

Oscilador Harmônico Simples

Aula 2

Oscar Éboli / Raul Abramo / 12 de Abril de 2023



1. Moysés Nussenzveig, Curso de Física Básica, vol. 2 seções 3.4 e 3.5
2. Kleppner e Kolenkow, introduction to Mechanics, seção 10.1
3. Kittel, Knight e Ruderman, Mechanics, capítulo 7
4. Feynman, Leyton e Sands, Lectures on Physics, vol. 1, capítulo 21

Onde paramos:

- Procuremos duas soluções linearmente independentes para a equação homogênea

$$a \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = 0$$

- Tentemos $x(t) = e^{pt}$ onde p é uma constante. Substituindo temos que

$$a p^2 + b p + c = 0$$

logo

$$p = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Primeiro caso: o discriminante é positivo $b^2 - 4ac > 0$ há duas raízes distintas p_1 e p_2

solução geral

$$x(t) = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t}$$

- Segundo caso: discriminante nulo $b^2 - 4ac = 0$ há uma única raiz $\gamma = -\frac{b}{2a}$. Qual a segunda solução?

Tentamos

$$x(t) = f(t) e^{\gamma t} \implies \frac{d^2 f}{dt^2} = 0 \implies f(t) = c_1 + c_2 t$$

logo

$$x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{\gamma t}$$

Estudemos o terceiro caso:

- Terceiro caso: o discriminante é negativo $b^2 - 4ac < 0$ logo $p_{1,2} = -\gamma \pm i\omega$

$$x(t) = e^{-\gamma t} (c_1 e^{-i\omega t} + c_2 e^{+i\omega t})$$

- O que é a exponencial imaginária? Lembremos da fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} \equiv \cos \theta + i \sin \theta$$

VISÃO GERAL ANTES DOS DETALHES

- Logo podemos escrever as soluções:

$$x(t) = e^{-\gamma t} [c'_1 \cos(\omega t) + c'_2 \sin(\omega t)]$$

Exemplo: oscilador harmônico simples

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0 \implies p = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}} \equiv \pm i\omega \implies x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$$

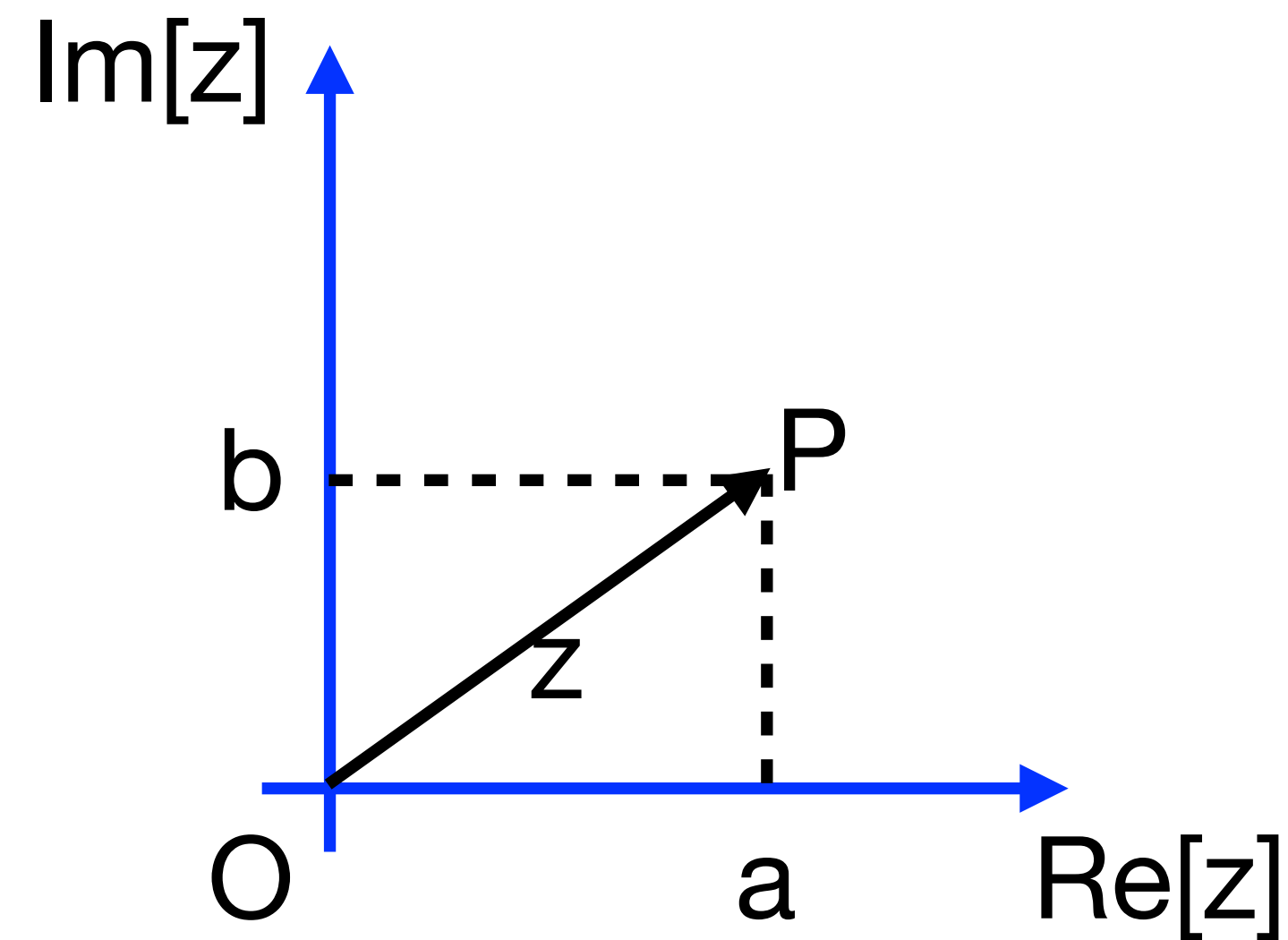
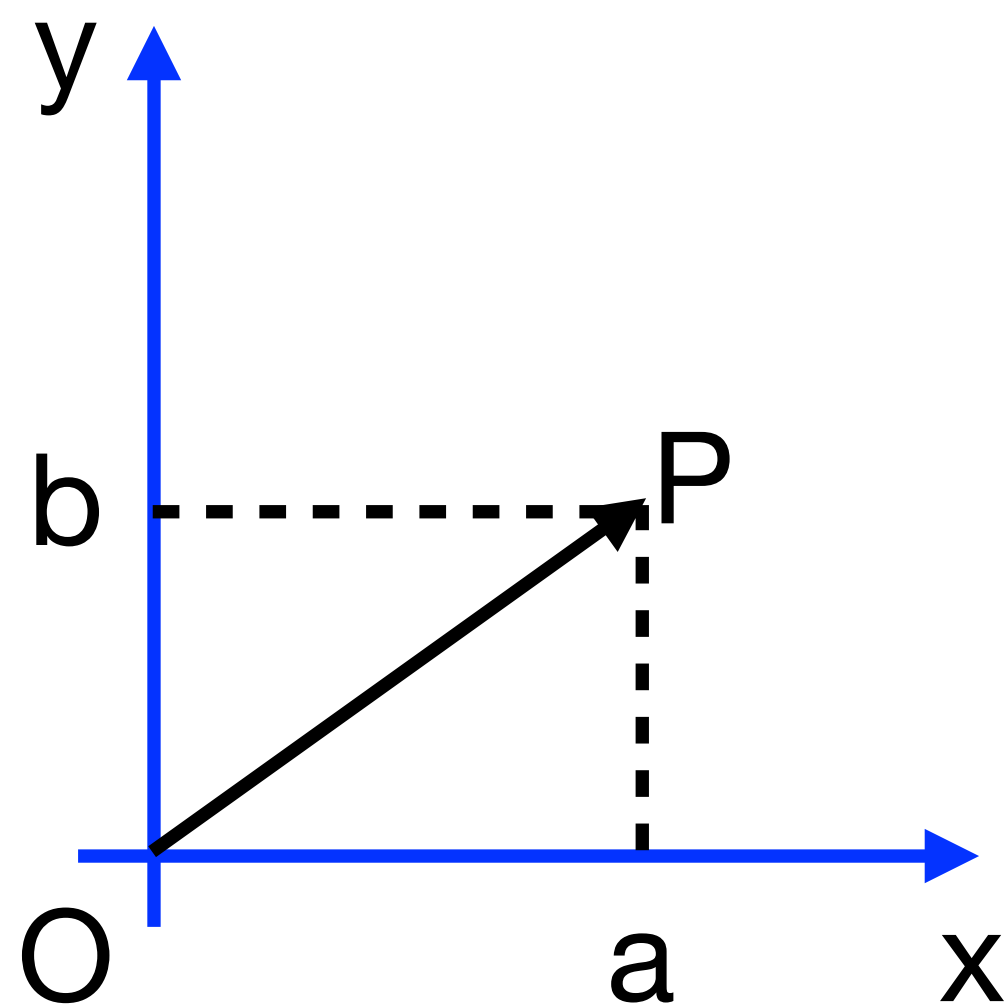
Revisão de números complexos

