Primeiro bloco

Oscilações

Conteúdo:

1. Idéias básicas
2. Oscilador harmônico simples
3. Oscilador harmônico amortecido
4. Oscilador forçado
5. Modos normais

Raul Abramo (abramo@if.usp.br)

Referências:

1. Moysés Nussenzveig, *Curso de Física Básica*, vol. 2, Cap. 3.1 a 3.3
2. Kittel, Knight e Ruderman, *Mechanics*, Cap. 7
3. Feynman, Leighton & Sands, *Lectures on Physics*, Vol. 1, capítulo 21

- **Oscilações podem ser bem complexas…**

https://www.youtube.com/watch?v=U39RMUzCjiU

- **… e podem ter grandes consequências!**

https://www.youtube.com/watch?v=3mclp9QmCGs

- **O oscilador harmônico é o ponto de partida em muitas áreas da Física!**

Idéias básicas

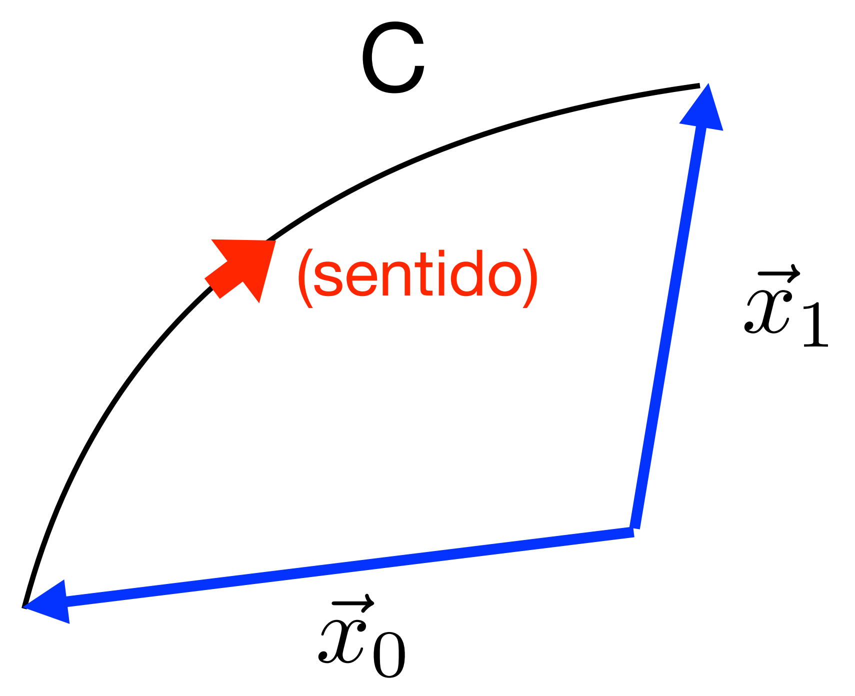
primeira aula

1. Revisão importantíssima!

Trabalho:

Dada uma força $\vec{F}$ e um caminho C

$$W = \int_C d\vec{\ell} \cdot \vec{F}$$



$d\vec{\ell}$ é o deslocamento ao longo da curva

- Note: em geral, o trabalho depende da força e do caminho tomado (a curva)
- Utilidade desse conceito: teorema do trabalho e energia cinética

$$\frac{1}{2}m\vec{v}_1^2 - \frac{1}{2}m\vec{v}_0^2 = W$$

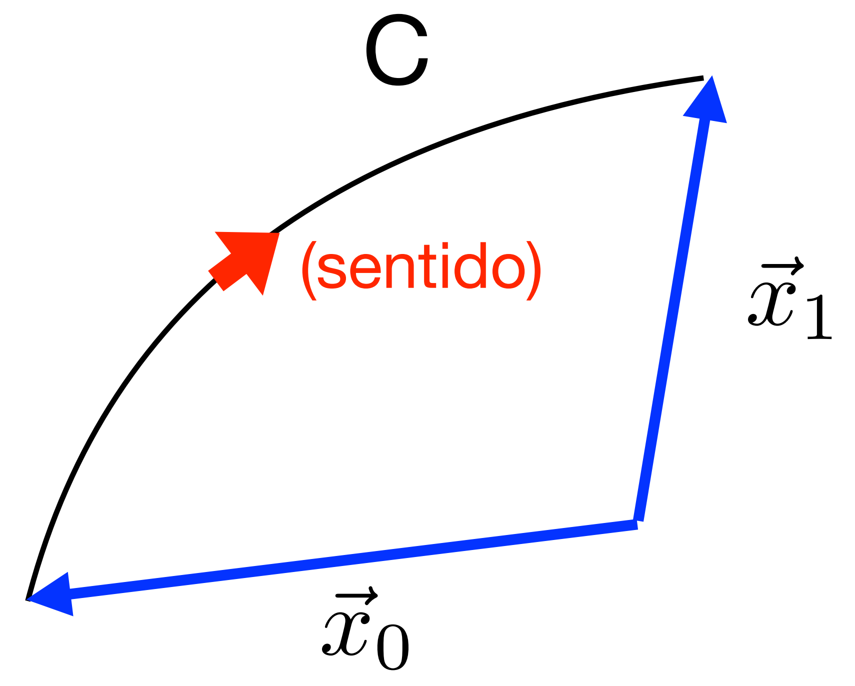
Vale para qualquer força?

$\Rightarrow$ a variação da energia cinética é igual ao **trabalho** realizado!

SIM — se for a força **total**

- Caso importante: para forças conservativas, o trabalho depende apenas do pontos **inicial** e **final**, mas **não do caminho** entre estes pontos!

- Consequência: existe uma **função** chamada **energia potencial** $U(\vec{x})$ tal que:



$$W = U(\vec{x}_0) - U(\vec{x}_1)$$

$$\vec{F} = -\nabla U$$

de tal forma que podemos escrever:

$$U(\vec{x}) = U(\vec{x}_{\mathrm{ref}}) - \int_{\vec{x}_{\mathrm{ref}}}^{\vec{x}} d\vec{\ell} \cdot \vec{F}$$

- Para forças conservativas o teorema da energia cinética trabalho fica:

$$\frac{1}{2}m\vec{v}_1^2 - \frac{1}{2}m\vec{v}_0^2 = U(\vec{x}_0) - U(\vec{x}_1) \Longrightarrow \frac{1}{2}m\vec{v}_0^2 + U(\vec{x}_0) = \frac{1}{2}m\vec{v}_1^2 + U(\vec{x}_1) = E_{\mathrm{total}}$$

