PEF 3200

O conceito de tensão

Esforços solicitantes

Teorema fundamental

Diagramas de esforços solicitantes de estruturas planas

Turma 3: Valério Almeida

Abril/2023

Conteúdo da aula

» O conceito de tensão

» Esforços solicitantes

» Teorema fundamental

» Diagramas de esforços solicitantes de estruturas planas

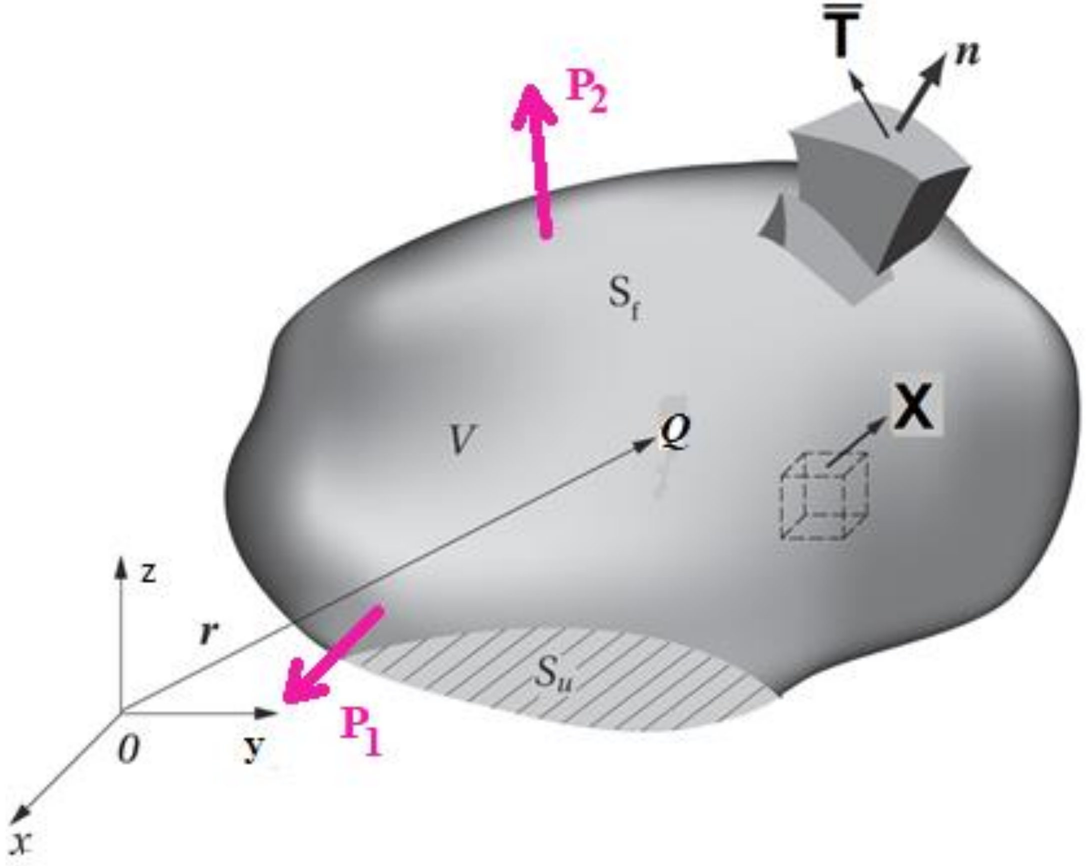
Bibliografia: Apostila de Teoria (pdf no e-disciplinas)

Capítulo 2: O conceito de tensão
Capítulo 3: Esforços solicitantes
Capítulo 4: Teorema fundamental
Capítulo 5: Diagramas de esforços solicitantes de estruturas planas

Tensão

Sólido deformável (V) em **equilíbrio estático**

Sujeito a forças de contato: P_1, P_2....



Realize um corte imaginário que passe dentro do corpo

Tensão

Corte imaginário

Vetor tensão em **Q** no plano de normal *n*

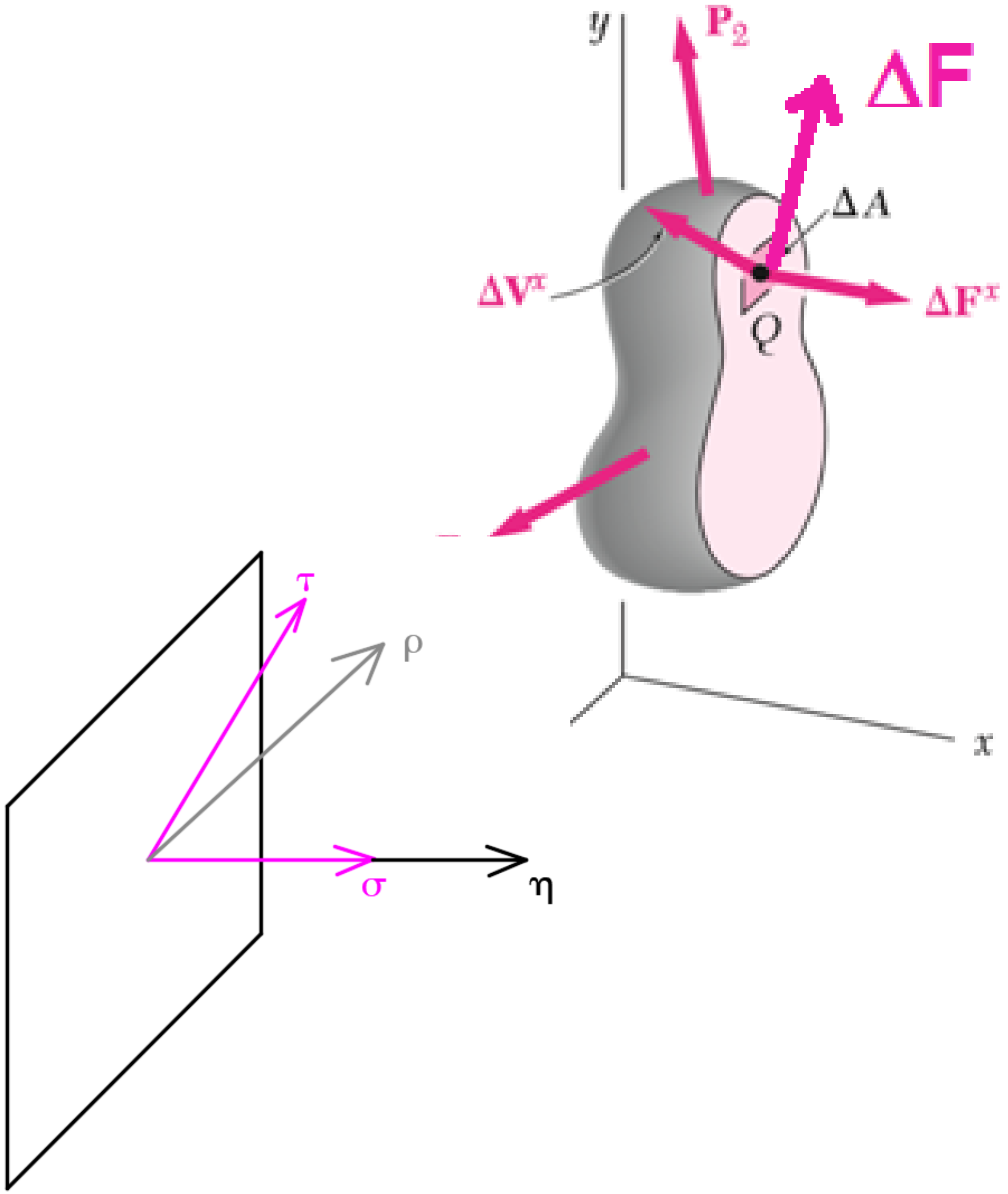
$$\rho_n = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

$$\rho_n = \sigma + \tau$$

σ: *tensão normal (perpendicular ao plano da ST)*

τ: *tensão cisalhante* (paralelo *ao plano da* ST)