- Denotamos a unidade imaginária por $i \equiv \sqrt{-1}$
- Números complexos são da forma $z = a + i b$
- Se $z_1 = a_1 + i b_1$ e $z_2 = a_2 + i b_2$
a soma é dada por $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i (b_1 + b_2)$
e o produto por $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i (a_1 b_2 + a_2 b_1)$
- O complexo conjugado do número é $z^* = a - i b$
- O módulo ao quadrado de z é $|z|^2 = z z^* = a^2 + b^2$

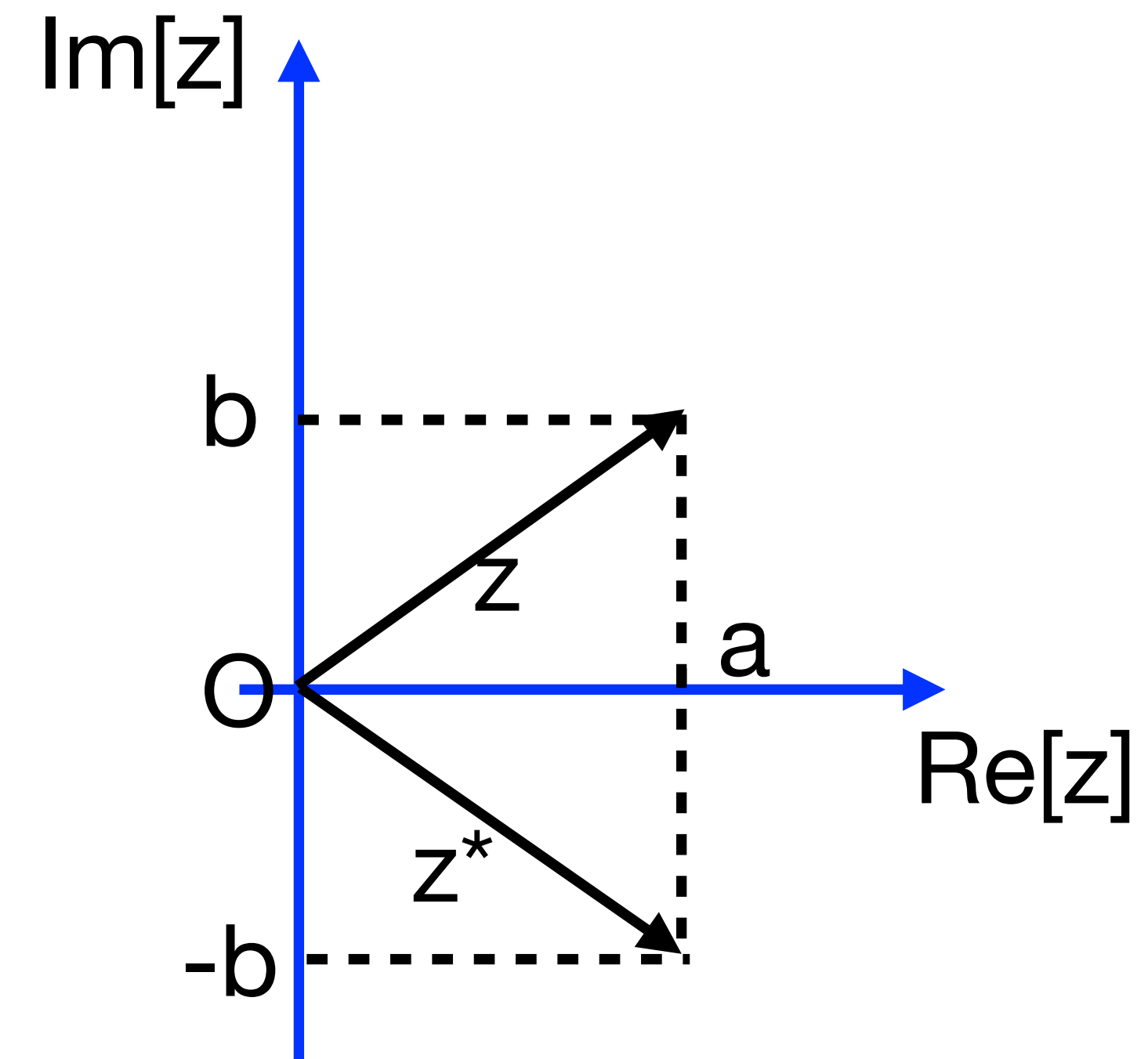
- **Plano Argand-Gauss:** considere um ponto P no plano (x,y)

