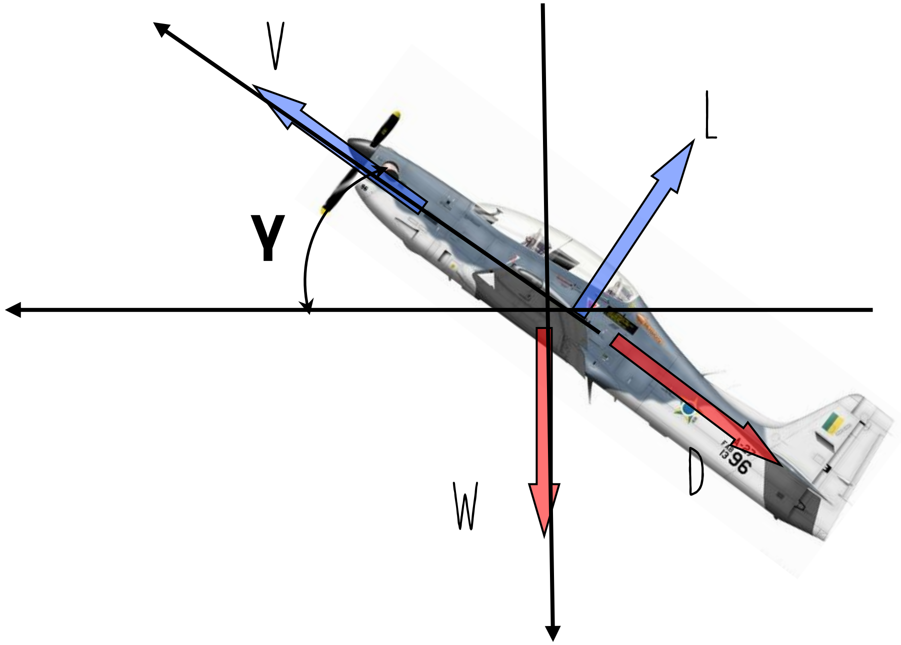
$$\sum F_x = 0 \quad -W sen\gamma - D = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad -W cos\gamma - L = 0$$

Voo sem potência

Hipóteses adotadas:

- **Aeronave trimada;**
- **A aeronave é tratada como uma massa pontual, onde somente agem forças;**
- **O peso da aeronave é considerado constante.**



Equações cinemáticas

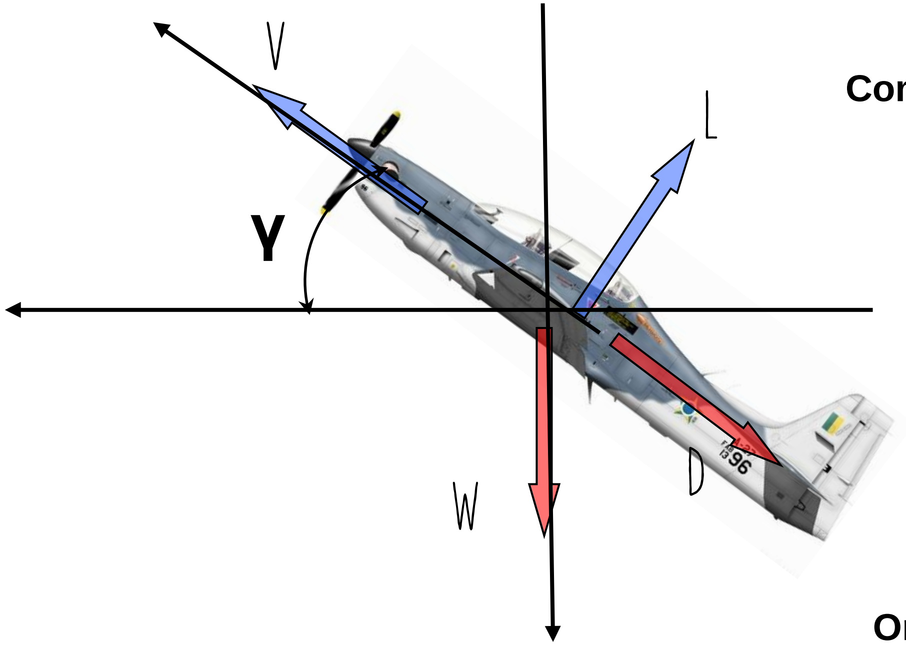
$$\frac{dx}{dt} = V\,cos\gamma$$

$$\frac{dh}{dt} = V\,sen\gamma$$

Voo sem potência

Ângulo de planeio e razão de descida

Da equação de equilíbrio de forças em x (paralelo a linha do horizonte)