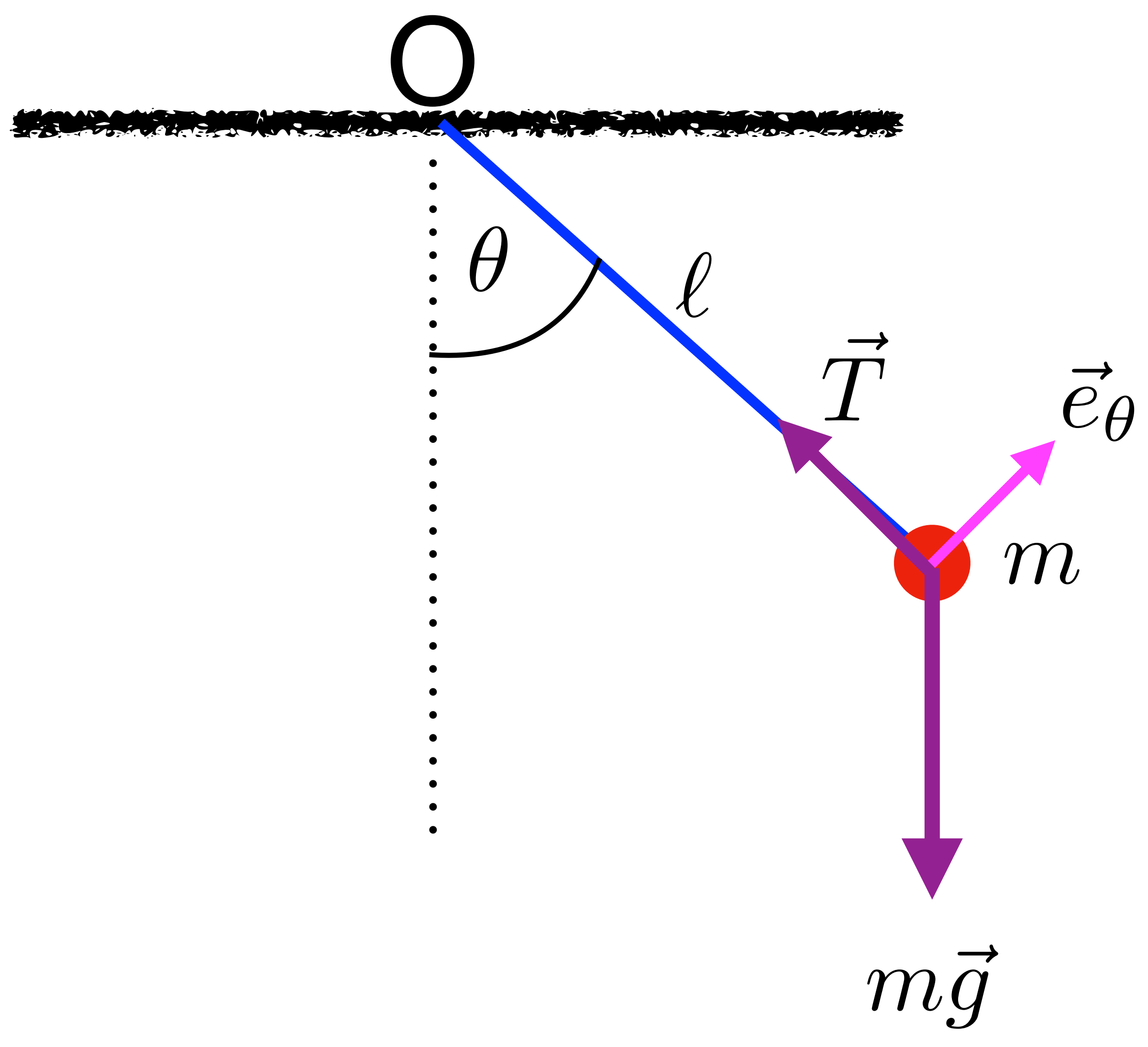
A energia mecânica total é conservada!

2. Oscilações estão em todos os lugares:

1. batidas do coração (periódica)
2. respiração
3. piscar
4. amanhecer/pôr dor sol
5. pêndulo de um relógio
6. etc etc etc!

Vamos nos concentrar primeiro em sistemas simples, mas que se manifestam em inúmeros sistemas reais

• Consideremos um **pêndulo simples**



Aceleração na direção $\vec{e}_\theta$

$$m\ell\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta$$

equação muito difícil de resolver!

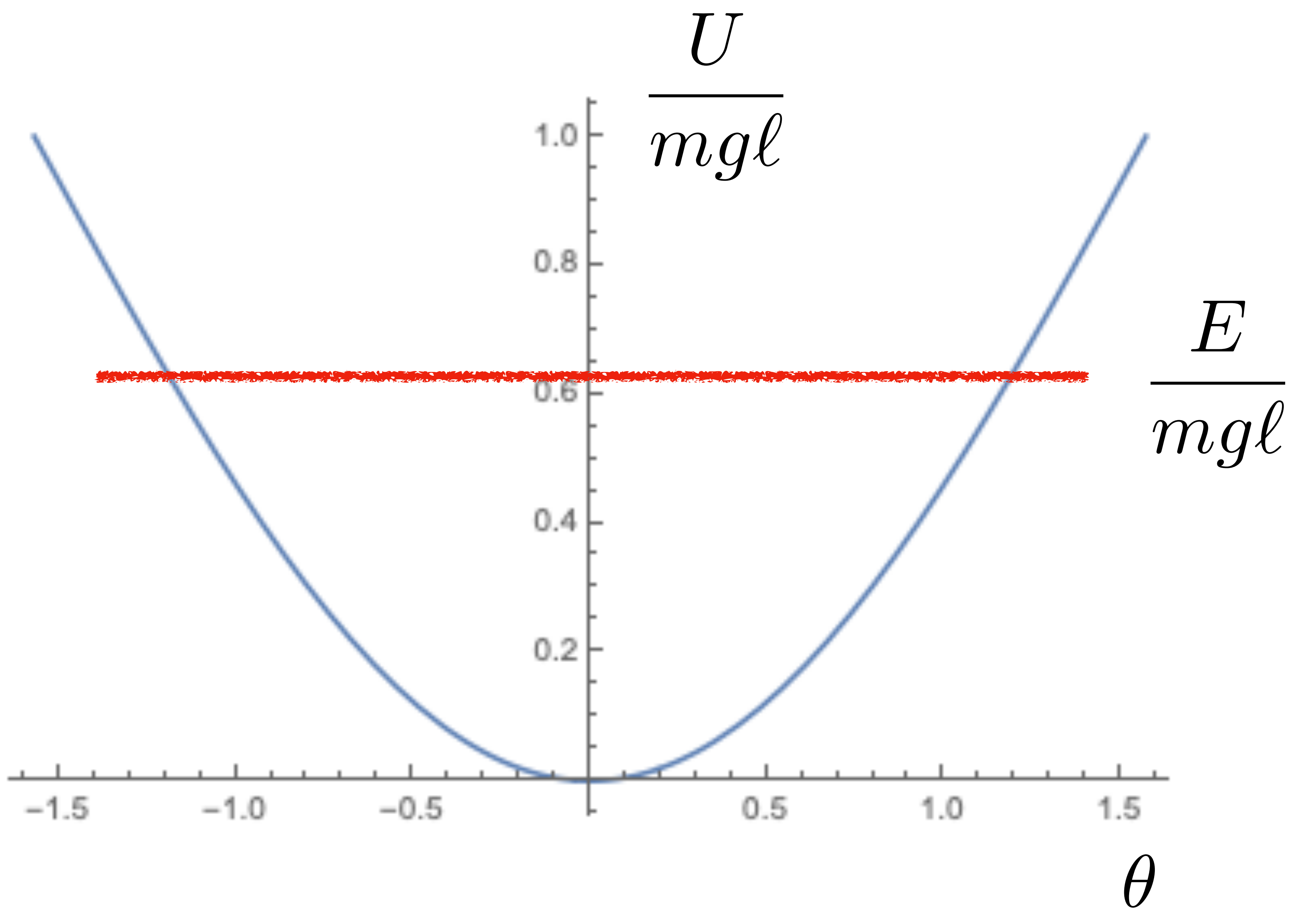
• Tomando o zero da energia potencial como $\theta = 0$