$$\overrightarrow{OP} = a\vec{i} + b\vec{j}$$

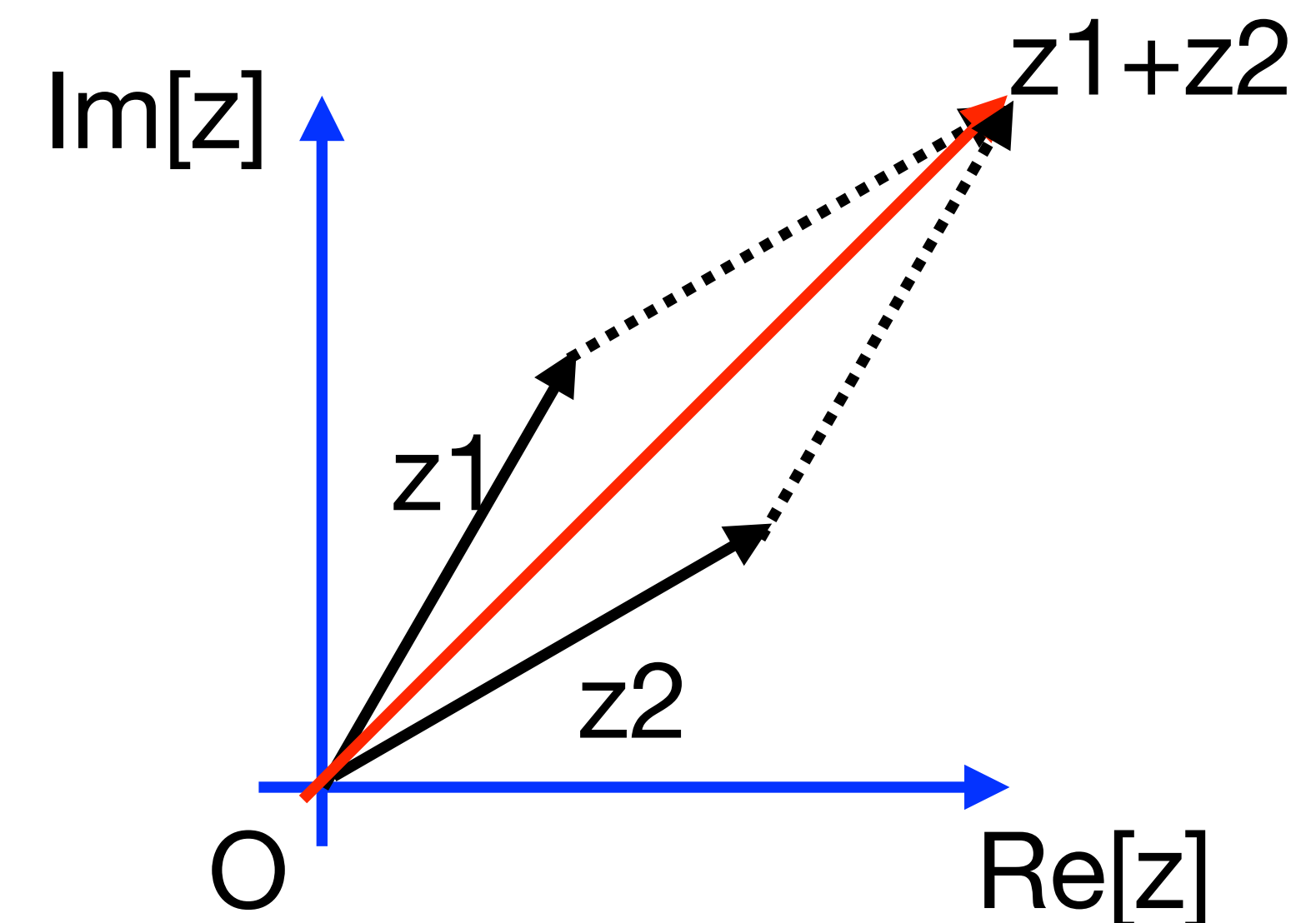
Agora associamos \overrightarrow{OP} com $z = a + ib$



- Neste plano o complexo conjugado é a reflexão no eixo real:



- A soma é a soma de vetores!



- **Fórmula de Euler:**

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

- Comporta-se exatamente como uma exponencial:

1. Para $\theta = 0 \implies e^{i0} = \cos(0) + i \sin(0) = 1$

2. E também satisfaz: $\frac{d}{dt}(e^{iat}) = ia e^{iat}$

3. Dados θ_1 e $\theta_2 \implies e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

Números complexos na forma trigonométrica:

- Dado o número complexo $z = a + i b$

$$a = r \cos \theta \text{ e } b = r \sin \theta \implies z = r \cos \theta + i r \sin \theta = r e^{i\theta}$$

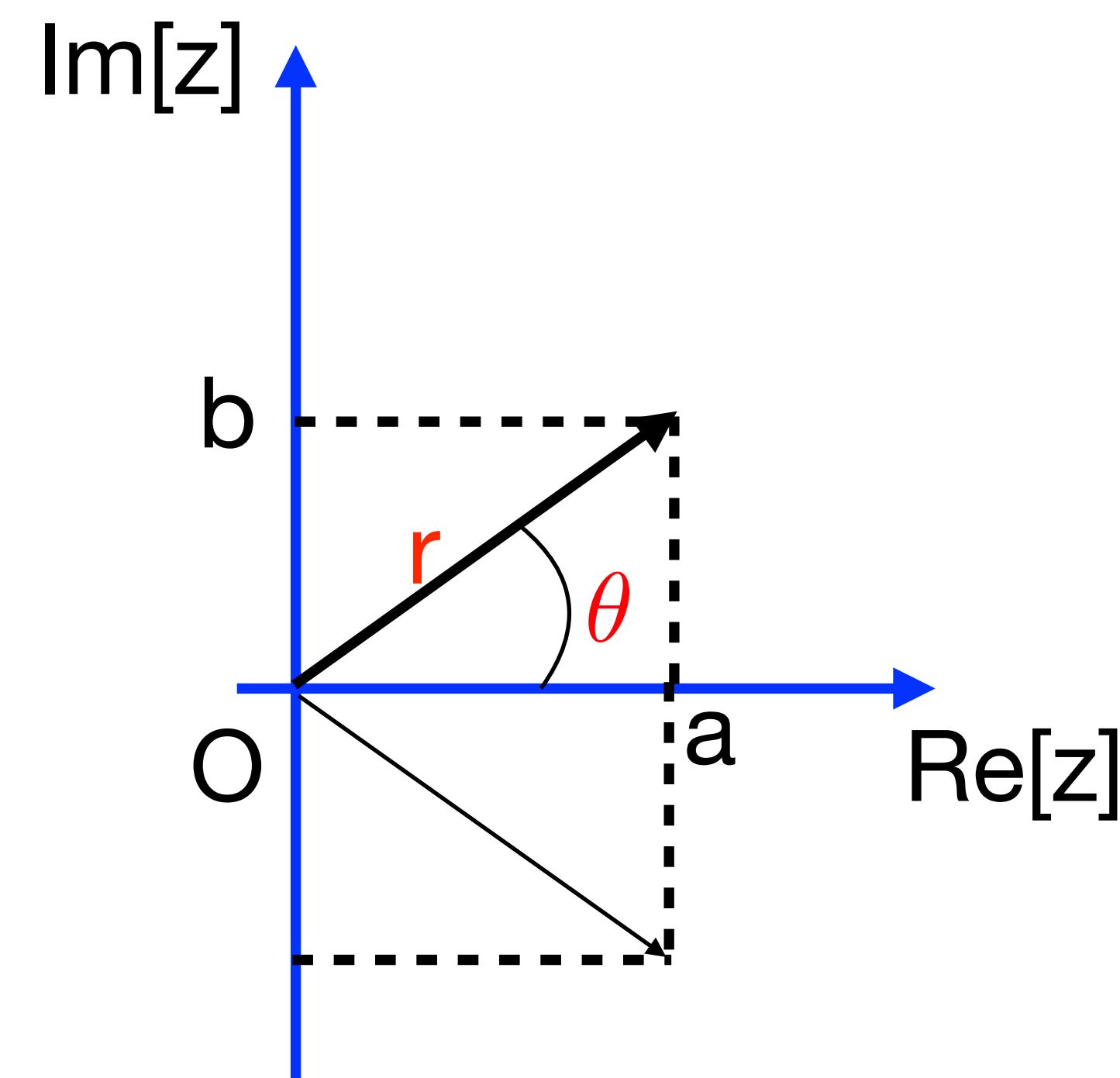
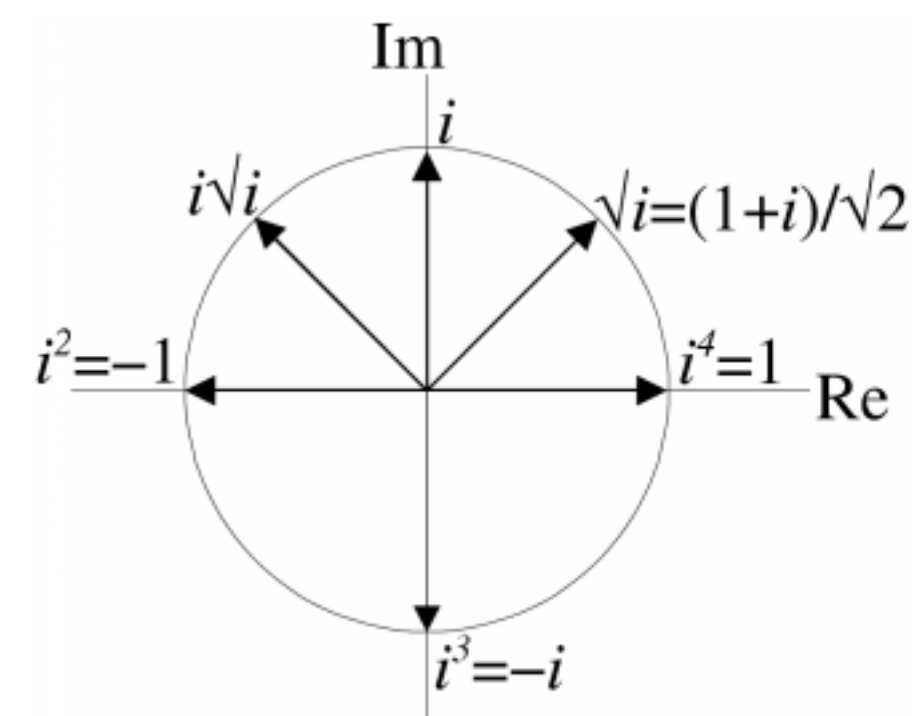
- Note: $z^* = r e^{-i\theta}$