$$D + W sen\gamma = 0 \Rightarrow sen\gamma = -\frac{D}{W}$$

Como o ângulo de planeio é pequeno, tem-se:

$$\gamma = -\frac{D}{L} \quad \text{e} \quad L = W$$

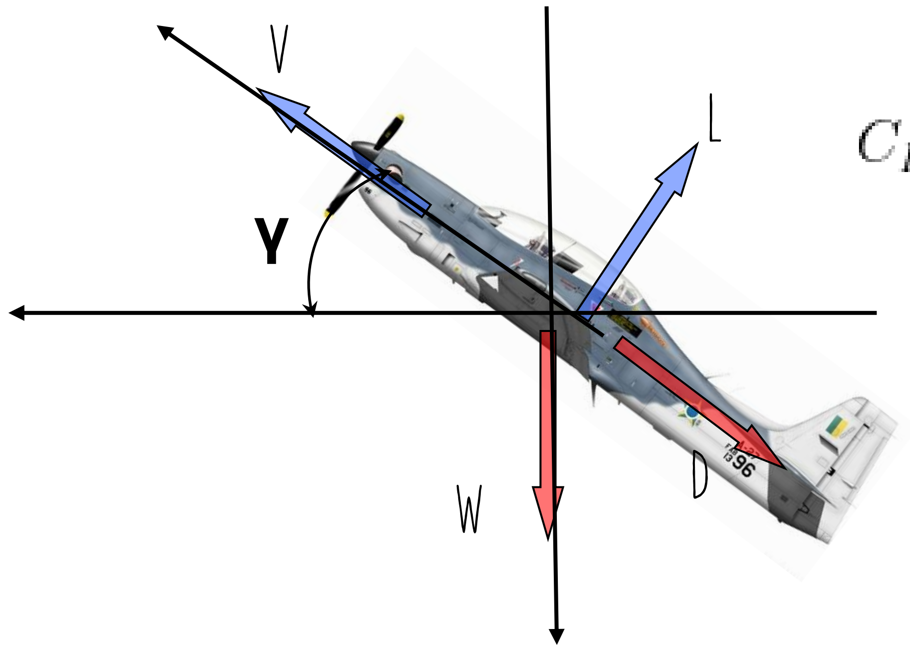
Portanto:

$$\gamma = -\frac{D}{L} = -\frac{1}{E}$$

Onde E=L/D é a eficiência aerodinâmica da aeronave.

Voo sem potência

Temos que o coeficiente de sustentação (C_L) é dado por:



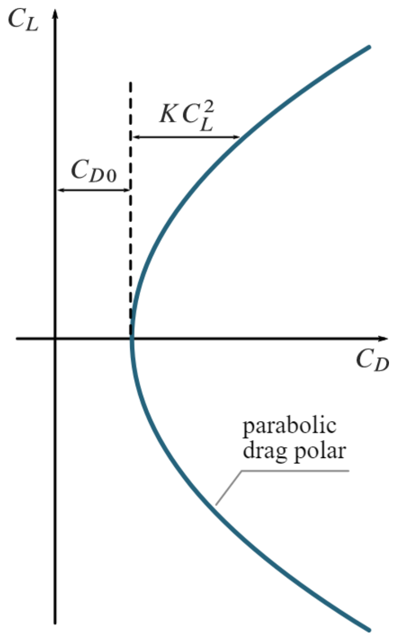
$$C_L = \frac{2L}{\rho V^2 S} = \frac{2L}{\rho_0 \sigma V^2 S} = \frac{2\frac{W}{S}}{\rho_0 \sigma V^2}$$

$$C_D = \frac{2D}{\rho_0 \sigma V^2 S}$$

Onde ρ0 é a densidade do ar no nível do mar nas condições ISA e σ é a razão de densidade.