$$U(\theta) = mg\ell(1 - \cos\theta)$$

• A energia total é

$$\vec{v} = v_\theta \hat{e}_\theta = \left(\ell\frac{d\theta}{dt}\right)\hat{e}_\theta$$

$$E = \frac{1}{2}m\left(\ell\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + U(\theta)$$

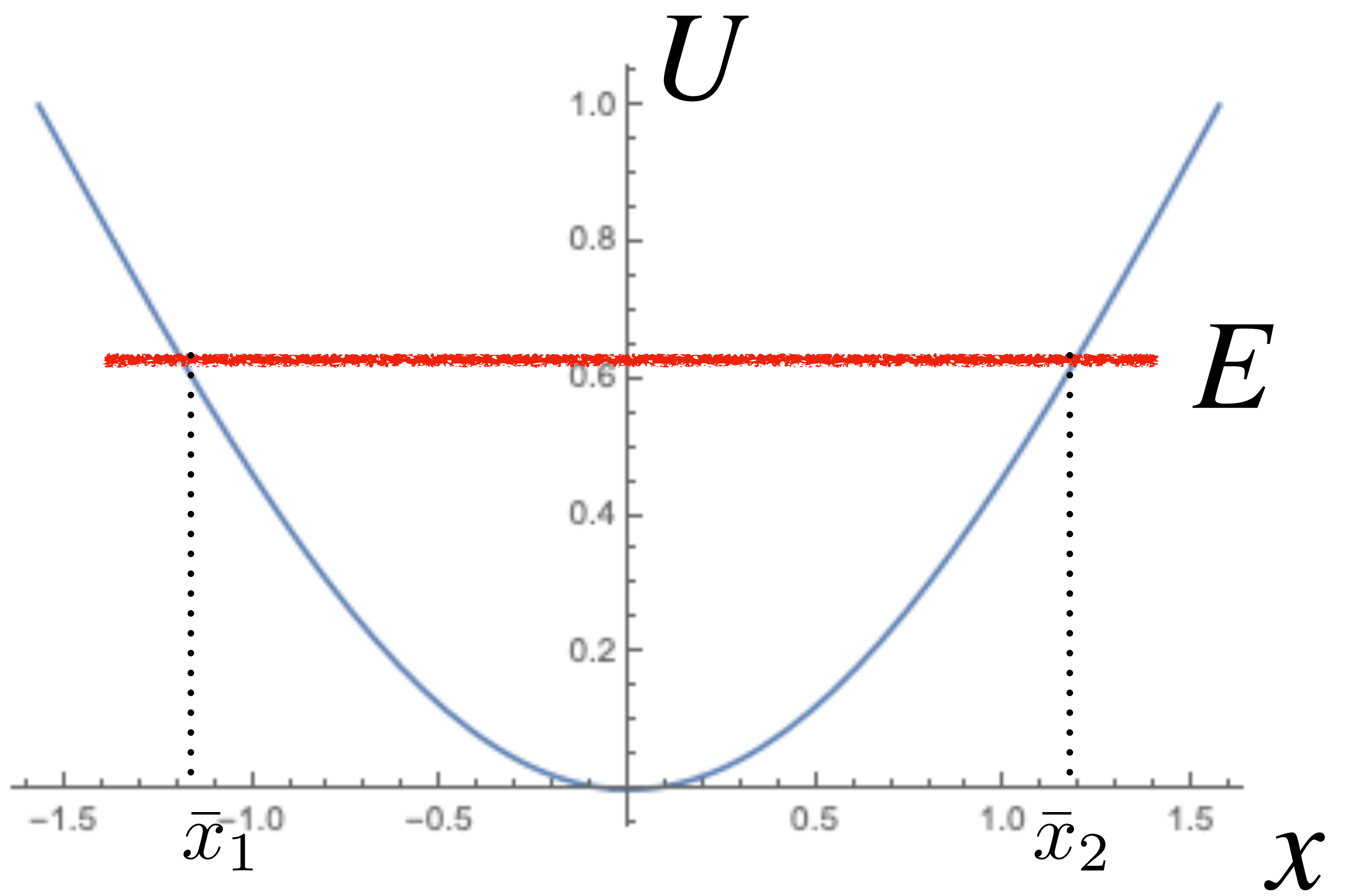


Por que oscila?