$$|z|^2 = z^* z = r^2$$

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}} \quad -1 = e^{i\pi}$$

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$z_1 / z_2 = r_1 e^{i\theta_1} / r_2 e^{i\theta_2} = r_1 / r_2 e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$



Um pouco mais:

- Podemos expressar as funções seno e cosseno usando a fórmula de Euler

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

- Podemos definir exponenciais de números complexos:

$$e^{a+ib} \equiv e^a e^{ib}$$

2. Retornando à nossa equação diferencial:

$$a \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = 0$$

- Consideremos uma função complexa de t $z(t) = x(t) + i y(t)$

- Temos que $\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt} [x(t) + iy(t)] = \frac{dx}{dt} + i \frac{dy}{dt}$

- Note que $\operatorname{Re} \left[\frac{dz}{dt} \right] = \frac{d}{dt} [\operatorname{Re}(z(t))]$

- Generalizamos a equação diferencial para $a \frac{d^2 z}{dt^2} + b \frac{dz}{dt} + cz = 0$

- Note que $\operatorname{Re} \left\{ a \frac{d^2 z}{dt^2} + b \frac{dz}{dt} + cz \right\} = a \frac{d^2}{dt^2} \operatorname{Re}[z] + b \frac{d}{dt} \operatorname{Re}[z] + c \operatorname{Re}[z]$

- Logo resolvendo

$$a \frac{d^2 z}{dt^2} + b \frac{dz}{dt} + cz = 0 \quad \text{obtemos a solução de} \quad a \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = 0$$

fazendo $x(t) = \text{Re}[z(t)]$ (funciona também com a parte imaginária :-)

- Agora procurando soluções da forma $z(t) = e^{pt}$ devemos ter $a p^2 + b p + c = 0$

para o caso $b^2 - 4ac < 0$ temos $p_{1,2} = -\gamma \pm i\omega$

$$z(t) = (c'_1 e^{-\gamma - i\omega t} + c'_2 e^{-\gamma + i\omega t}) \implies x(t) = e^{-\gamma t} (c_1 e^{-i\omega t} + c_2 e^{+i\omega t})$$

$$x(t) = e^{-\gamma t} [d_1 \cos(\omega t) + d_2 \sin(\omega t)]$$

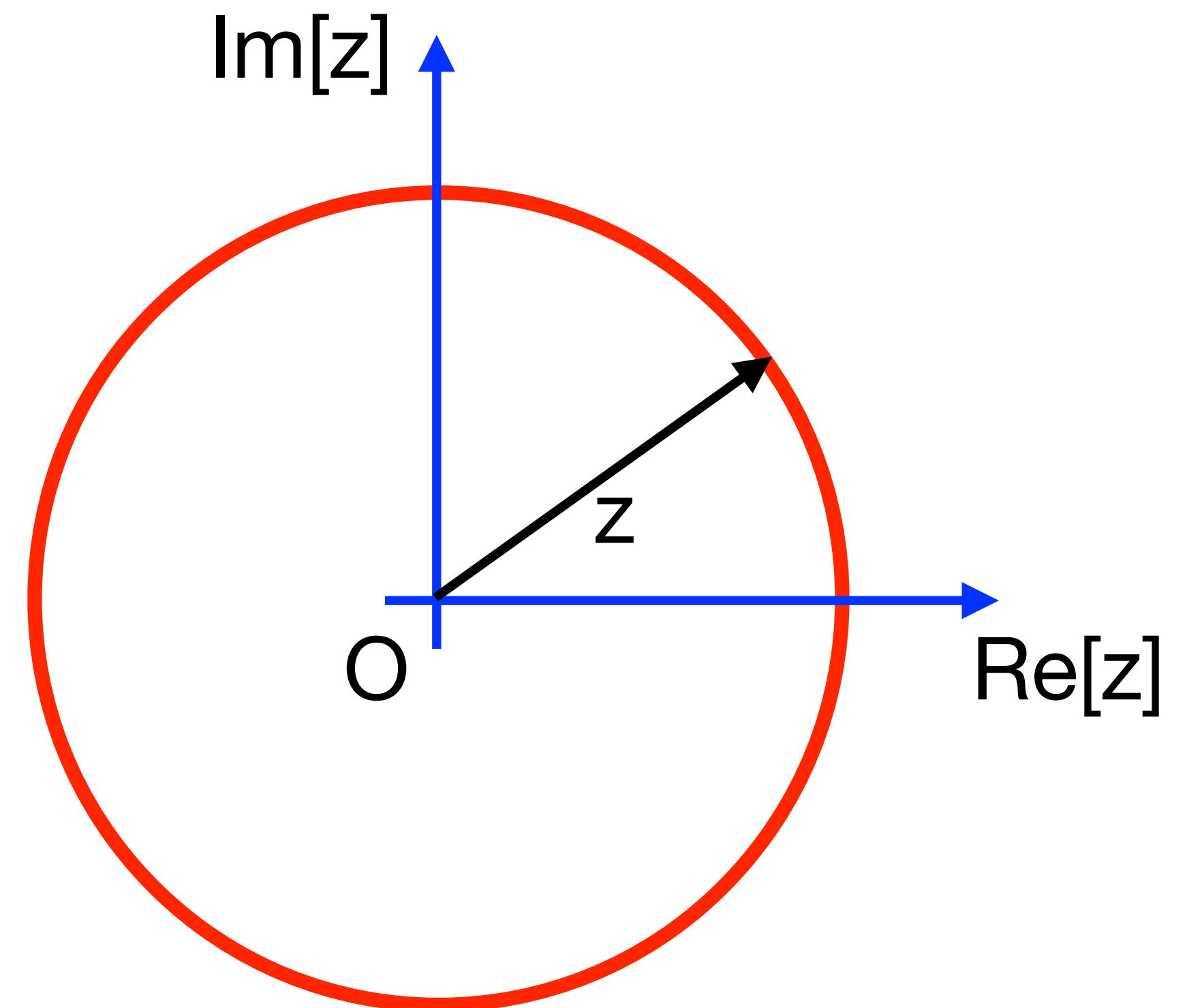
3. Oscilador harmônico simples (ohs)