Voo sem potência

Considerando que a polar de arrasto é dada por:



$$C_D = C_{D_0} + KC_L^2$$

$$K = \frac{1}{A\,\mathrm{Re}\,\Pi}$$

Pode-se escrever:

$$\frac{1}{E} = \frac{D}{L} = \frac{C_D}{C_L} = \frac{C_{D_0} + KC_L^2}{C_L}$$

Portanto:

$$\frac{1}{E} = \frac{\rho_0 \sigma C_{D_0} V^2}{2\frac{W}{S}} + \frac{2K\frac{W}{S}}{\rho_0 \sigma V^2}$$

Voo sem potência

Segue que o ângulo de planeio é dado por:

$$\gamma = -\frac{1}{E} = -\frac{\rho_0 \sigma C_{D_0} V^2}{2\frac{W}{S}} - \frac{2K\frac{W}{S}}{\rho_0 \sigma V^2}$$

A razão de descida (R/D) é dada por:

$$R/D = -\dot{h} = -\frac{dh}{dt} = -V\,sen\gamma = -V\gamma = \frac{V}{E}$$

$$-\dot{h} = \frac{\rho_0 \sigma V^3 C_{D_0}}{2\frac{W}{S}} + \frac{2K\frac{W}{S}}{\rho_0 \sigma V}$$

Voo sem potência

Alcance:

Distância horizontal percorrida durante o planeio da aeronave:

$$\frac{dx}{dh} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dh}{dt}} = \frac{V}{V\gamma} = \frac{1}{\gamma} = -E$$

Sendo x a distância percorrida entre h_1 e h_2, tem-se:

$$x = -\int_{h_2}^{h_1} E dh$$

Essa integral é resolvida numericamente, sendo conhecidos V e σ.
Por outro lado, se C_L ou V forem constantes, a equação acima pode ser resolvida analiticamente!

Voo sem potência

Alcance para C_L constante.

$$\frac{C_D}{C_L} = \frac{C_{D_0} + KC_L^2}{CL} = \frac{1}{E}$$

Se CL for constante, pode-se retirar a eficiência aerodinâmica da integral, portanto:

$$x_{C_L} = -E(h_1 - h_2)$$

Alcance para Velocidade constante.

Tem-se:

$$\frac{1}{E} = \frac{\rho_0 \sigma C_{D_0} V^2}{2\frac{W}{S}} + \frac{2K\frac{W}{S}}{\rho_0 \sigma V^2}$$

Chamando:

$$A = \frac{\rho_0 C_{D_0} V^2}{2\frac{W}{S}}$$

$$B = \frac{2K\frac{W}{S}}{\rho_0 V^2}$$

Voo sem potência

A relação anterior fica escrita como:

$$\frac{1}{E} = A\sigma + \frac{B}{\sigma} = \frac{A\sigma^2 + B}{\sigma}$$

Portanto $$E = \frac{\sigma}{A\sigma^2 + B}$$

Segue que:

$$x_V = -\int_{h_2}^{h_1} E dh = -\int_{h_2}^{h_1} \frac{\sigma}{A\sigma^2 + B} dh = -\frac{1}{A}\int_{h_2}^{h_1} \frac{\sigma}{\sigma^2 + \frac{B}{A}} dh$$

Voo sem potência

Das equações de atmosfera padrão, tem-se $\sigma = e^{\frac{-h}{\beta}}$

Onde β=9296 m

Portanto:

$$x_V = \frac{\beta \rho_0 V^2}{2K\frac{W}{S}}\left[atan\left(\frac{C_{D_0}\rho_0 V^4 e^{\frac{-h_1}{\beta}}}{4K\left(\frac{W}{S}\right)^2}\right) - atan\left(\frac{C_{D_0}\rho_0 V^4 e^{\frac{-h_2}{\beta}}}{4K\left(\frac{W}{S}\right)^2}\right)\right]$$

Voo sem potência

Autonomia:

Tempo entre h1 e h2.

$$\frac{dt}{dh} = \frac{1}{\frac{dh}{dt}} = \frac{1}{V\gamma} = -\frac{E}{V}$$

Portanto:

$$t = -\int_{h_2}^{h_1} \frac{E}{V} dh$$

Voo sem potência

A integral do slide anterior é resolvida numericamente, porém, se for considerado CL ou V constantes, a integral passa a ter uma solução analítica.