- Como podemos calcular o período? Em geral para uma **força conservativa:**

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + U(x)$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]} \Longrightarrow \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} dx \, \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}}$$



pontos de retorno clássicos

- Integrando entre os pontos de retorno clássicos temos:

$$\frac{T}{2} = \int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} dx \, \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}}$$

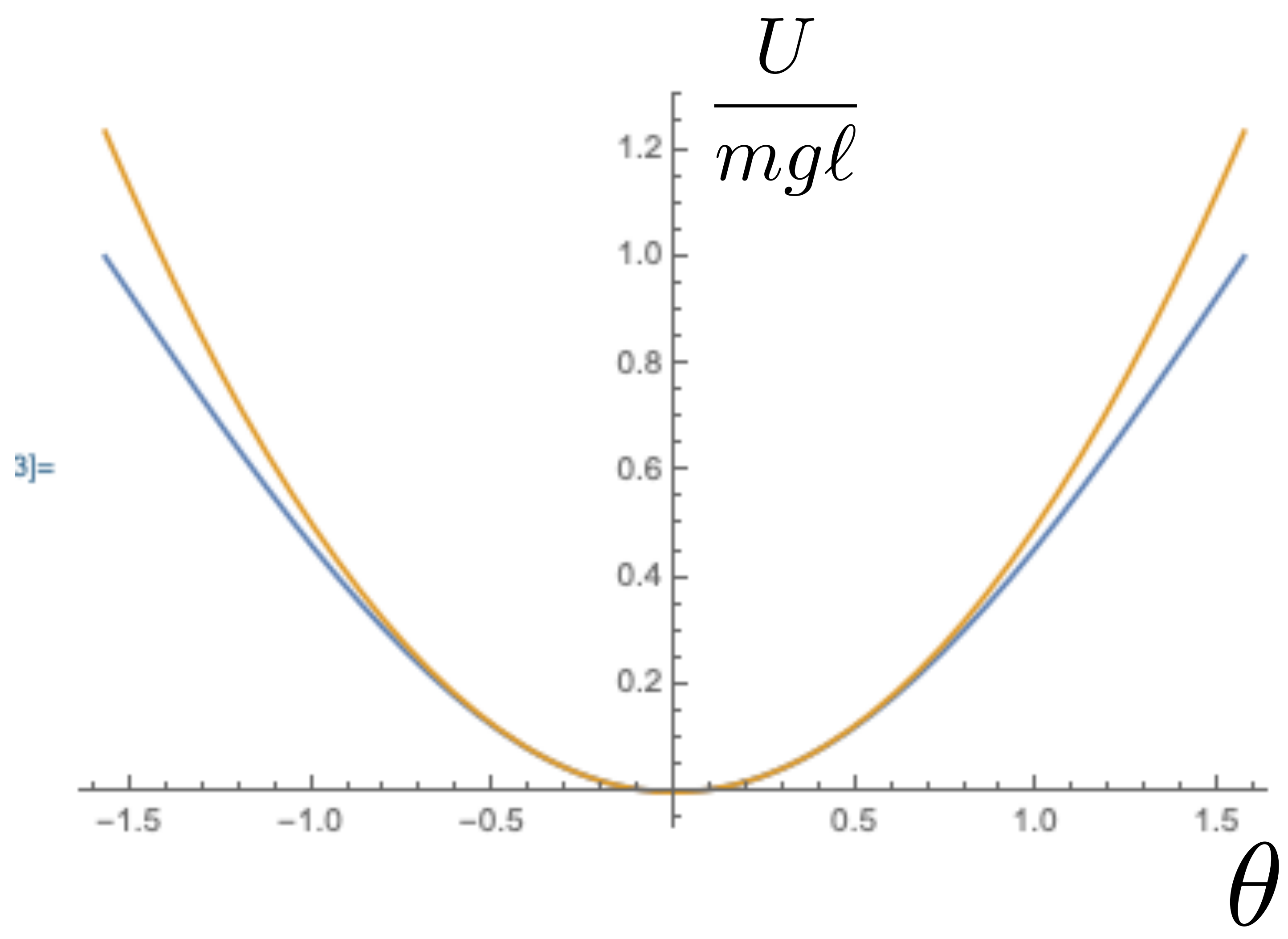
• Simplificação importante:

- Para pequenos oscilações em torno do ponto de equilíbrio estável $\theta = 0$

$$\sin\theta = \theta + \ldots \qquad \text{e} \qquad \cos\theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \ldots$$

- A equação de movimento fica $\displaystyle \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\theta$ (força depende linearmente na variável)

- E a energia potencial é aproximadamente $\displaystyle U(\theta) = \frac{1}{2}mg\ell\theta^2$ (é uma função quadrática)