- Como vimos um OHS obedece $m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \implies p = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}} \equiv \pm i\omega$

$$x(t) = c_1 e^{-i\omega t} + c_2 e^{+i\omega t} = d_1 \cos(\omega t) + d_2 \sin(\omega t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

- A relação com o movimento circular é direta

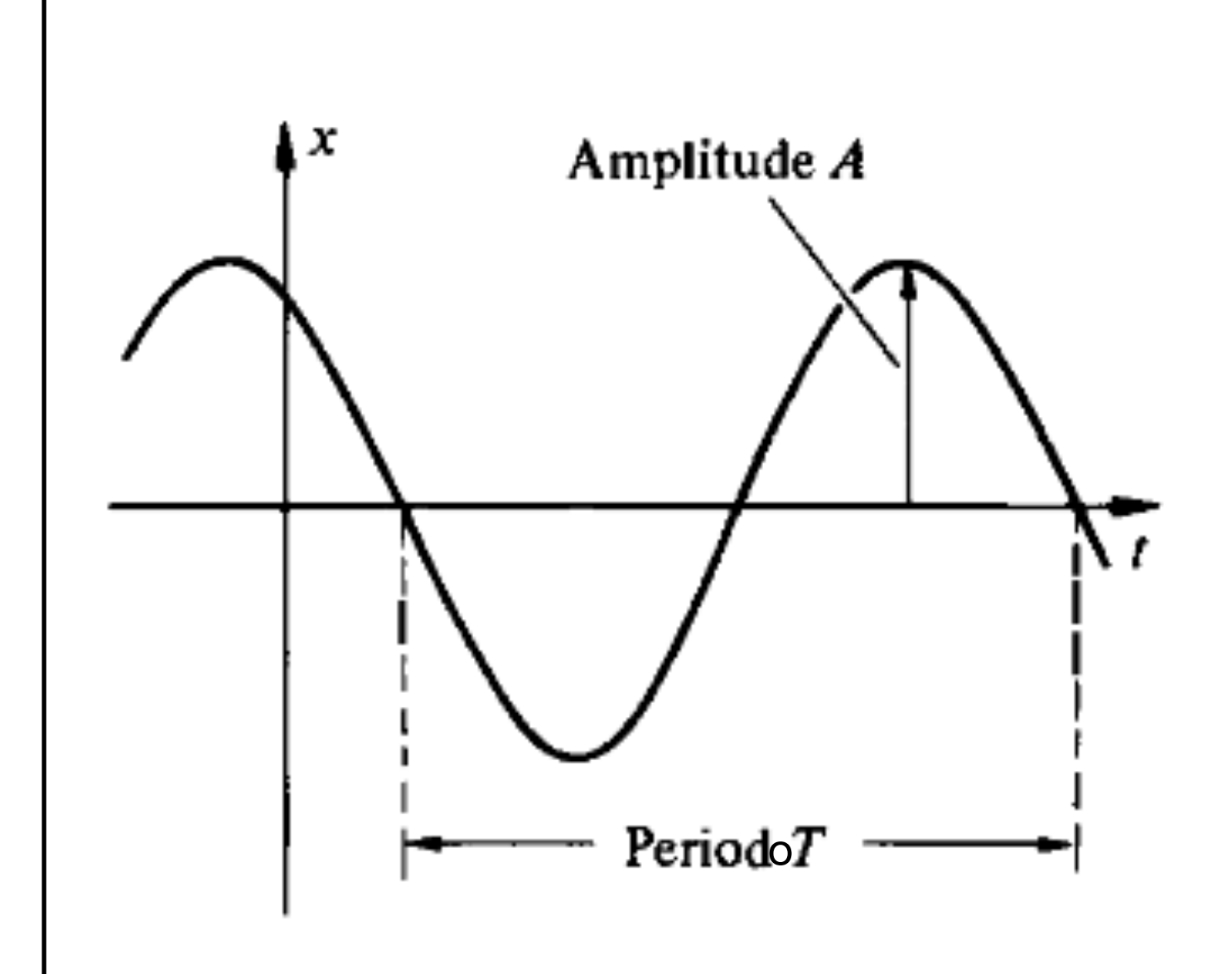
$$z(t) = A e^{i\phi} e^{+i\omega t}$$



$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad \text{frequência angular } \omega$$

• Período $\omega T = 2\pi \implies T = \frac{2\pi}{\omega}$

• Frequência $\nu = \frac{1}{T}$ em Hz com $\omega = 2\pi\nu$



• Energia cinética, potencial e total: dado $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$U = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

$$E_{\text{total}} = E_{\text{cin}} + U = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$$

Energias médias: definimos a média temporal por

$$\langle f \rangle \equiv \frac{1}{T} \int_0^T dt f(t) \quad \text{para} \quad f(t+T) = f(t)$$

$$\langle E_{\text{cin}} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$= \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \frac{1}{T} \int_{\phi/\omega}^{T+\phi/\omega} dt' \sin^2(\omega t')$$

$$= \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \frac{1}{T} \int_{\phi/\omega}^{T+\phi/\omega} dt' \frac{1}{2} [1 - \cos(2\omega t')]$$

$$= \frac{1}{4} m \omega^2 A^2$$

Analogamente

$$\langle U \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

$$= \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \frac{1}{T} \int_{\phi/\omega}^{T+\phi/\omega} dt' \cos^2(\omega t')$$

$$= \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \frac{1}{T} \int_{\phi/\omega}^{T+\phi/\omega} dt' \frac{1}{2} [1 + \cos(2\omega t')]$$

$$= \frac{1}{4} m \omega^2 A^2$$

$$= \langle E_{\text{cin}} \rangle$$

(Obs: atrito invalida essa relação!)

4. Superposição de OHS

1. Consideremos a soma de duas soluções na mesma direção e frequência

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \phi_1) \quad \text{e} \quad x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