Para C_L constante:

$$t_{C_L} = -E \int_{h_2}^{h_1} \frac{1}{V} dh$$

Sabendo que:

$$V = \left(\frac{2\frac{W}{S}}{\rho_0 \sigma C_L} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Onde C_L e W/S são constantes, tem-se:

$$t_{C_L} = -E \left(\frac{\rho_0 C_L}{2\frac{W}{S}} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{h_2}^{h_1} \sqrt{\sigma} dh$$

Voo sem potência

Novamente assumindo $\sigma = e^{\frac{-h}{\beta}}$

$$t_{C_L} = 2\beta E \left(\frac{\rho_0 C_L}{2\frac{W}{S}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(e^{\frac{-h_1}{2\beta}} - e^{\frac{-h_2}{2\beta}}\right)$$

Considerando V constante:

$$t_V = -\frac{1}{V}\int_{h2}^{h_1} E dh = \frac{\beta\rho_0 V}{2K\frac{W}{S}}\left[atan\left(\frac{C_{D_0}\rho_0^2 V^4 e^{\frac{-h_1}{\beta}}}{4K\left(\frac{W}{S}\right)^2}\right) - atan\left(\frac{C_{D_0}\rho_0^2 V^4 e^{\frac{-h_2}{\beta}}}{4K\left(\frac{W}{S}\right)^2}\right)\right]$$

Voo sem potência

Máximo alcance para voo planado:

Importante para o caso de falha do motor!

Considerando C_L constante:

$$\frac{C_D}{C_L} = \frac{C_{D_0}}{C_L} + KC_L = f(C_L)$$

OBS:

$$\frac{df(C_L)}{dC_L} = -\frac{C_{D_0}}{C_L^2} + K = 0$$

$$\frac{df^2(C_L)}{dC_L^2} = \frac{2C_{D_0}}{C_L^3} > 0$$ **Ponto de mínimo.**

Portanto: $C_L = \sqrt{\frac{C_{D_0}}{K}}$ ➡ **C_L para ângulo de planeio mínimo**

Voo sem potência

O ângulo mínimo de planeio acontece para o máximo E.

$$\gamma_{min} = -\frac{1}{E_{max}}$$

Substituindo o C_L para 1/E mínimo na polar de arrasto:

$$C_D = C_{D_0} + K \cdot C_{D_0} \Rightarrow C_D = 2C_{D_0}$$

Substituindo na eficiência aerodinâmica:

$$E_{br} = \frac{C_L}{C_D} = \frac{\sqrt{\frac{C_{D_0}}{K}}}{2C_{D_0}} = \frac{1}{2(C_{D_0}K)^{\frac{1}{2}}}$$ → **Máxima eficiência aerodinâmica**

Voo sem potência

A velocidade para o melhor alcance é obtida de maneira similar:

$$V^2 = \frac{2\frac{W}{S}}{\rho_0 \sigma C_L} \Rightarrow V_{E_{max}}^2 = \frac{2\frac{W}{S}}{\rho_0 \sigma \left(\frac{C_{D_0}}{K}\right)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow V_{E_{max}} = \left(\frac{2\frac{W}{S}}{\rho_0 \sigma}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{K}{C_{D_0}}\right)^{\frac{1}{4}}$$

OBS: A velocidade diminui com a diminuição da altitude!

Da equação do alcance para C_L constante, temos:

$$x_{br,C_L} = E_{max}(h_2 - h_1)$$

A distância para melhor alcance para C_L constante aumenta com o aumento da eficiência aerodinâmica (planadores).

A autonomia do voo planado é obtida da equação de autonomia para CL constante, mas substituindo E por E_{max} e C_L por $C_{L,br}$.

Voo sem potência

$$t_{br,C_L} = 2\beta E_{max} \left[\frac{\rho_0 C_{L,br}}{2\frac{W}{S}} \right]^{\frac{1}{2}} \left(e^{\frac{-h_1}{2\beta}} - e^{\frac{-h_2}{2\beta}} \right)$$

$$t_{br,C_L} = 2\beta E_{max} \left[\frac{\rho_0}{2\frac{W}{S}} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{C_{D_0}}{K} \right]^{\frac{1}{4}} \left(e^{\frac{-h_1}{2\beta}} - e^{\frac{-h_2}{2\beta}} \right)$$

O ângulo de planeio para esse caso fica:

$$\gamma_{br,C_L} = -\frac{1}{E_{br,C_L}} = -\frac{1}{E_{max}} = -2\sqrt{C_{D_0} K}$$