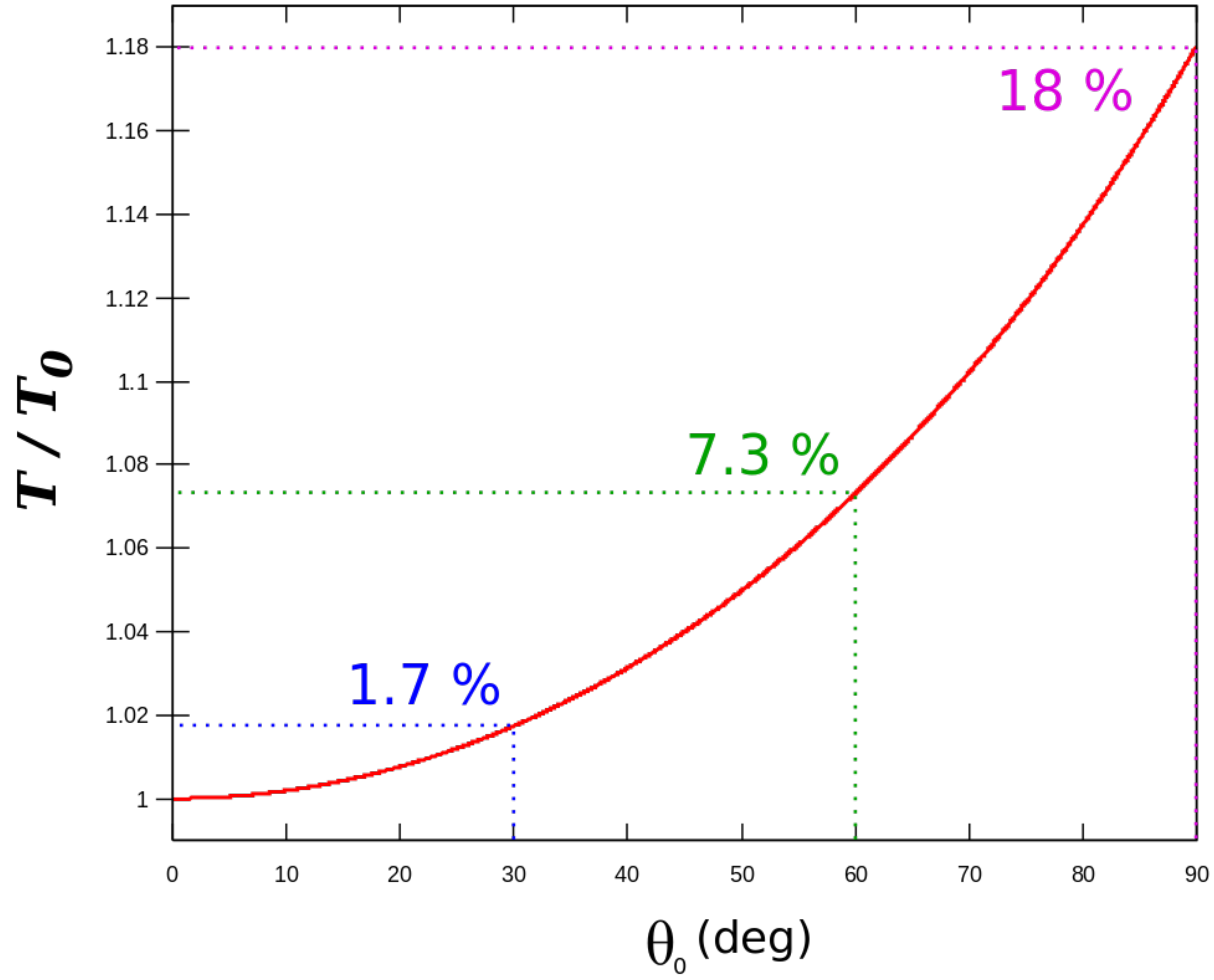


- Essa é a aproximação harmônica

- Mas isso é geral? SIM!!!!

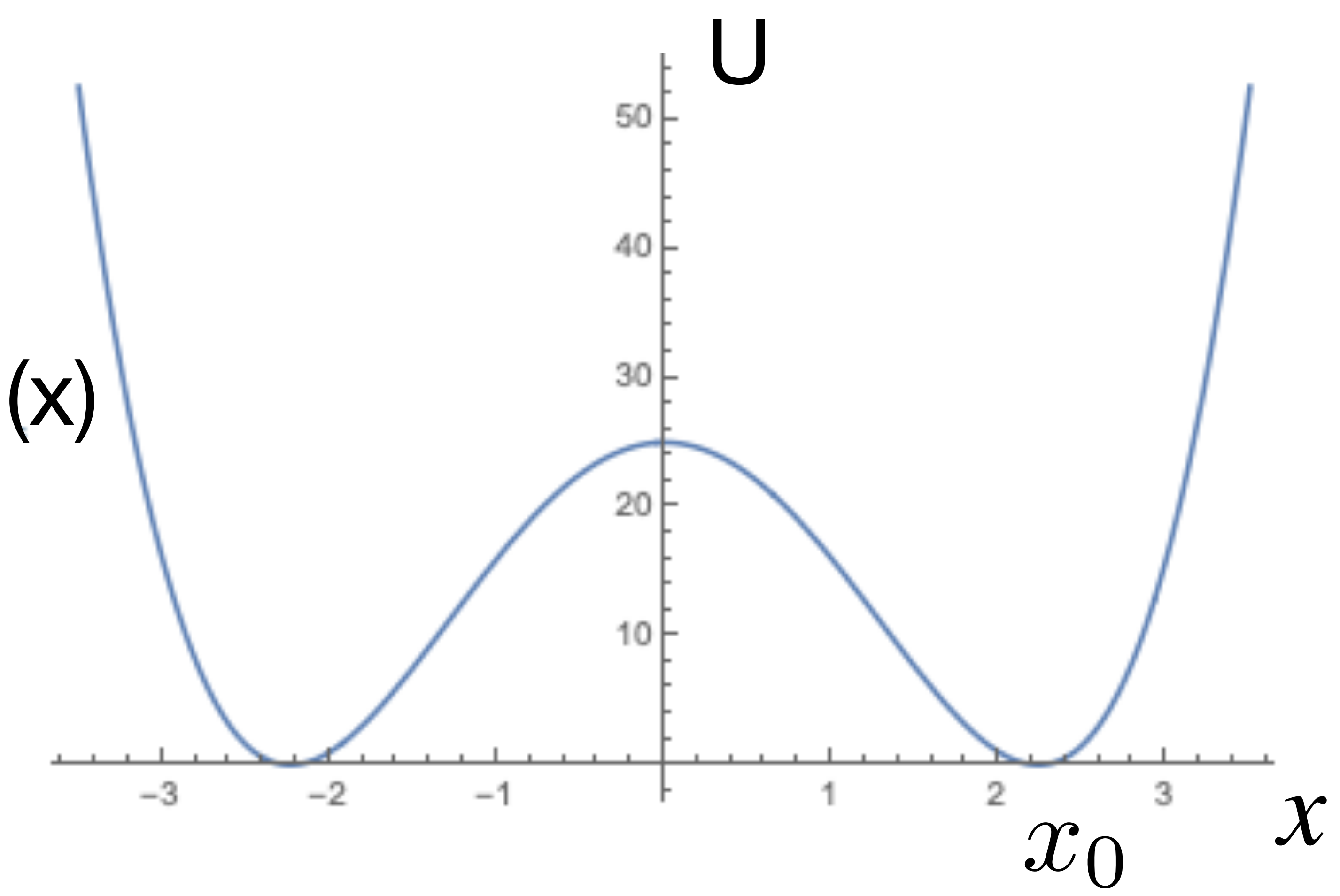
- Por quê?

• Essa é uma boa aproximação?



[A solução **exata** para o período contém a função elíptica de Legendre de primeiro tipo.]

3. Oscilações harmônicas



- Consideremos um sistema mecânico unidimensional cuja energia potencial é U(x)