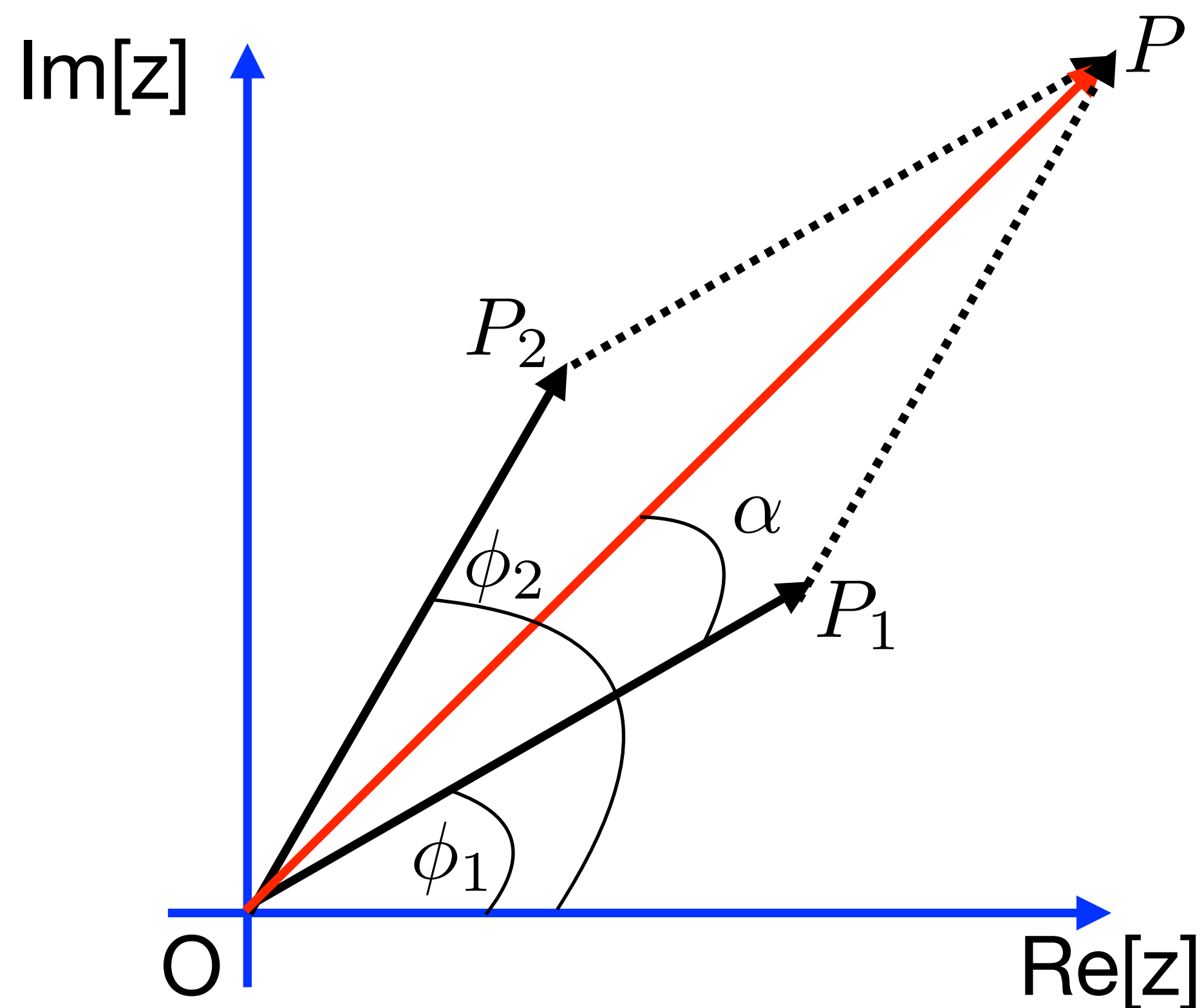
Calculemos $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

usando:

$$z(t) = A_1 e^{i(\omega t + \phi_1)} + A_2 e^{i(\omega t + \phi_2)} = z_1(t) + z_2(t)$$

$$z(t) = A e^{i(\omega t + \phi_1 + \alpha)}$$

$$\begin{aligned} |z(t)|^2 &= z^* z = (z_1^* + z_2^*)(z_1 + z_2) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1^* z_2 + z_1 z_2^* \\ &= A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 \left[e^{i(\phi_2 - \phi_1)} + e^{i(\phi_1 - \phi_2)} \right] \\ &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) \\ &= A^2 \end{aligned}$$



• Vamos obter a fase: $Ae^{i(\omega t + \phi_1 + \alpha)} = A_1e^{i(\omega t + \phi_1)} + A_2e^{i(\omega t + \phi_2)}$

$$Ae^{i\alpha} = A_1 + A_2e^{i(\phi_2 - \phi_1)}$$

$$e^{i\alpha} = \frac{A_1 + A_2e^{i(\phi_2 - \phi_1)}}{A}$$

2. Consideremos a soma de duas soluções de frequência e em direções perpendiculares

Movimento no plano de uma massa presa a uma mola $m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -k\vec{r} = -m\omega^2 \vec{r}$

escrevendo $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ segue $\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$ e $\frac{d^2 y}{dt^2} = -\omega^2 y$

solução: $x(t) = A \cos(\omega t + \phi_1)$
 $y(t) = B \cos(\omega t + \phi_2)$

Qual a trajetória descrita no plano?

para facilitar a álgebra, tomamos $\phi_1 = 0$

1. Caso $\phi_2 = 0$

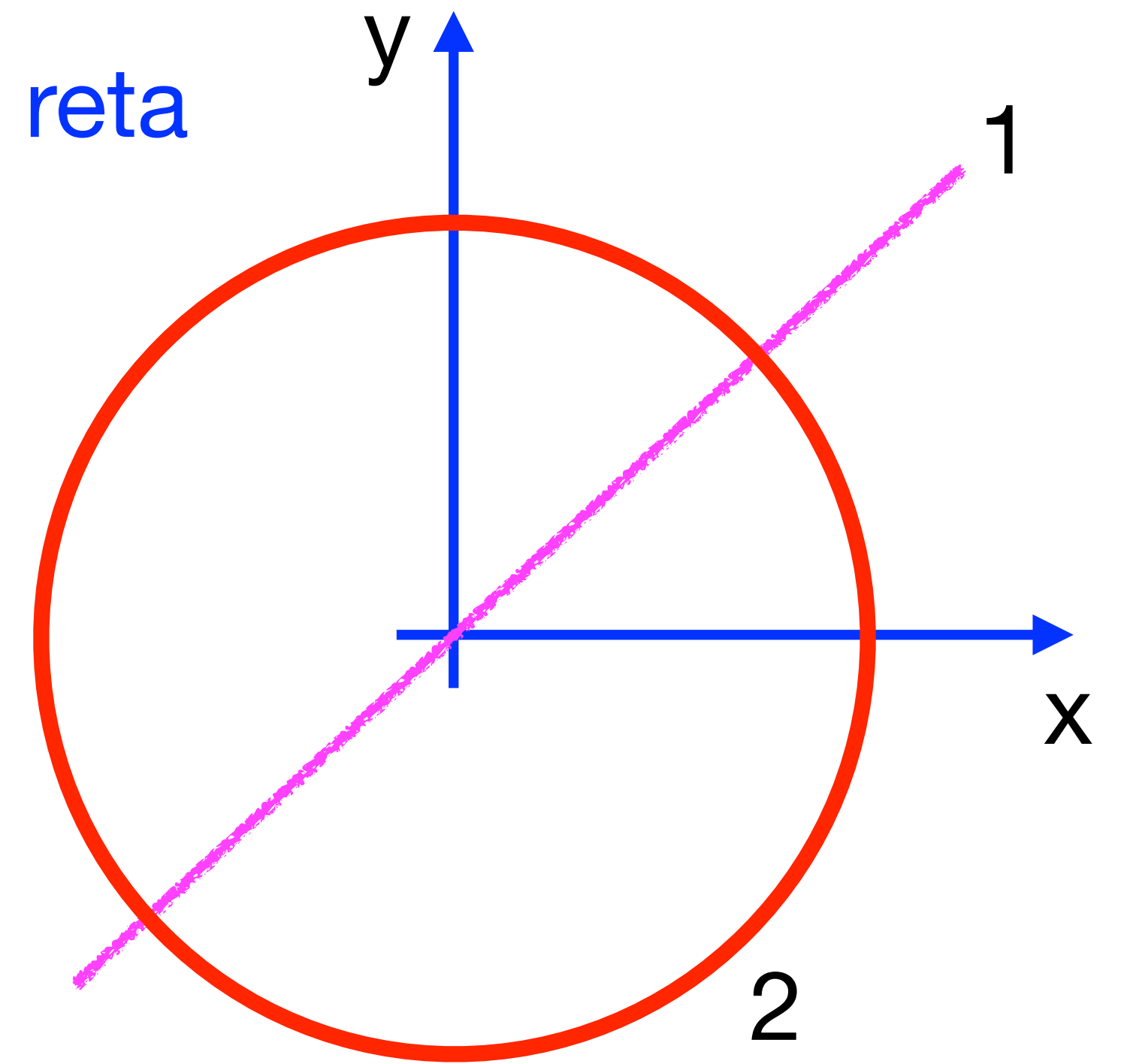
$$\left. \begin{array}{l} x(t) = A \cos(\omega t) \\ y(t) = B \cos(\omega t) \end{array} \right\} \implies x(t) = \frac{A}{B} y(t)$$