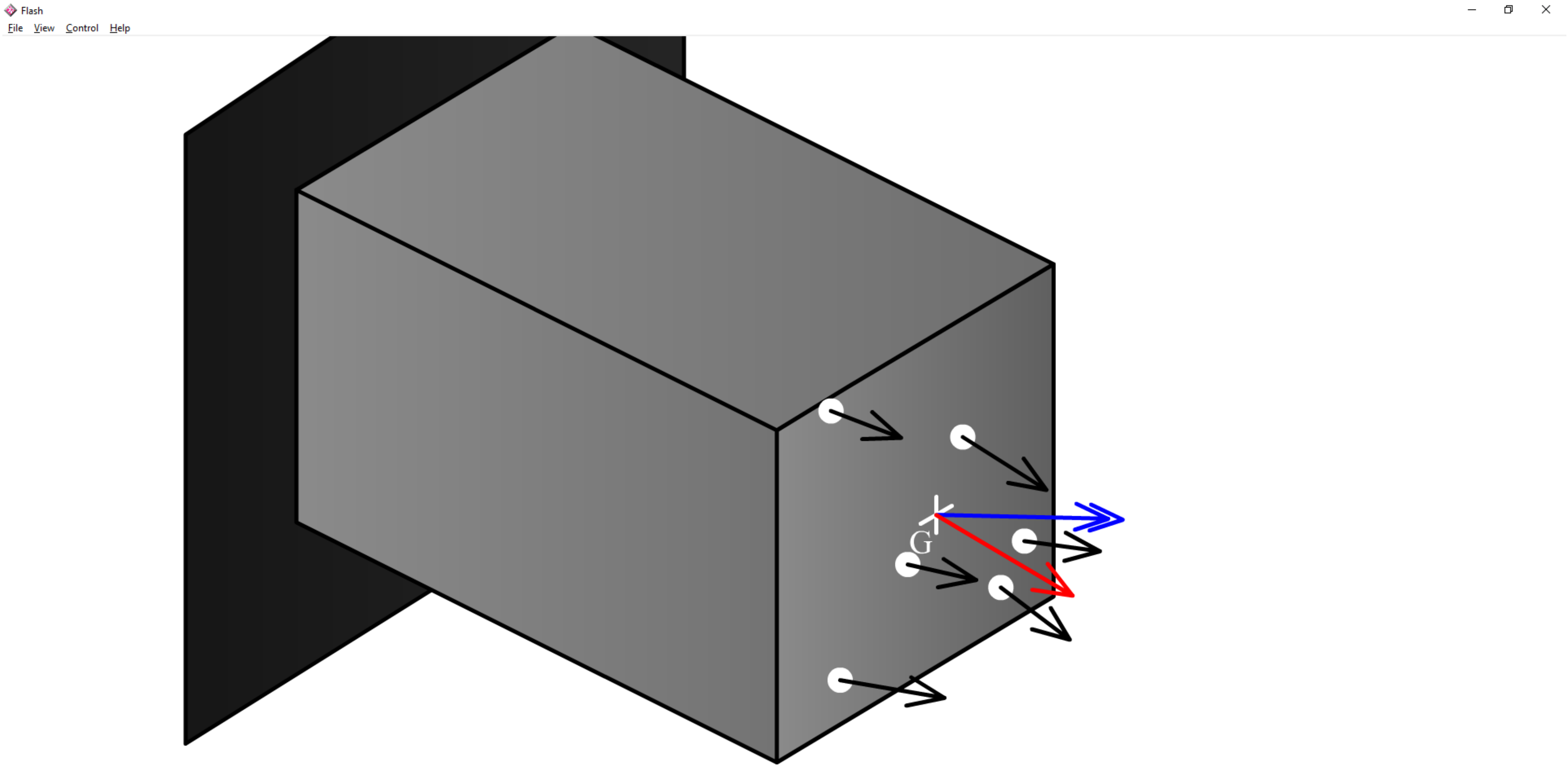
ΔA: área



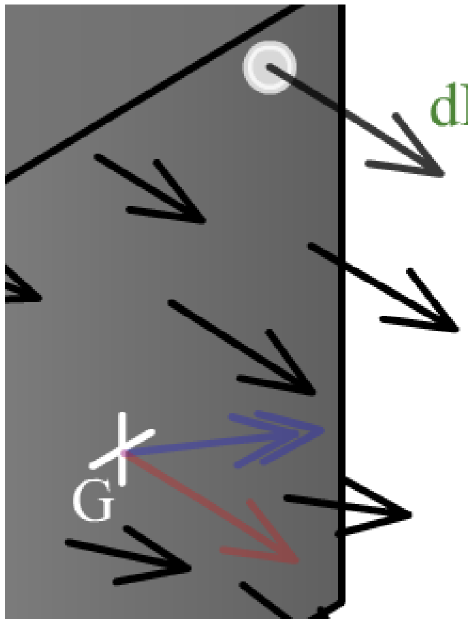
Conhecer 3 tensões em Q: estado de tensão completamente determinado