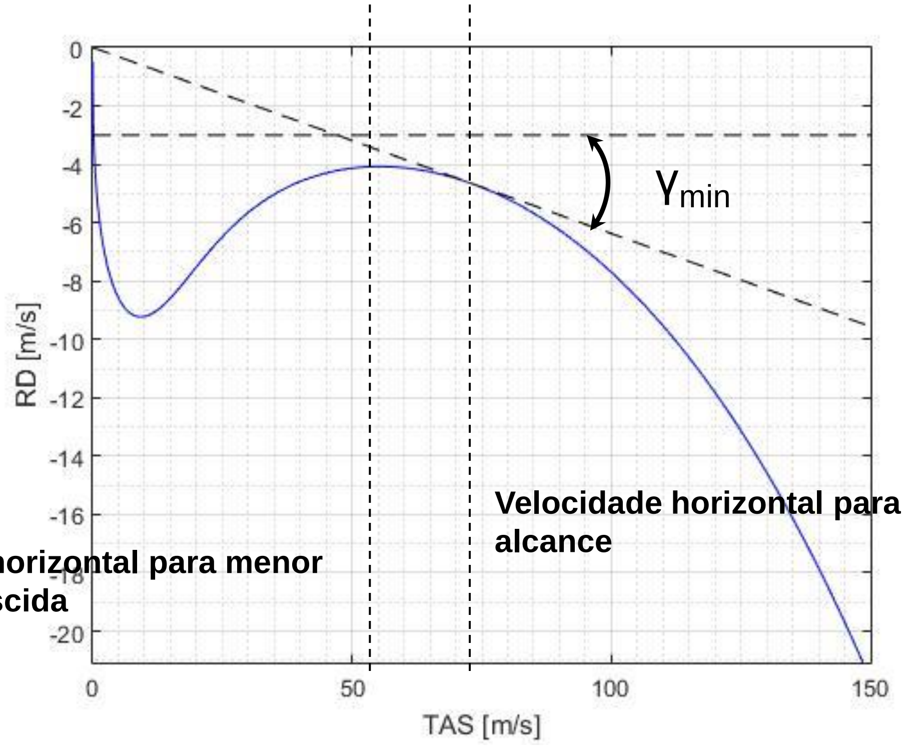
Nesse caso é o ângulo mínimo de planeio.

Voo sem potência

A razão de descida para melhor alcance com C_L constante fica:

$$-\dot{h}_{br,C_L} = \frac{V_{br,C_L}}{E_{br,C_L}} = \frac{1}{E_{max}}\left[\frac{2\frac{W}{S}}{\rho_0\sigma}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\frac{K}{C_{D_0}}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Voo sem potência



Velocidade horizontal para maior alcance

Velocidade horizontal para menor razão de descida

A condição de maior alcance ocorre para o menor arrasto, já a condição para menor razão de descida ocorre ne condição de menor potência necessária ($V \approx 0.76 V_{Emax}$)

Voo sem potência

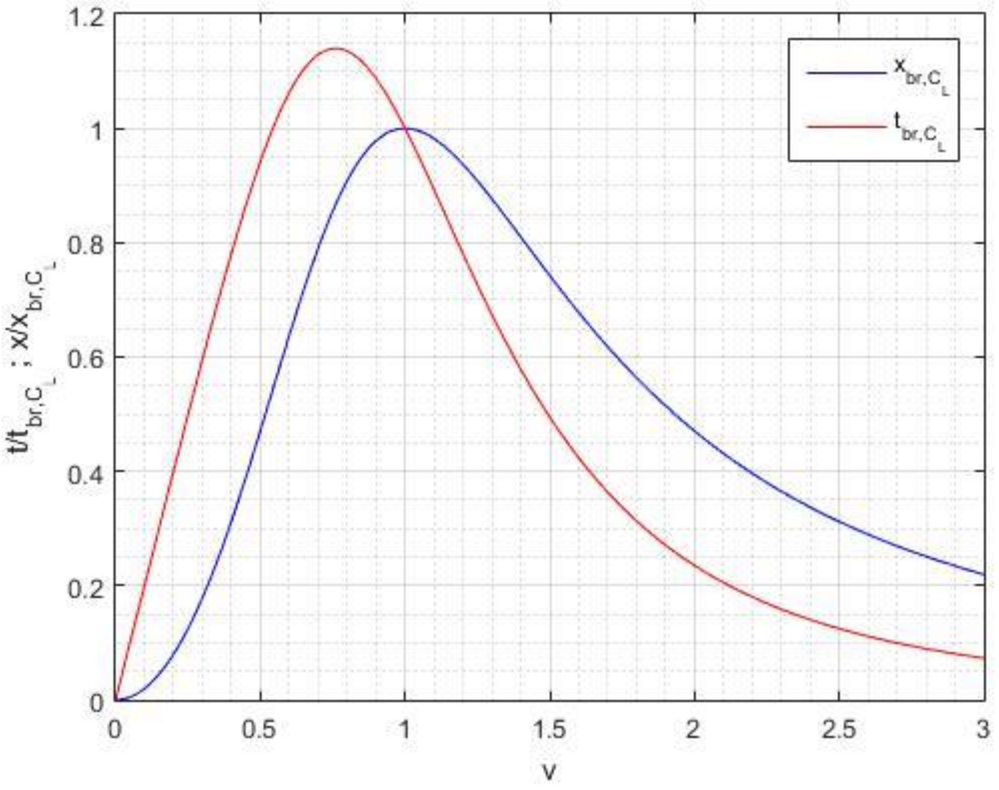
Caso seja necessário uma relação intermediária entre o melhor alcance e menor razão de descida:

$$v = \frac{V}{V_{br,C_L}}$$

A distância relativa e autonomia ficam:

$$\frac{x}{x_{br,C_L}} = \frac{Edh}{E_{max}dh} = \frac{2v^2}{v^4+1}$$

$$\frac{t}{t_{br,C_L}} = \frac{\frac{x}{V}}{\frac{x_{br,C_L}}{V_{br,C_L}}} = \frac{x}{x_{br,C_L}} \cdot \frac{1}{v} = \frac{2v}{v^4+1}$$



A medida que a aeronave desacelera do ponto de melhor alcance, o seu tempo no ar aumenta e sua distância no ar diminui.

A velocidade (v) diminuindo para 0.76 irá maximizar o tempo no ar e irá resultar em 87% do máximo alcance.

Se v=0.87, o tempo irá aumentar em 10% e o alcance diminuir em 4%.

Por outro lado, se v>1, tanto o tempo no ar quanto o alcance irão diminuir.

Voo sem potência

Para o caso de menor razão de descida, temos:

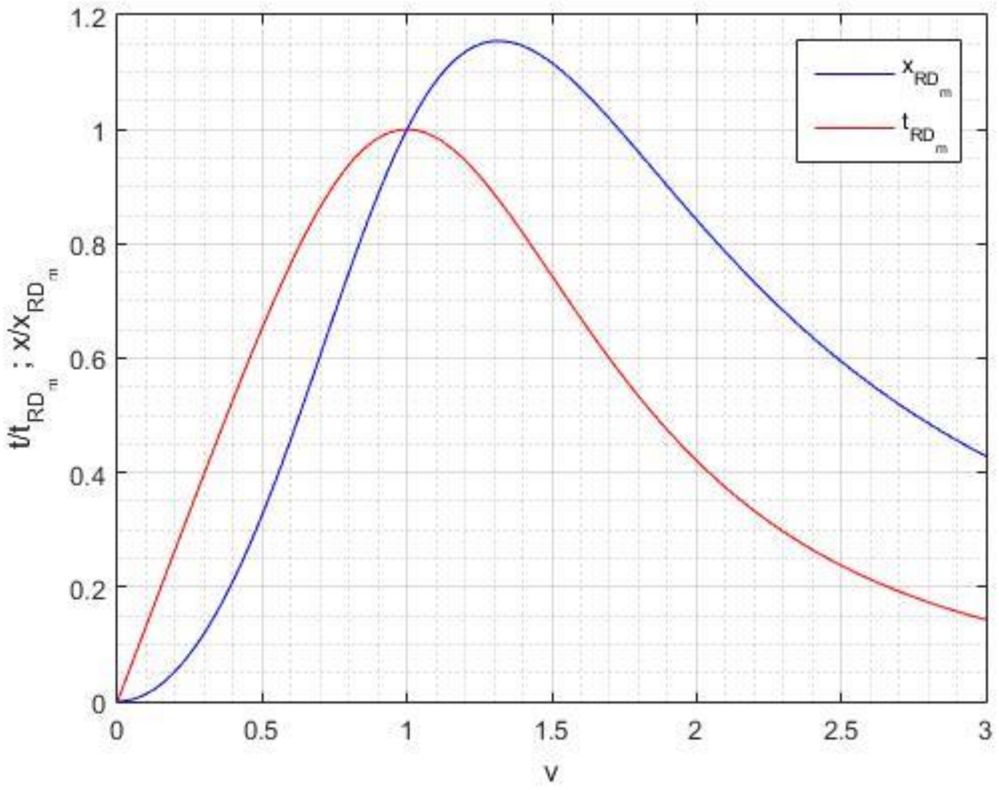
$$RD = -\dot{h} = -V\,sen\gamma = \sqrt{\frac{2\frac{W}{S}cos\gamma}{\rho_0\sigma C_L}}\left(\frac{C_L}{C_D}\right)cos\gamma \cong \sqrt{\frac{2\frac{W}{S}}{\rho_0\sigma}}\left(\frac{C_D}{C_L^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Para R_{dmin}, a razão $C_D/C_L^{3/2}$ deve ser mínima (equivalente a condição de potência mínima) => $V_{RDmin}=V_{pot.min}$.