é uma reta

2. Caso $\phi_2 = -\frac{\pi}{2}$ e $A = B$

$$\left. \begin{array}{l} x(t) = A \cos(\omega t) \\ y(t) = A \sin(\omega t) \end{array} \right\} \implies x^2(t) + y^2(t) = A^2$$

é um círculo



3. Caso geral

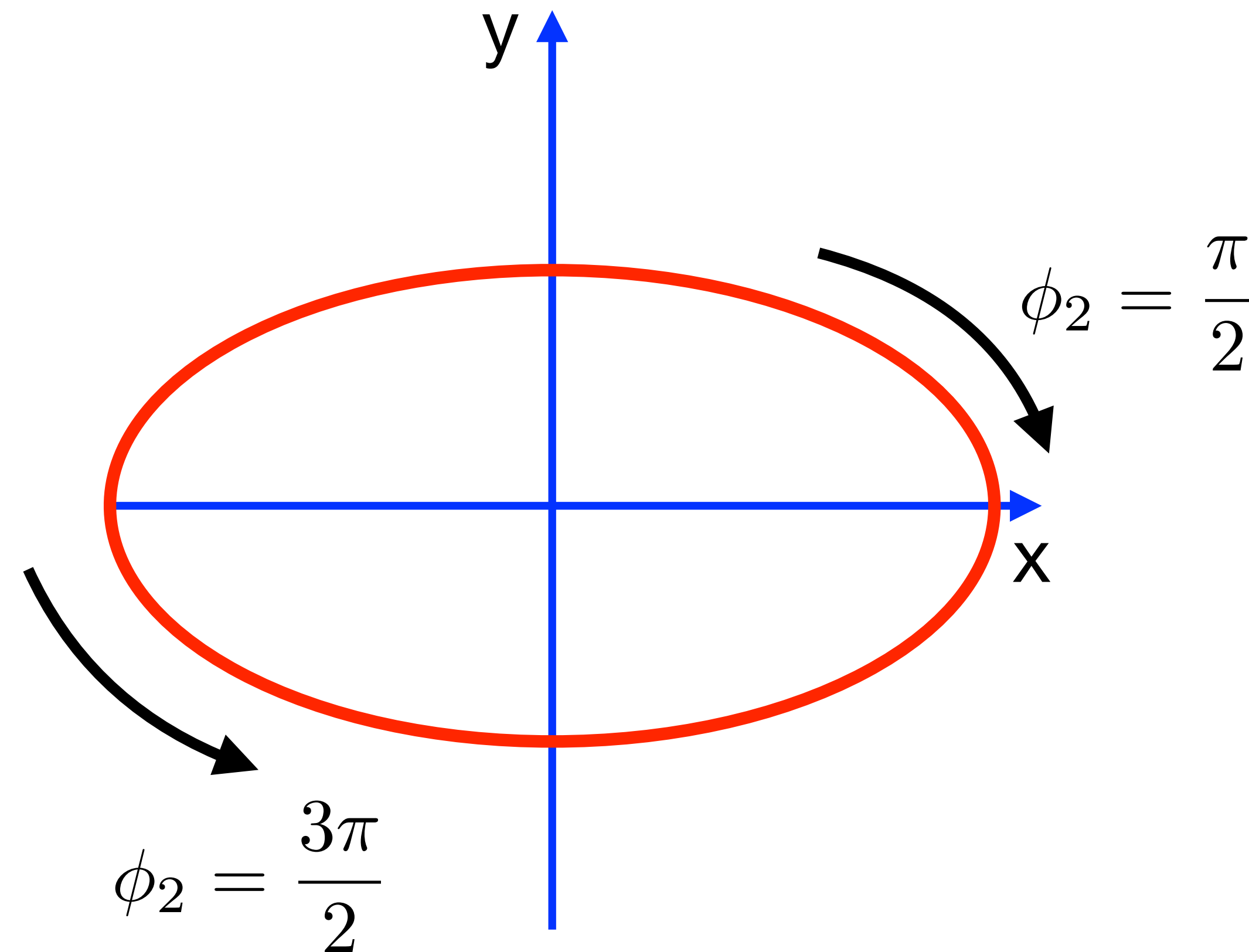
$$\begin{cases} x(t) = A \cos(\omega t) \\ y(t) = B \cos(\omega t + \phi_2) = B[\cos(\omega t) \cos(\phi_2) - \sin(\omega t) \sin(\phi_2)] \end{cases}$$

Eliminando o tempo: $\frac{y}{B} = \frac{x}{A} \cos(\phi_2) \pm \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2} \sin(\phi_2)$

temos que: $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2\frac{xy}{AB} \cos(\phi_2) = \sin^2(\phi_2)$ **é uma elipse!**

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2\frac{xy}{AB} \cos(\phi_2) = \sin^2(\phi_2)$$

casos particulares $\phi_2 = \frac{\pi}{2}$ e $\phi_2 = \frac{3\pi}{2}$



1. Moysés Nussenzveig, Curso de Física Básica, vol. 2 seções 3.4 e 3.5
2. Kleppner e Kolenkow, introduction to Mechanics, seção 10.1
3. Kittel, Knight e Ruderman, Mechanics, capítulo 7
4. Feynman, Leyton e Sands, Lectures on Physics, vol. 1, capítulo 21

4. Superposição de OHS

1. Consideremos a soma de duas soluções na mesma direção e frequência

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \phi_1) \quad \text{e} \quad x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