- U(x) tem um mínimo em x_0

- Estudemos pequenas oscilações em torno de x_0

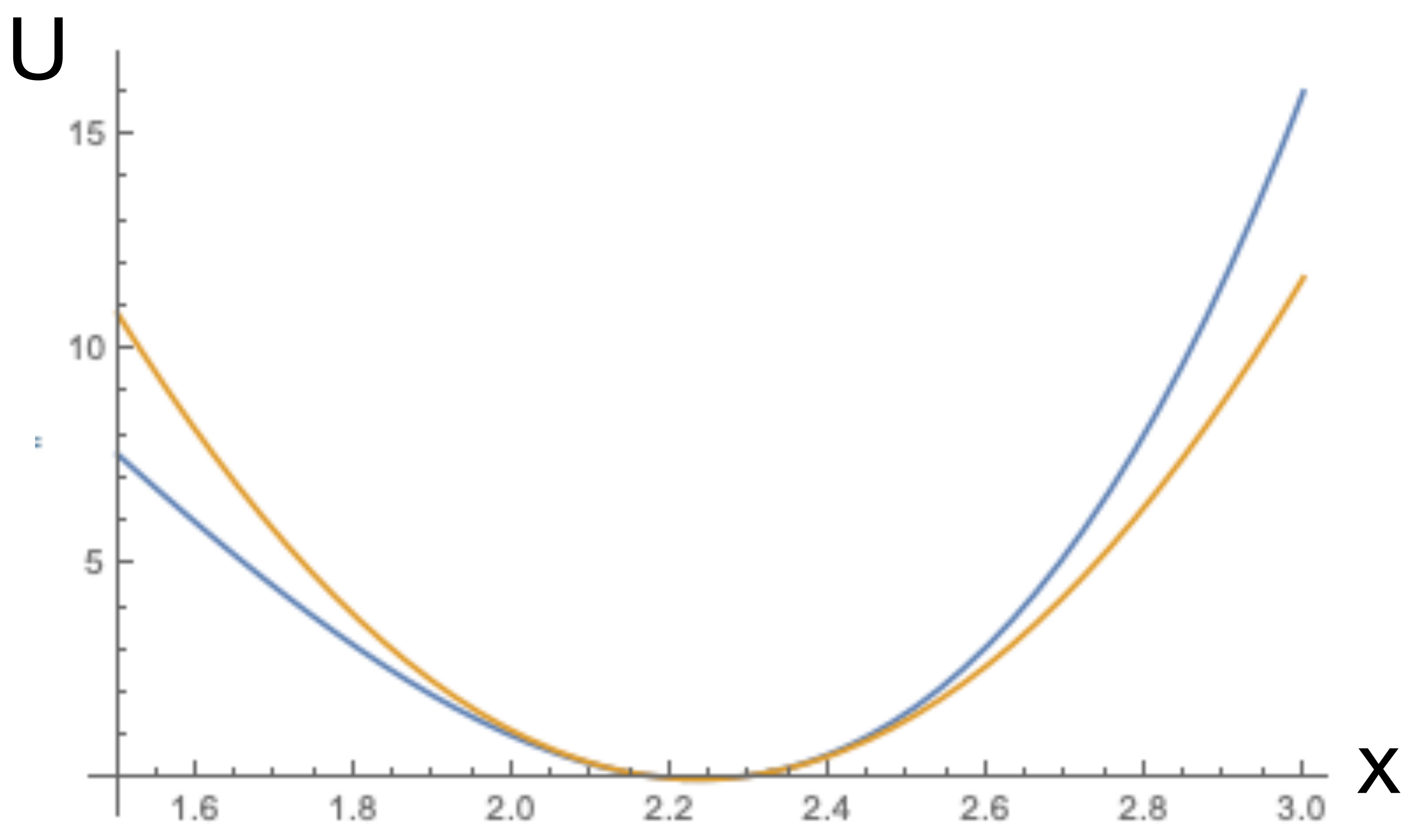
$$U(x) = U(x_0) + \frac{dU}{dx}(x_0)\ (x - x_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2U}{dx^2}(x_0)\ (x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3U}{dx^3}(x_0)(x - x_0)^3 + \ldots$$

$$\simeq U(x_0) + \underbrace{\frac{dU}{dx}(x_0)}_{0}\ (x - x_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2U}{dx^2}(x_0)\ (x - x_0)^2$$

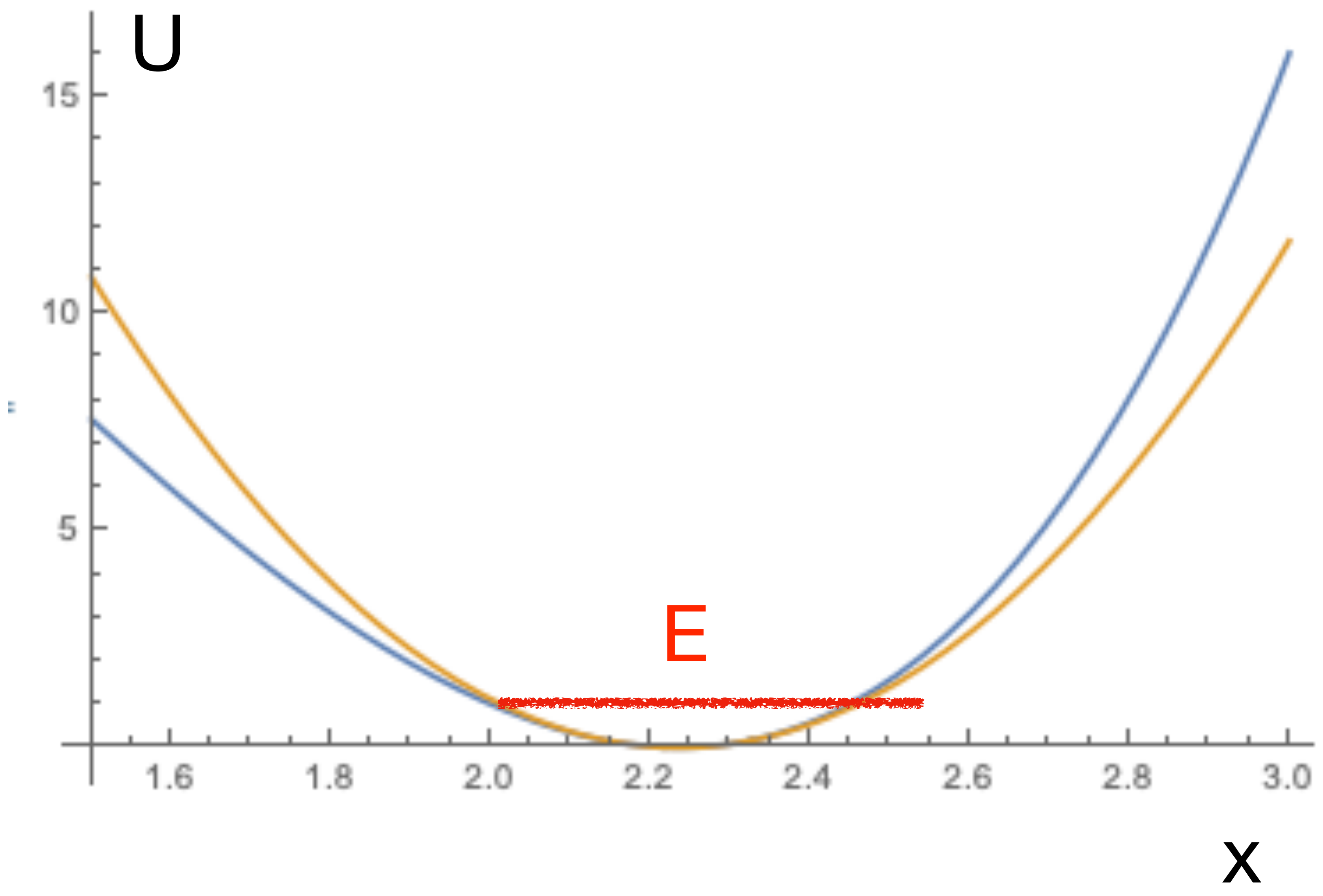
- A força neste caso é $F(x) = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d^2U}{dx^2}(x_0)\ (x - x_0) \equiv -k(x - x_0)$