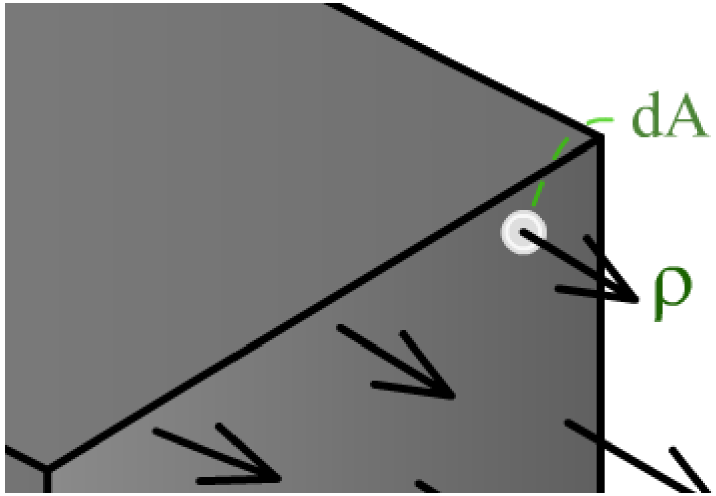
ST: seção transversal

TENSÕES E ESFORÇOS SOLICITANTES: ELEMENTOS LINEARES



Tensões no plano





Tensão: $$\vec{\rho} = \vec{\sigma} + \vec{\tau}$$

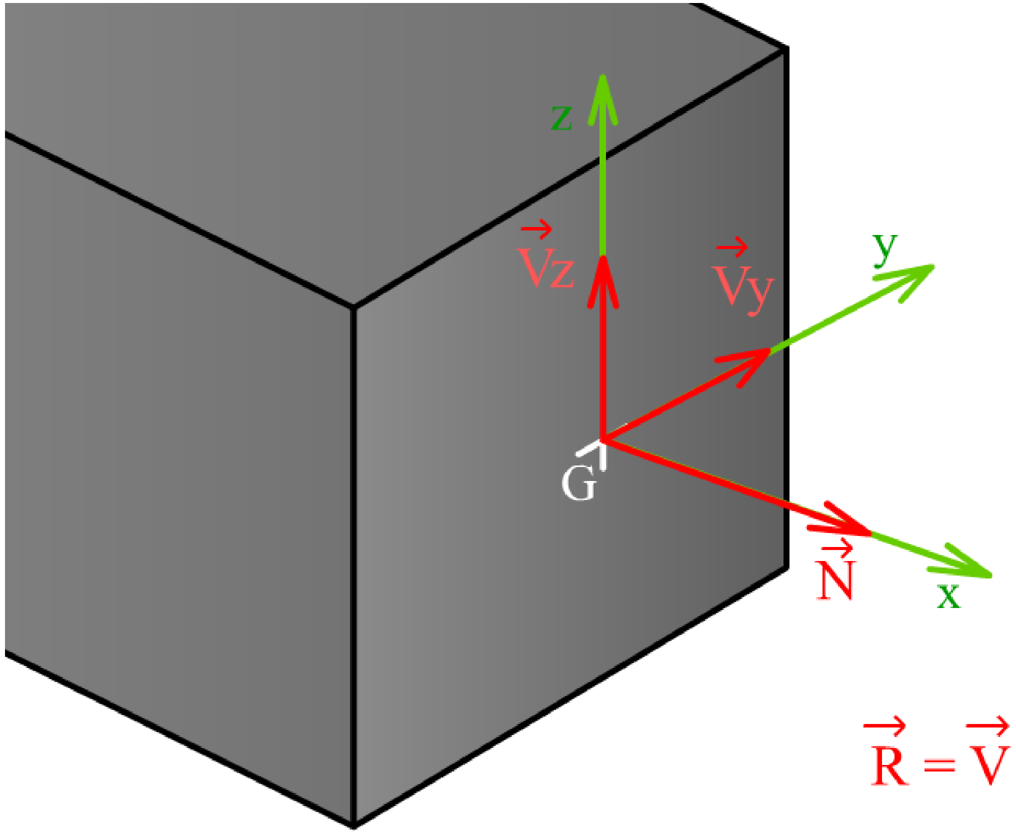
Tensão normal a seção: $\vec{\sigma}$

Tensão paralela a seção: $\vec{\tau}$

$$\vec{\rho}_{média} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta F}}{\Delta A}$$

ESFORÇOS SOLICITANTES

Esforços solicitantes: força/momento resultante das tensões transferidos para o centroide (G) de cada ST