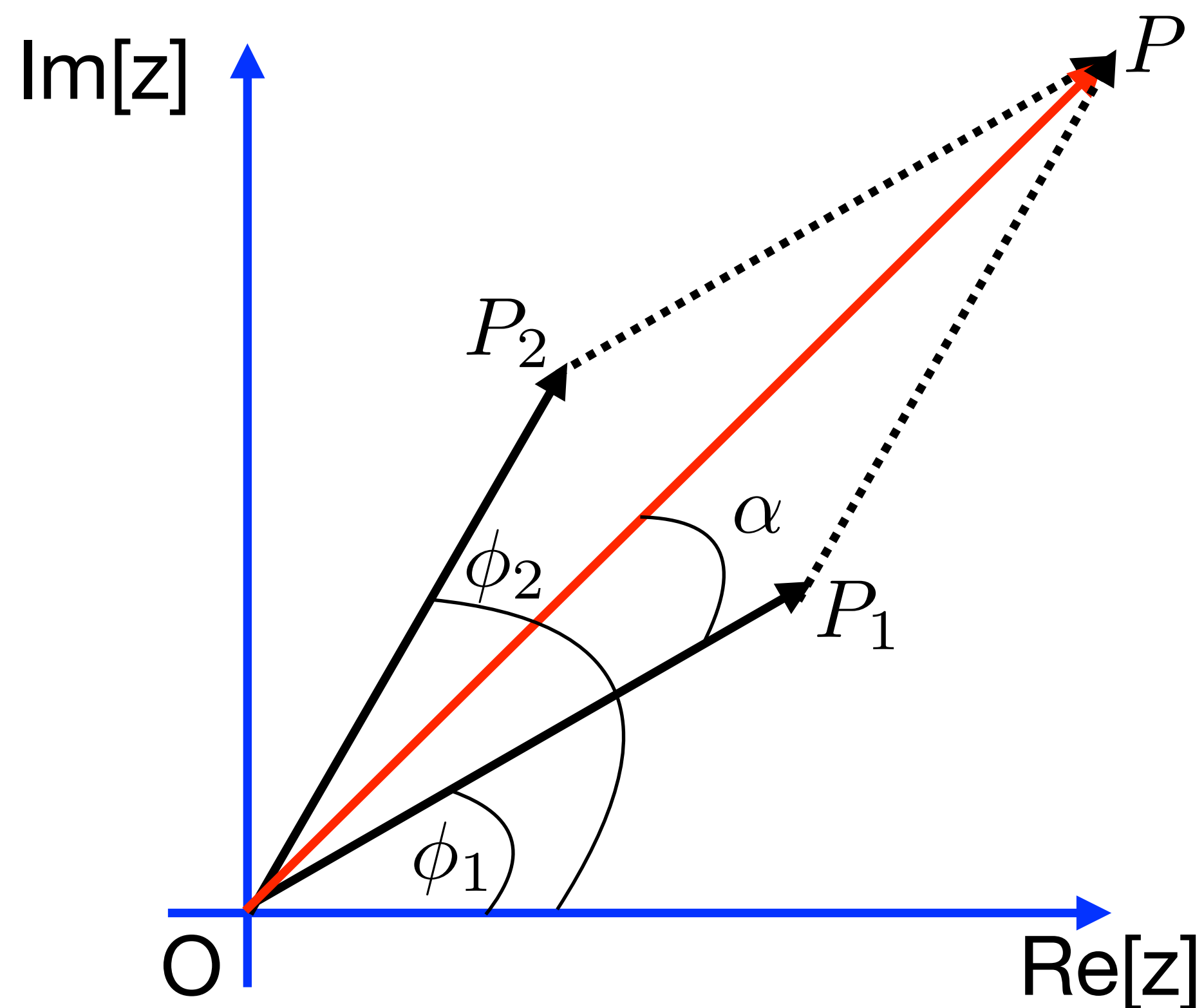
Calculemos $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

usando:

$$z(t) = A_1 e^{i(\omega t + \phi_1)} + A_2 e^{i(\omega t + \phi_2)} = z_1(t) + z_2(t)$$

$$z(t) = A e^{i(\omega t + \phi_1 + \alpha)}$$

$$\begin{aligned} |z(t)|^2 &= z^* z = (z_1^* + z_2^*)(z_1 + z_2) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1^* z_2 + z_1 z_2^* \\ &= A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 \left[e^{i(\phi_2 - \phi_1)} + e^{i(\phi_1 - \phi_2)} \right] \\ &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) \\ &= A^2 \end{aligned}$$

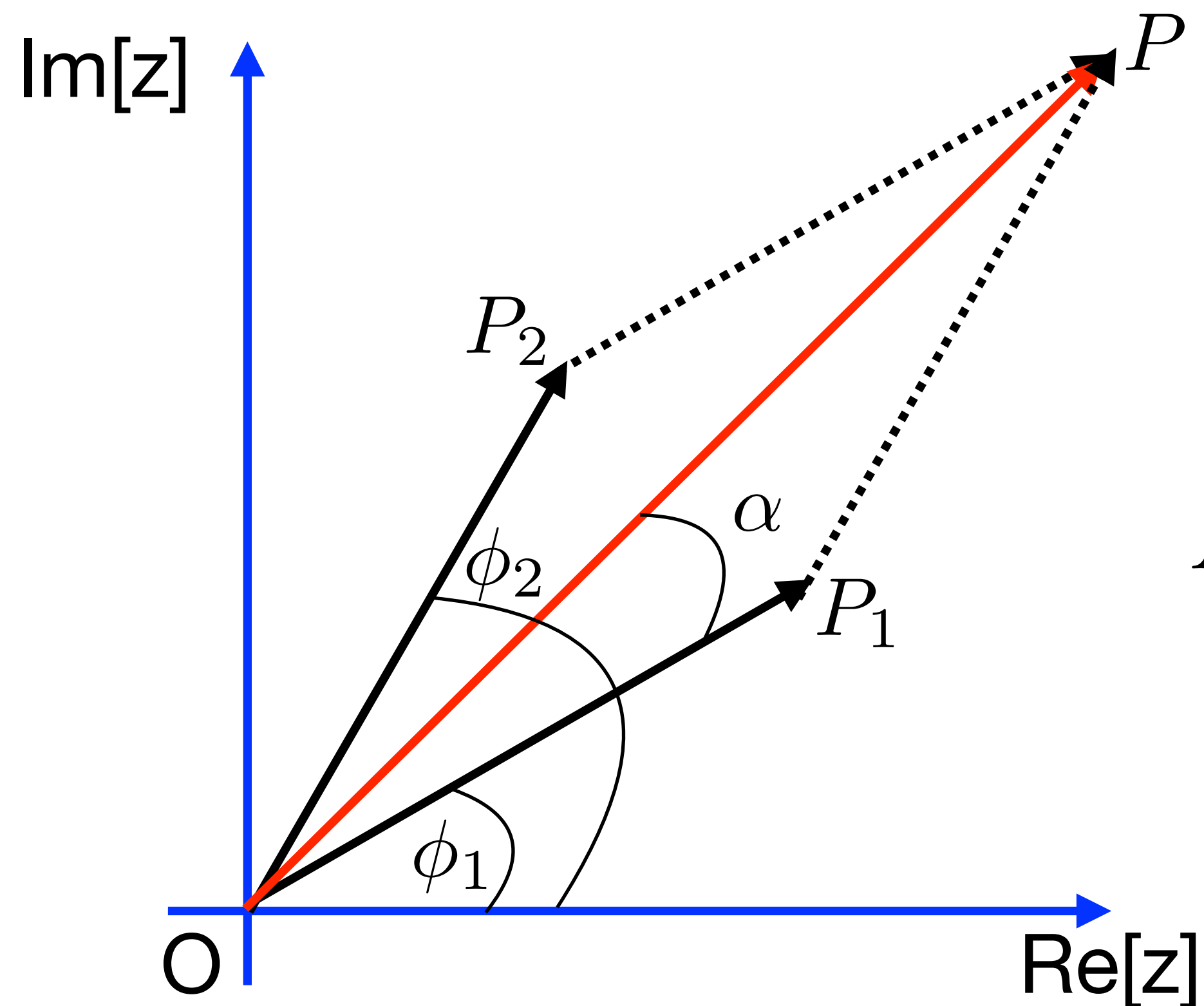


4. Superposição de OHS

1. Consideremos a soma de duas soluções na mesma direção e frequência

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \phi_1) \quad \text{e} \quad x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

Calculemos $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$



Usando o triângulo OP_1P

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)$$

$$A_2 \sin(\phi_2 - \phi_1) = A \sin(\alpha) \implies \sin(\alpha) = \frac{A_2}{A} \sin(\phi_2 - \phi_1)$$

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi_1 + \alpha)$$