Fazendo uma análise similar para o caso de maior alcance:

$$v = \frac{V}{V_{RD_{min}}} \qquad \frac{x}{x_{RD_{min}}} = \frac{4v^2}{v^4+3} \qquad \frac{t}{t_{RD_{min}}} = \frac{4v}{v^4+3}$$

Voo sem potência



Se v aumentar da velocidade de razão de descida mínima, o alcance irá aumentar até o ponto de arrasto mínimo, depois irá diminuir.

Se v diminuir da condição de razão de descida mínimo, tanto o alcance como a autonomia irão diminuir.

Voo sem potência

Melhor alcance para velocidade constante

Nesse caso, a velocidade é mantida constante e igual a que resulta no melhor alcance.

$$x_V = \frac{\beta \rho_0 V^2}{2K\frac{W}{S}}\left[atan\left(\frac{C_{D_0}\rho_0 V^4 e^{\frac{-h_1}{\beta}}}{4K\left(\frac{W}{S}\right)^2}\right) - atan\left(\frac{C_{D_0}\rho_0 V^4 e^{\frac{-h_2}{\beta}}}{4K\left(\frac{W}{S}\right)^2}\right)\right]$$

A função atan não permite a obtenção da equação de melhor alcance com velocidade constante de forma analítica.

A aproximação fica:

$$x_V = \frac{\beta \rho_0 (a-b) V^6}{2K\left(\frac{W}{S}\right)\left(1 + abV^8\right)}$$

$$a = \frac{C_{D_0}\rho_0 e^{\frac{-h_1}{\beta}}}{4K\left(\frac{W}{S}\right)^2}$$

$$b = \frac{C_{D_0}\rho_0 e^{\frac{-h_2}{\beta}}}{4K\left(\frac{W}{S}\right)^2}$$

Voo sem potência

A velocidade fica:

$$V_{br,V} = \left(\frac{3}{ab}\right)^{\frac{1}{8}} = \left(\frac{\sqrt{3}K}{C_{D_0}}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{2\frac{W}{S}}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{h_1+h_2}{8\beta}}$$

Exercício:

Um planador com 300 kg, área da asa de 14.1 m^2 e envergadura de 15m apresenta as seguintes características:

$\alpha(^o)$	C_L	C_D
12	1.47	0.0950
11	1.46	0.0865
9	1.36	0.0675
7	1.23	0.0535
5	1.08	0.0440
3	0.90	0.0350
1	0.70	0.0275
-1	0.49	0.0220
-3	0.25	0.0180
-4	0.12	0.0160

Voo sem potência

Para condições ISA/NM sem vento, plotar os valores de C_L vs C_D, C_L vs C_L/C_D e C_L vs C_L^3/C_D^2.

Fazer também um gráfico da velocidade horizontal pela razão de descida e encontrar a velocidade horizontal para o melhor alcance e mínima razão de descida.

Com esses mesmos dados, calcular o máximo tempo de vôo a partir de uma altitude de $5000ft$ até o nível do mar em condições ISA+15C. Por fim, calcular para essa condição a maior distância que o planador pode percorrer.