- A equação de movimento é $m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - x_0)$

linear



- Como no pêndulo temos oscilações



- Oscilações harmônicas são pequenas oscilações em torno de um mínimo do potencial

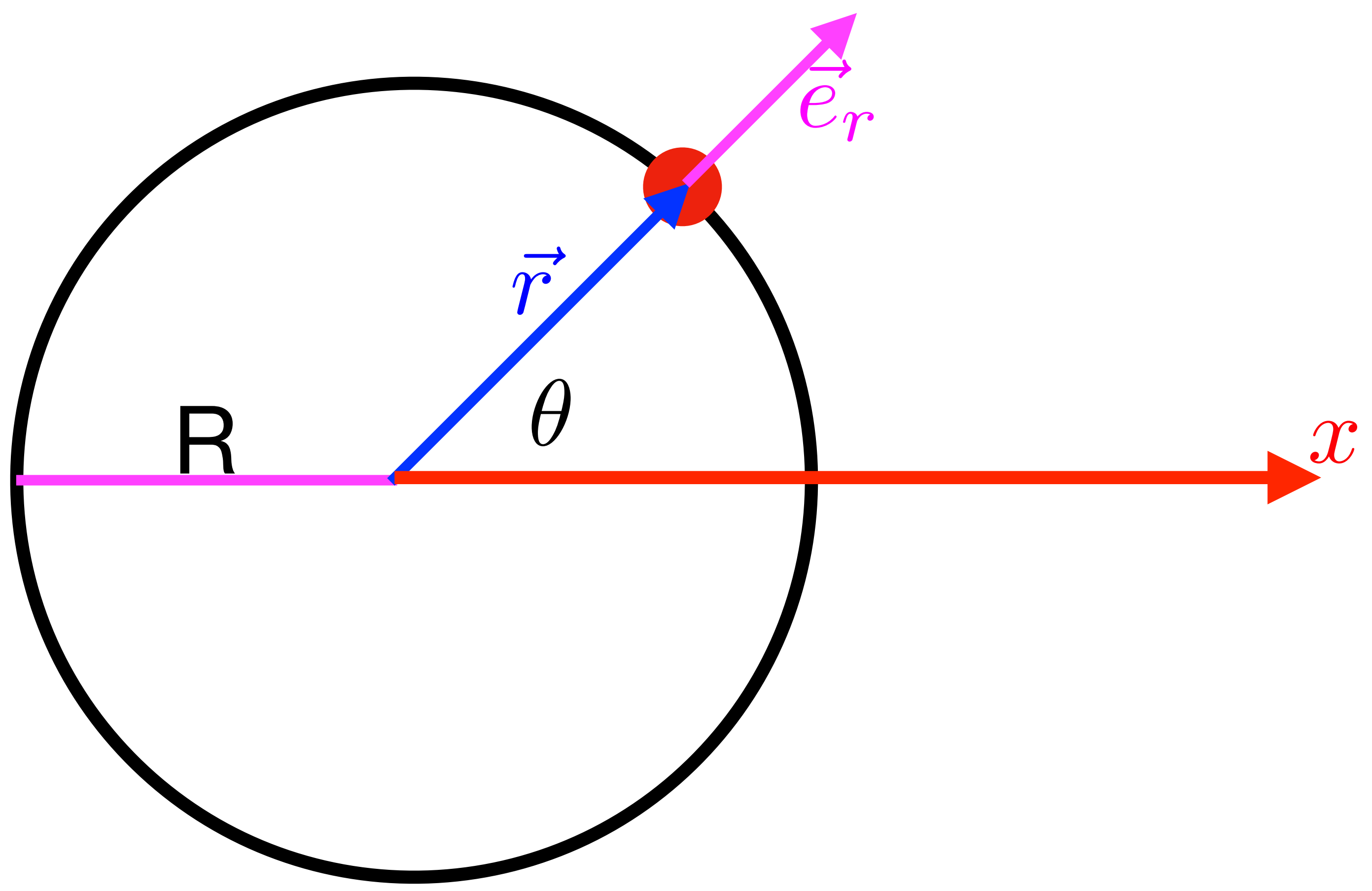
- Para simplificar fazemos $x' \equiv (x - x_0)$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - x_0) \Longrightarrow m\frac{d^2x'}{dt^2} = -kx'$$

- OK, então de modo geral temos que resolver a equação diferencial $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx$

- Solução astuta: considere um corpo num movimento circular uniforme com velocidade angular ω

$$\theta(t) = \omega t + \varphi \qquad \text{e} \qquad \vec{r} = R\ \vec{e}_r(\theta)$$



Equação de movimento: $m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -T\vec{e}_r$, onde $T = m\omega^2 R$

mas $\vec{e}_r(\theta) = \cos\theta\ \vec{i} + \sin\theta\ \vec{j}$

logo a projeção no eixo x é $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -T\cos\theta = -\dfrac{T}{R}\ R\cos\theta = -\dfrac{T}{R}x = -m\omega^2 x$ equação do oscilador harmônico!

$k = m\omega^2$

constantes

- A solução do oscilador harmônico é $R\ \cos(\omega t + \varphi) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$

4. Parênteses matemático

- Qual a maneira *sistemática* de resolver essa equação diferencial? Consideremos, por ora:

$$a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = 0$$

onde a, b e c são constantes.

- Exemplos conhecidos são a partícula livre e o oscilador harmônico.

- Essa equação é dita ser uma equação diferencial ordinária homogênea de segunda ordem a coeficientes constantes. UFA!

- Alguns fatos dessa equação:

1. Esta é uma equação linear: dadas duas soluções $x_1(t)$ e $x_2(t)$ e sua constantes c_1 e c_2

Então também é solução: $$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$$ combinação linear

De fato:

$$a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = 0$$

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

$$\frac{dx}{dt} = c_1\ \frac{dx_1}{dt} + c_2\ \frac{dx_2}{dt}$$

linearidade!

$$\frac{d^2x}{dt^2} = c_1\ \frac{d^2x_1}{dt^2} + c_2\ \frac{d^2x_2}{dt^2}$$

$$a\ (c_1\ \frac{d^2x_1}{dt^2} + c_2\ \frac{d^2x_2}{dt^2}) + b\ (c_1\ \frac{dx_1}{dt} + c_2\ \frac{dx_2}{dt}) + c\ (c_1\ x_2 + c_2\ x_2) =$$

$$c_1\ (a\frac{d^2x_1}{dt^2} + b\frac{dx_1}{dt} + cx_1) + c_2\ (a\frac{d^2x_2}{dt^2} + b\frac{dx_2}{dt} + cx_2) = 0$$

E daí? Como acho as soluções?