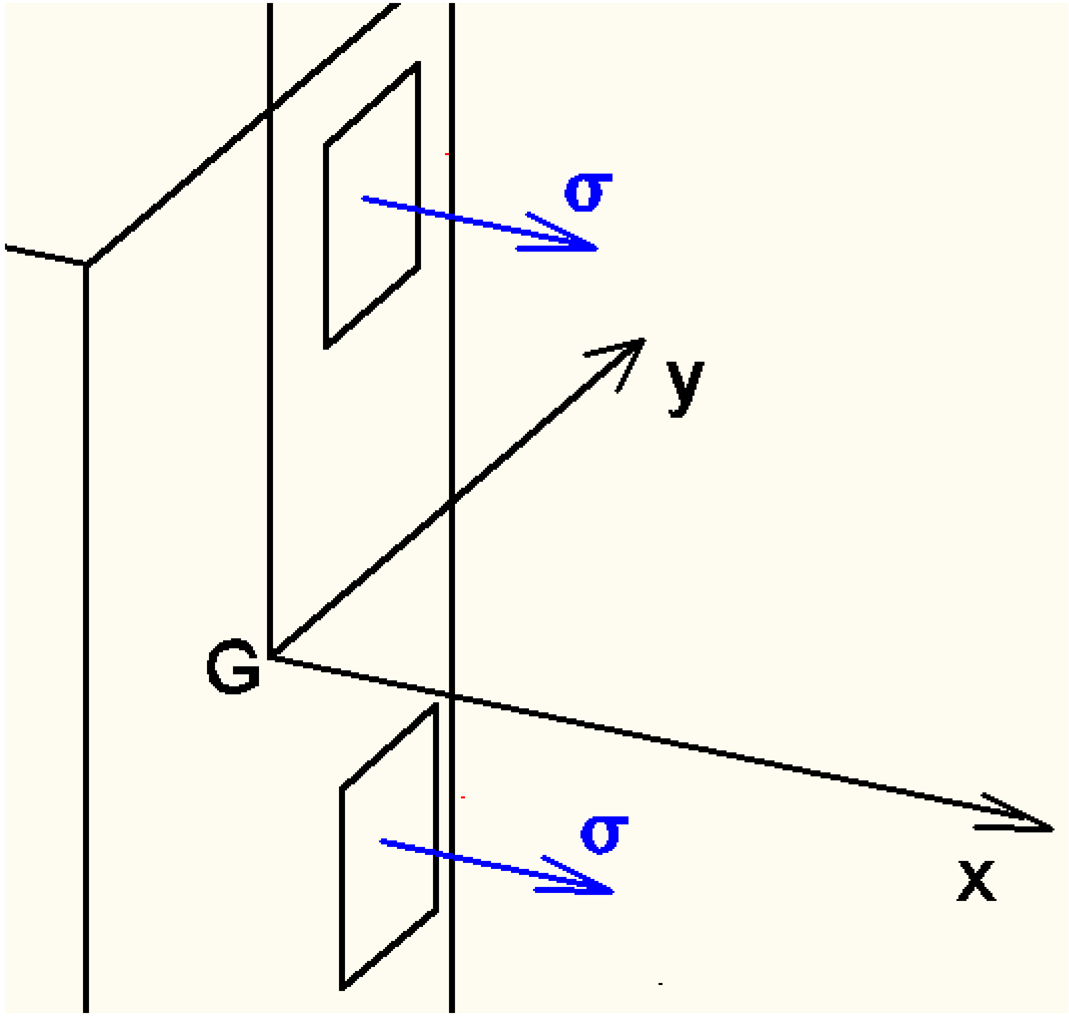
$$\vec{R} = \vec{V} + \vec{N}$$

$$\vec{V} = \vec{Vy} + \vec{Vz}$$

N: Esforço Normal

V: Esforço Cisalhante ou Cortante

ESFORÇO NORMAL

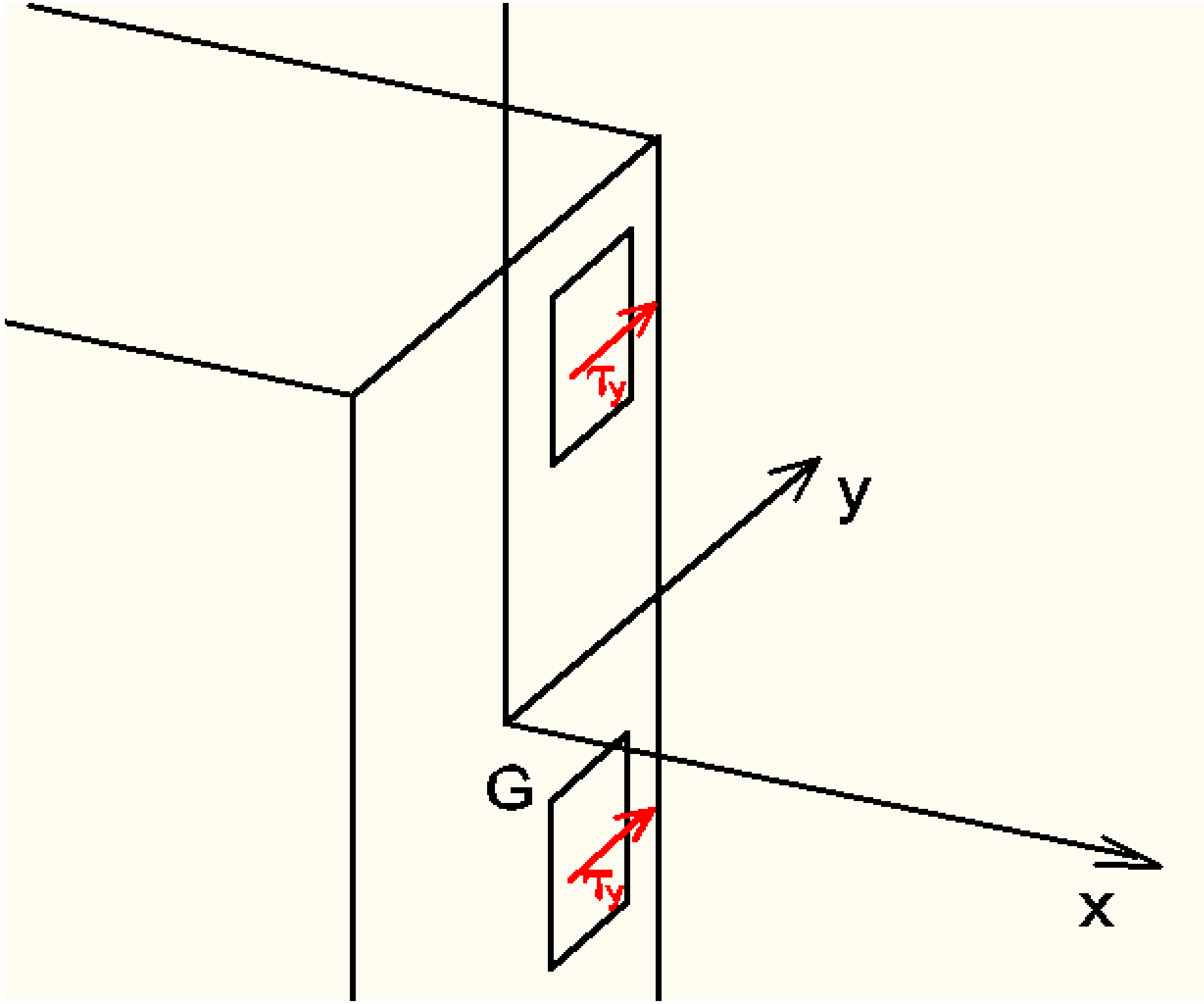


$$N = \int_A \sigma \, dA$$

N: ESFORÇO NORMAL

σ: TENSÃO NORMAL

ESFORÇO CISALHANTE (Cortante)