> * Pense no exemplo acima, do movimento circular. As duas soluções "independentes" seriam o movimento em x e em y

- Procuremos duas soluções *linearmente independentes** para a equação homogênea

$$a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = 0$$

- Tentemos $x(t) = e^{pt}$ onde p é uma constante. Substituindo temos que

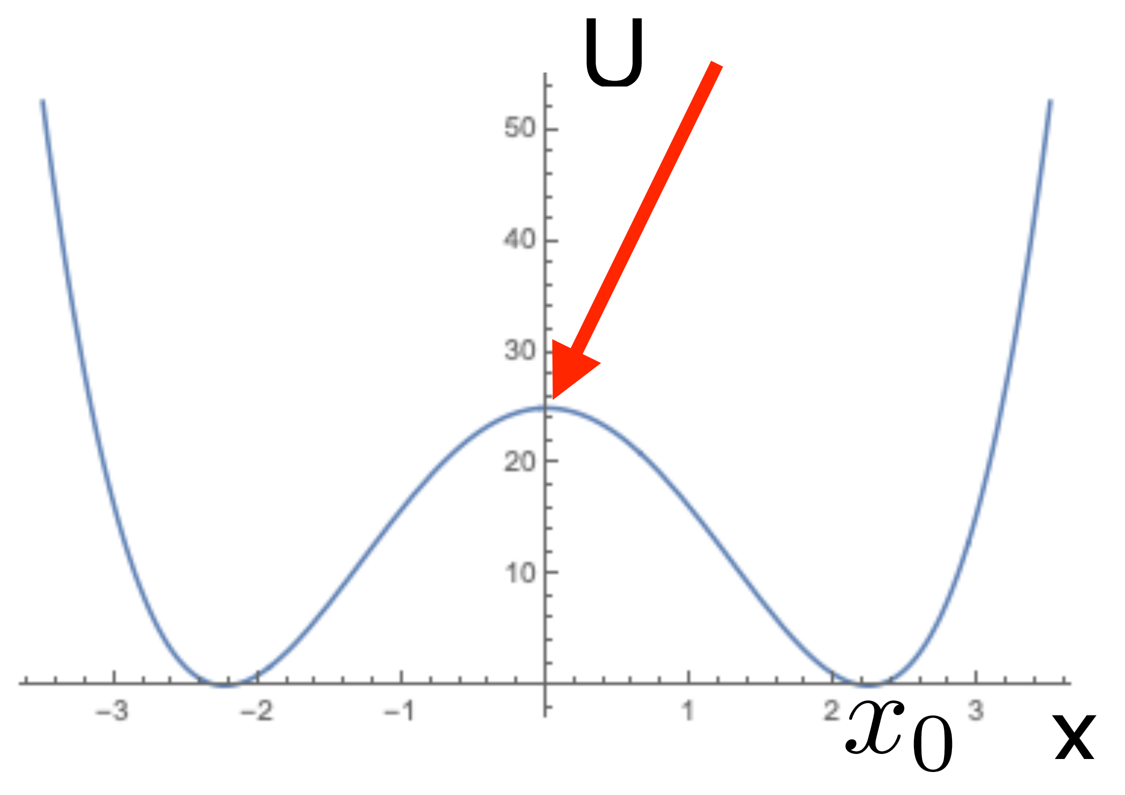
$$a\ p^2 + b\ p + c = 0$$

Portanto $$p = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- <u>Primeiro caso</u>: o discriminante é **positivo:** $b^2 - 4ac > 0$. Há duas raízes distintas, $p_1 \text{ e } p_2$

Solução geral: $$x(t) = c_1\ e^{p_1 t} + c_2\ e^{p_2 t}$$

Por exemplo:



$$m\frac{d^2x}{dt^2} - k^2x = 0 \Longrightarrow p = \pm\frac{k}{\sqrt{m}} \equiv \pm\gamma \Longrightarrow x(t) = c_1\ e^{-\gamma t} + c_2\ e^{\gamma t}$$

- Segundo caso: discriminante nulo $b^2 - 4ac = 0$. Há uma única raiz $\gamma = -\frac{b}{2a}$. Qual a segunda solução?

Tentamos $x(t) = f(t)\ e^{\gamma t} \Longrightarrow \frac{d^2f}{dt^2} = 0 \Longrightarrow f(t) = c_1 + c_2t$

logo $x(t) = (c_1 + c_2t)\ e^{\gamma t}$

- <u>Terceiro caso</u>: o discriminante é **negativo:** $b^2 - 4ac < 0$, logo $p_{1,2} = -\gamma \pm i\omega \text{ com } \omega = \sqrt{4ac - b^2}$

$$x(t) = e^{-\gamma t}\ (c_1\ e^{-i\omega t} + c_2\ e^{+i\omega t})$$

- Mas o que é a exponencial imaginária? Lembremos da fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} \equiv \cos\theta + i\sin\theta$$

- Logo podemos escrever as soluções são

$$x(t) = e^{\gamma t}\ [c_1'\ \cos(\omega t) + c_2'\ \sin(\omega t)]$$

Exemplo do **oscilador harmônico simples**:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0 \Longrightarrow p = \pm i\frac{k}{\sqrt{m}} \equiv \pm i\omega \Longrightarrow x(t) = c_1\ \cos(\omega t) + c_2\ \sin(\omega t)$$

- Alguns fatos dessa equação [continuação]:

2. Existem duas soluções linearmente independentes tais que $x_1(t) \neq c\ x_2(t)$, qualquer que seja c

constante

Exemplos:

i. Partícula livre: $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0 \Longrightarrow x(t) = x_0 + v_0 t$

ii. Oscilador harmônico simples: $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -m\omega^2 x \Longrightarrow x(t) = c_1\ \cos(\omega t) + c_2\ \sin(\omega t)$

3. Qualquer solução pode ser escrita como uma **combinação linear** dessas soluções:

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

4. A solução é **única** se especificarmos as **condições iniciais**: $x(0)$ e $\dfrac{dx}{dt}(0)$

Referências:

1. Moysés Nussenzveig, *Curso de Física Básica*, vol. 2, Cap. 3.1 a 3.3
2. Kittel, Knight e Ruderman, *Mechanics*, Cap. 7
3. Feynman, Leighton & Sands, *Lectures on Physics*, Vol. 1, Cap. 21