$$V_y = \int_A \tau_y \, dA$$

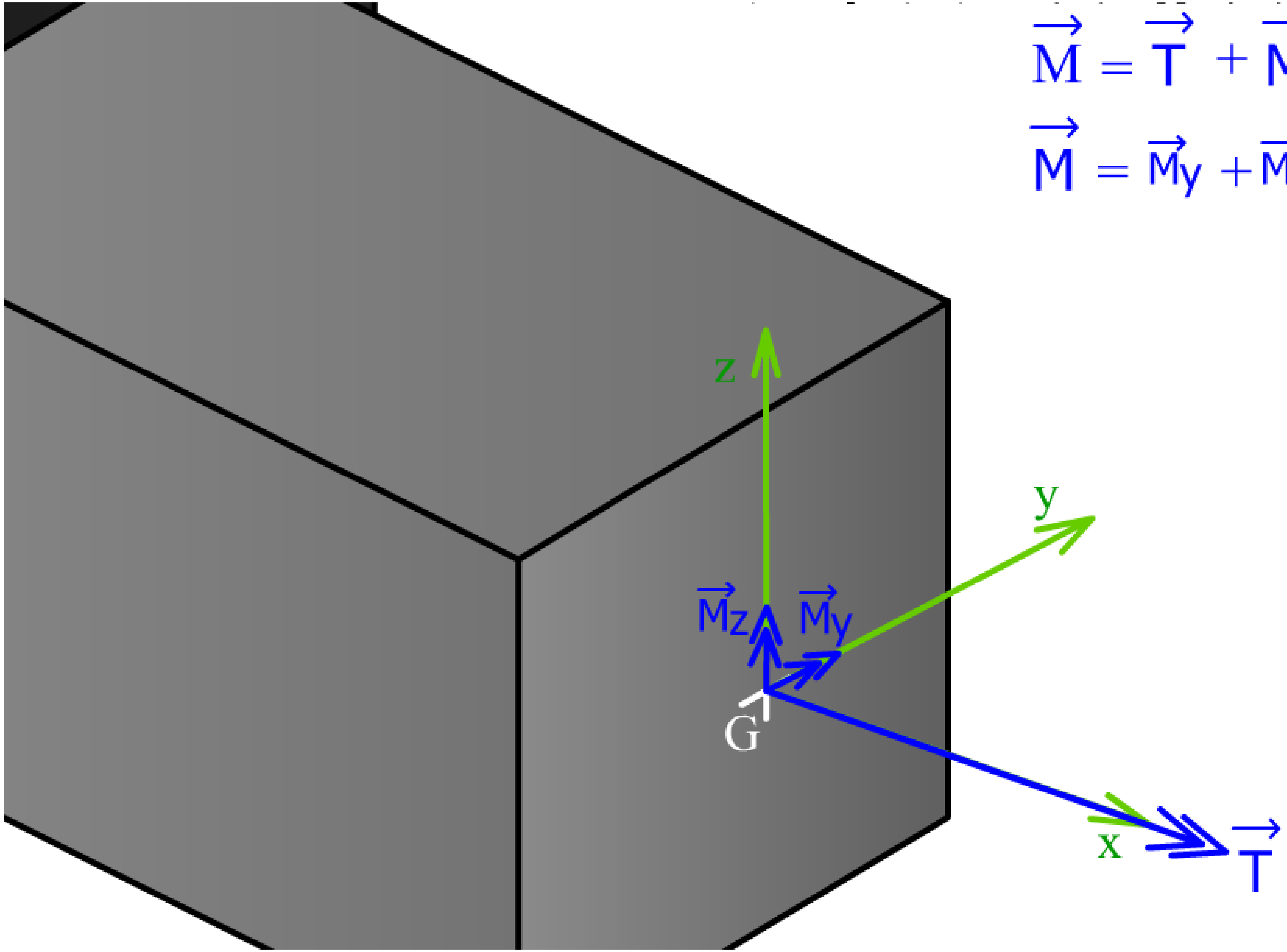
$$V_z = \int_A \tau_z \, dA$$

Tensão Cisalhante: τ

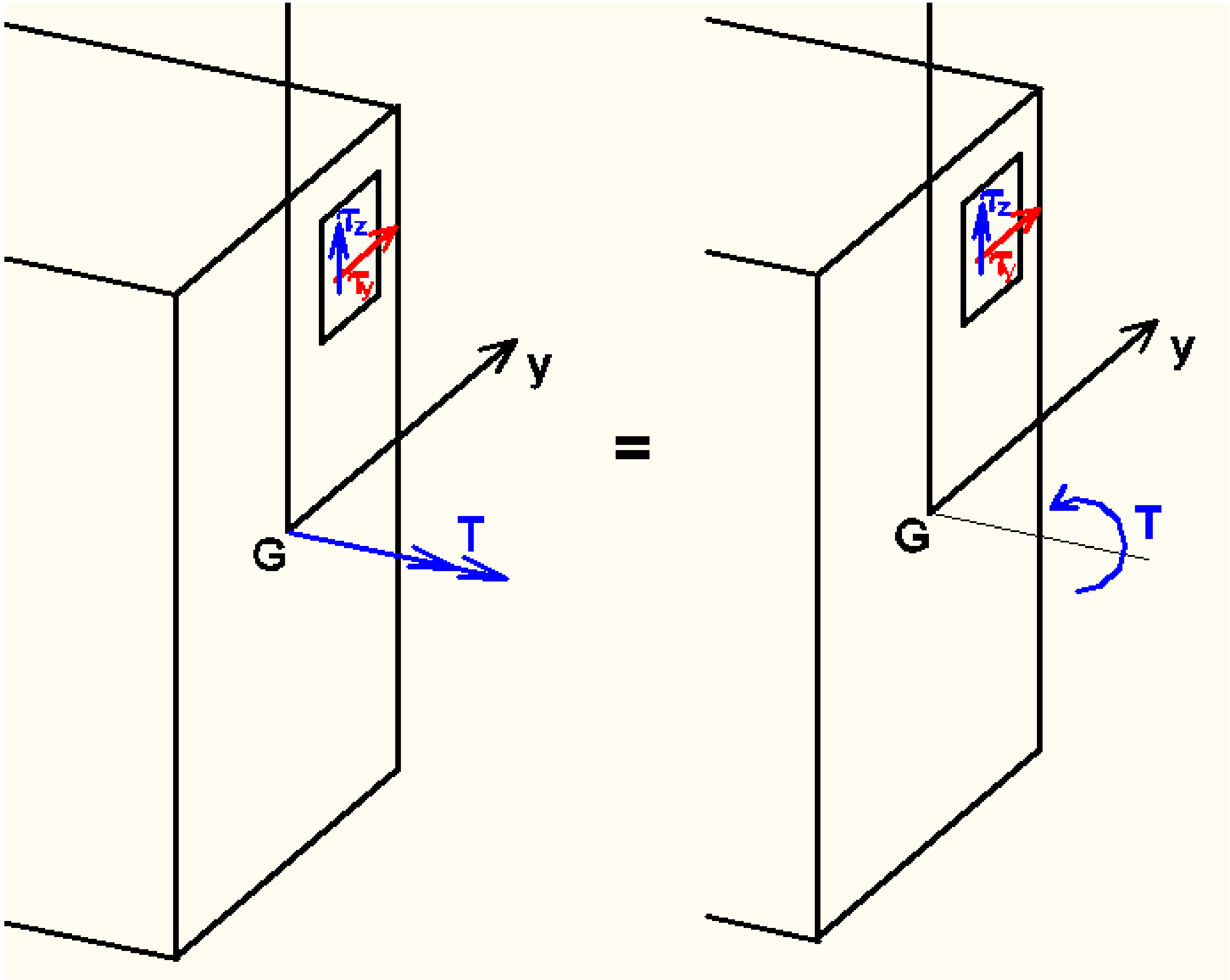
ESFORÇOS DE MOMENTO

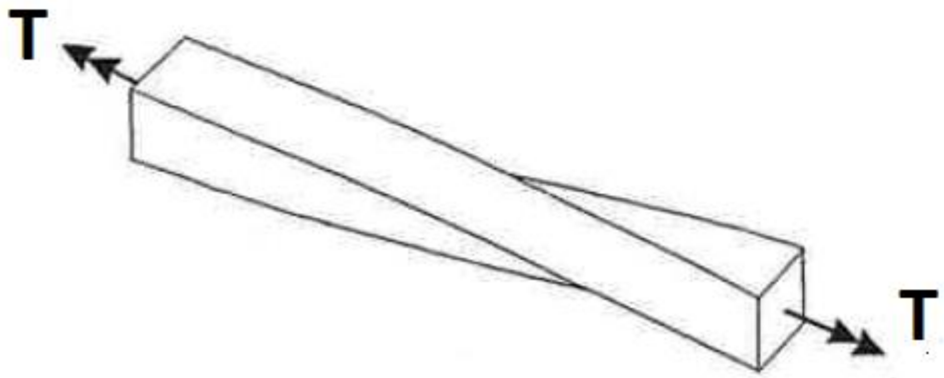
$$\vec{M} = \vec{T} + \vec{M}$$

$$\vec{M} = \vec{M_y} + \vec{M_z}$$



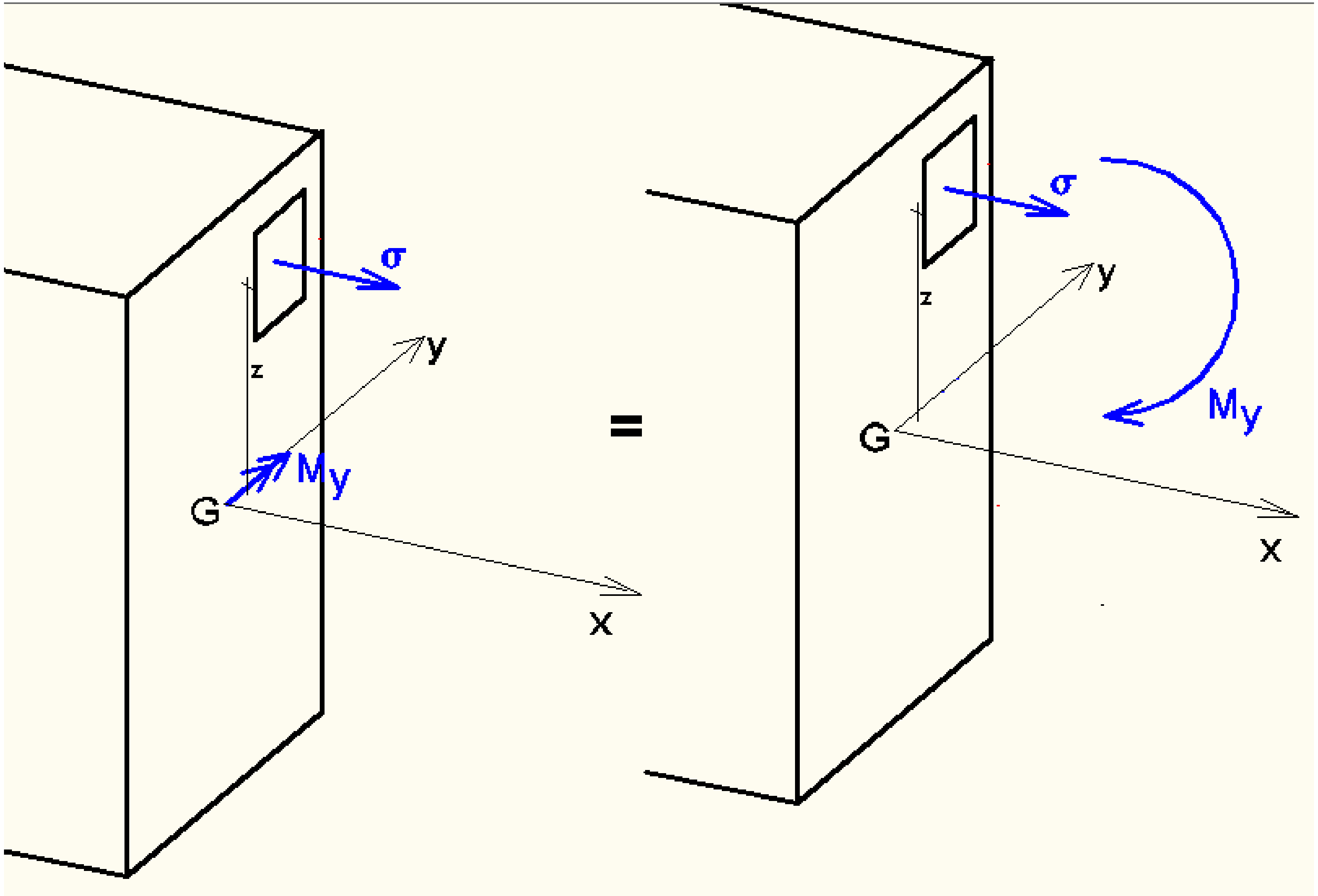
MOMENTO TORÇOR (T) - TORQUE





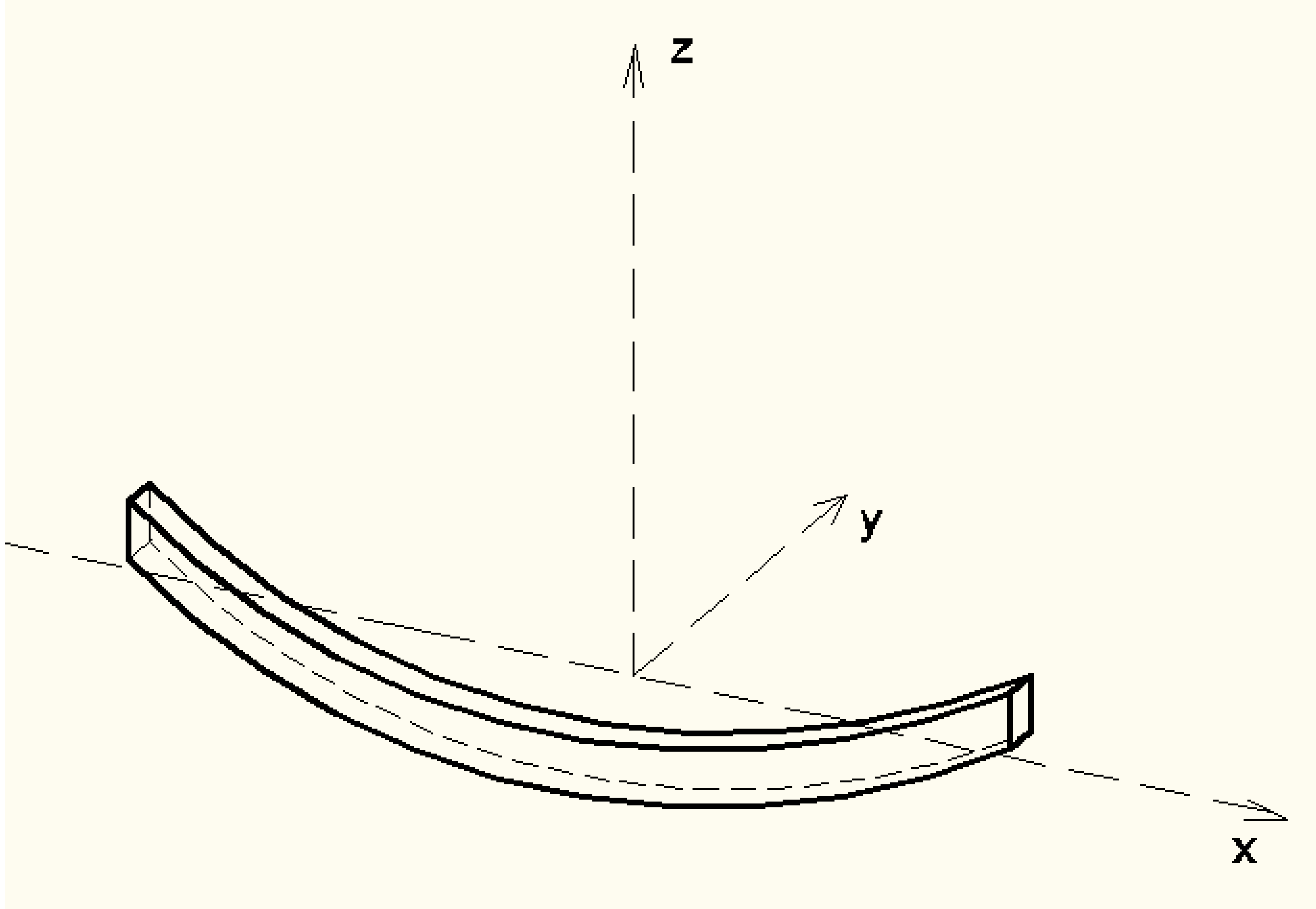
$$T = \int_A \left(\tau_z \, y - \tau_y \, z \right) dA$$

MOMENTO FLETOR (My)

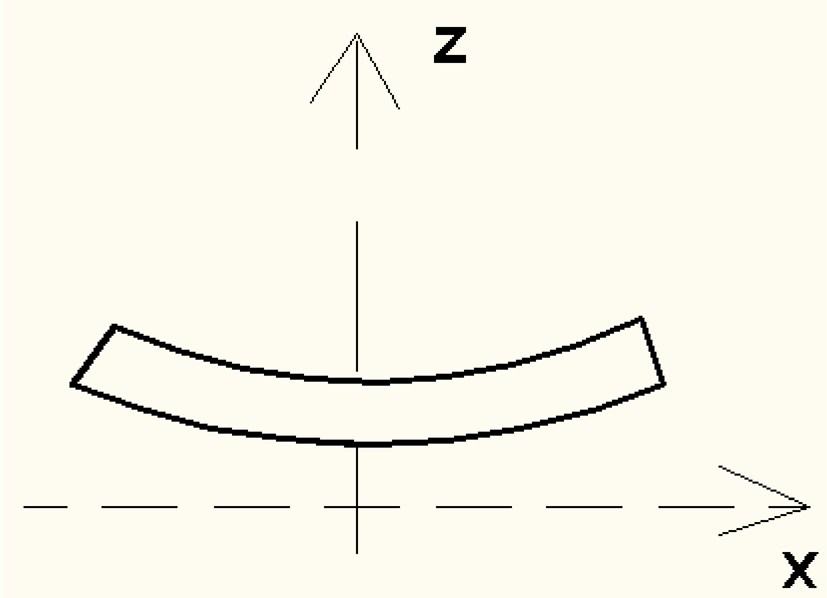


$$M_y = \int_A \sigma \cdot z \, dA$$

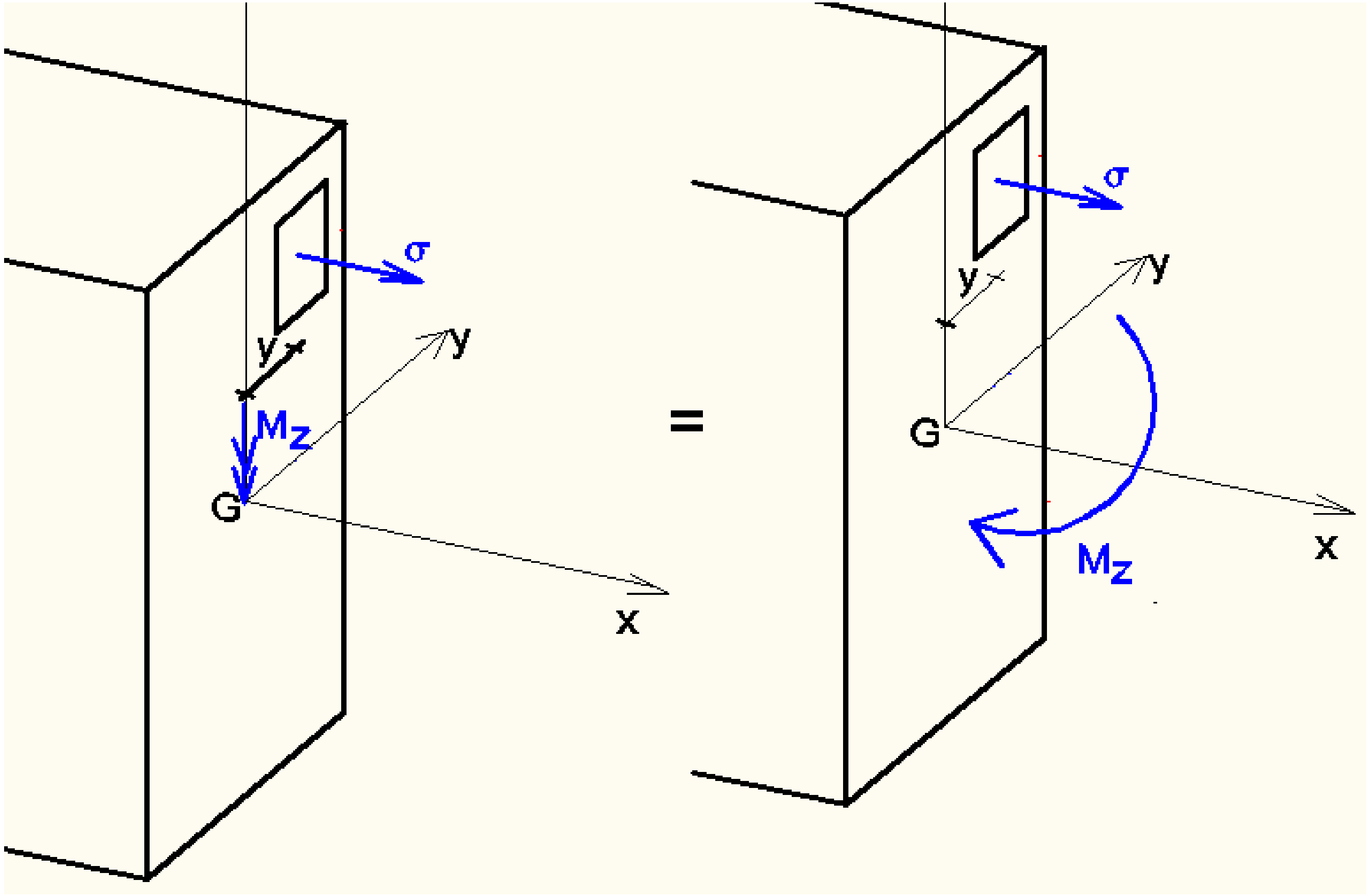
MOMENTO FLETOR (M_y)



Curvatura em torno de y

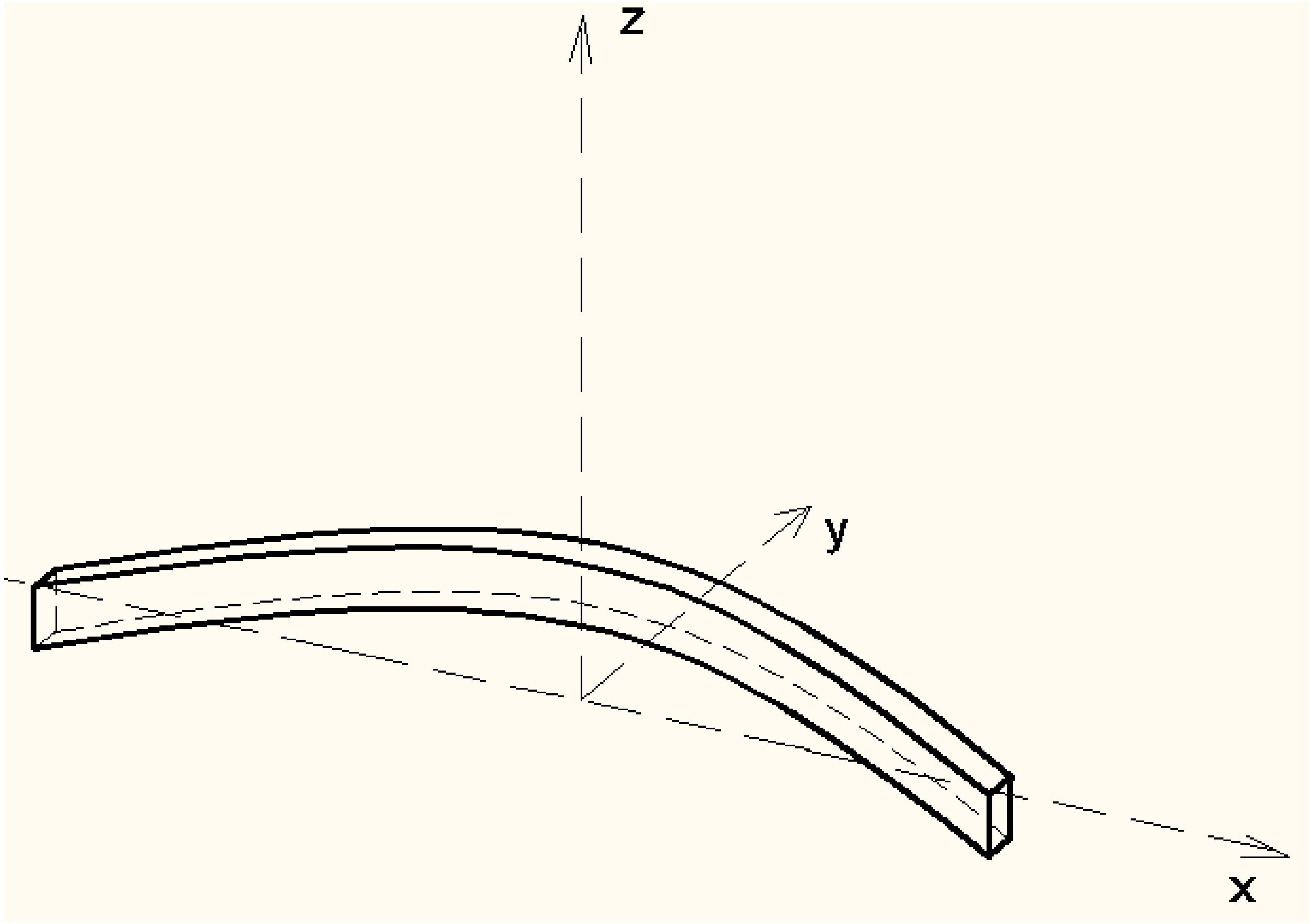


MOMENTO FLETOR (M_z)

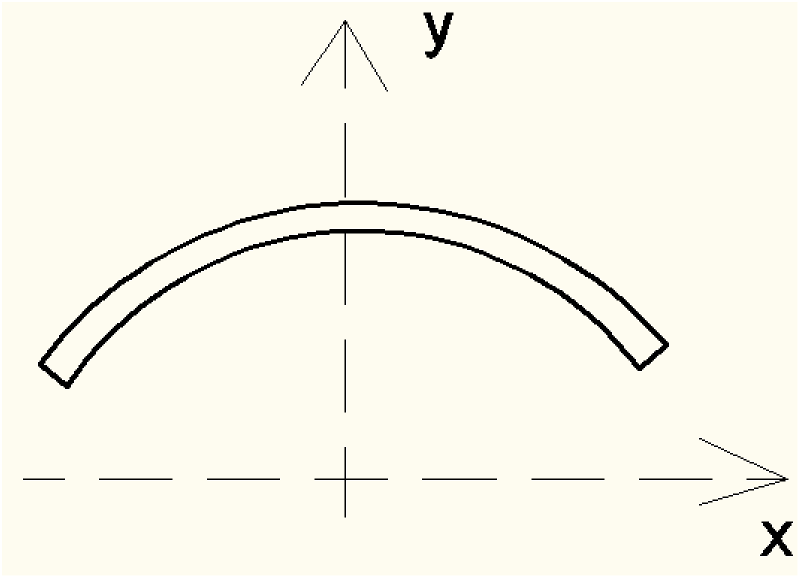


$$M_z = \int_A \sigma \cdot y \, dA$$

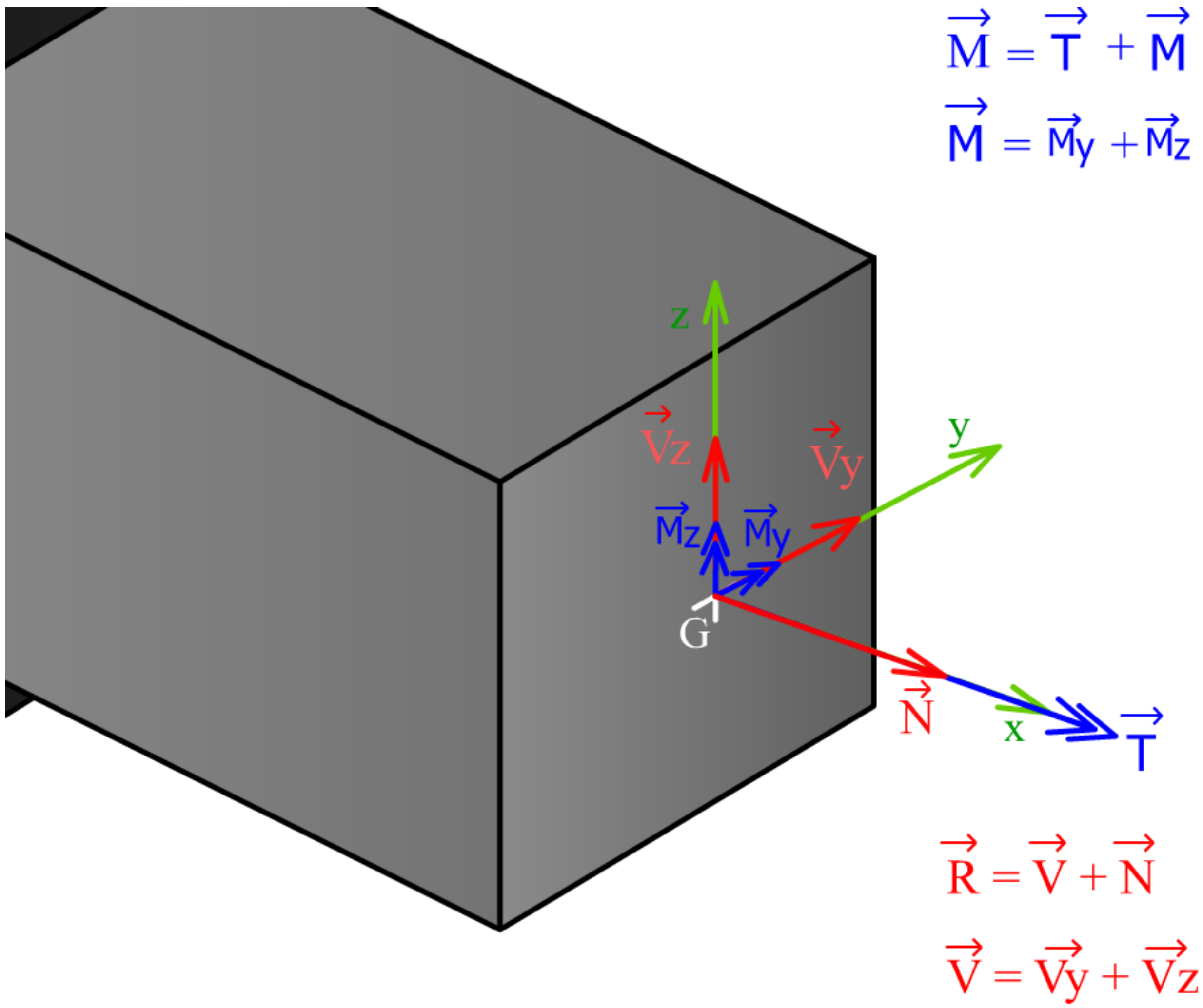
MOMENTO FLETOR (M_z)



Curvatura em torno de z



TOTAL DE ESFORÇOS (6)



$$N = \int_A \sigma \, dA$$

$$V_y = \int_A \tau_y \, dA$$

$$V_z = \int_A \tau_z \, dA$$

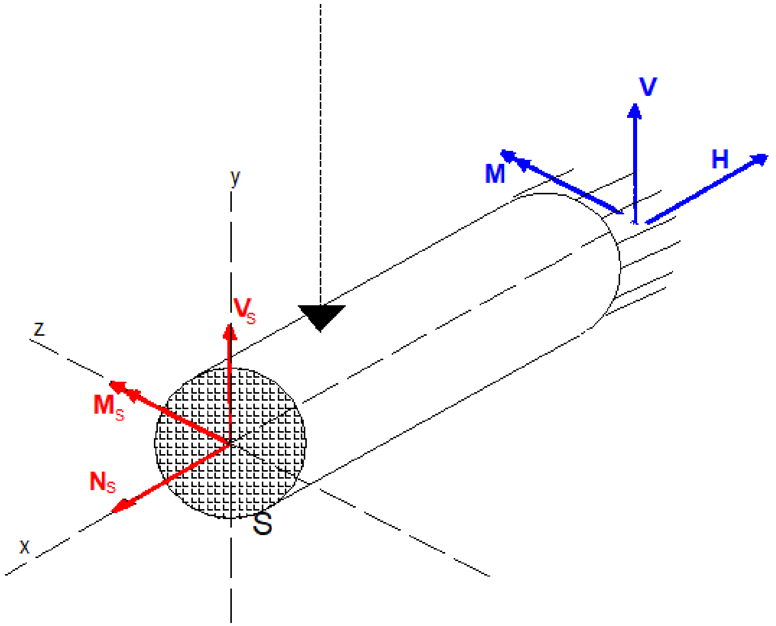
$$M_z = \int_A \sigma \cdot y \, dA$$

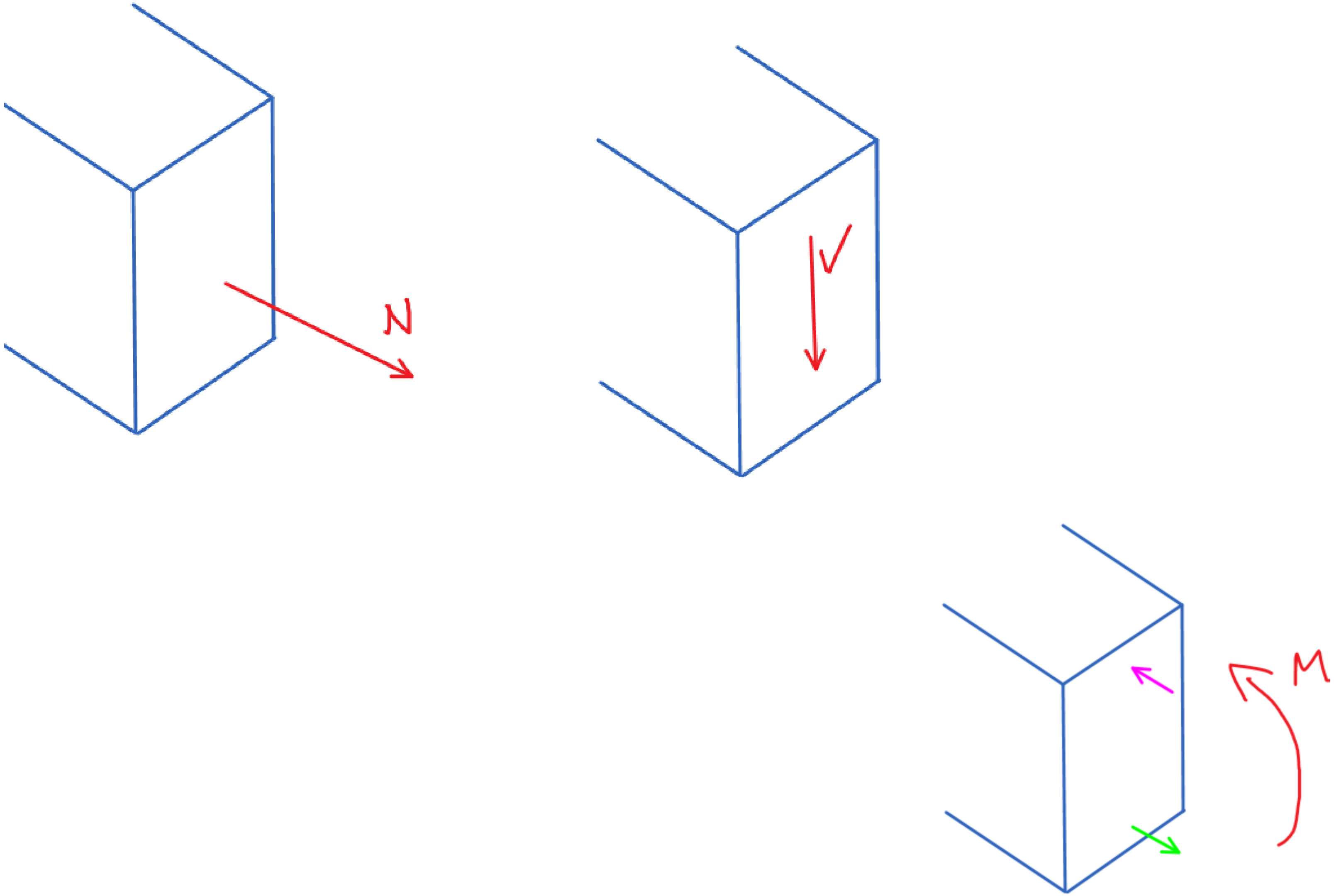
$$M_y = \int_A \sigma \cdot z \, dA$$

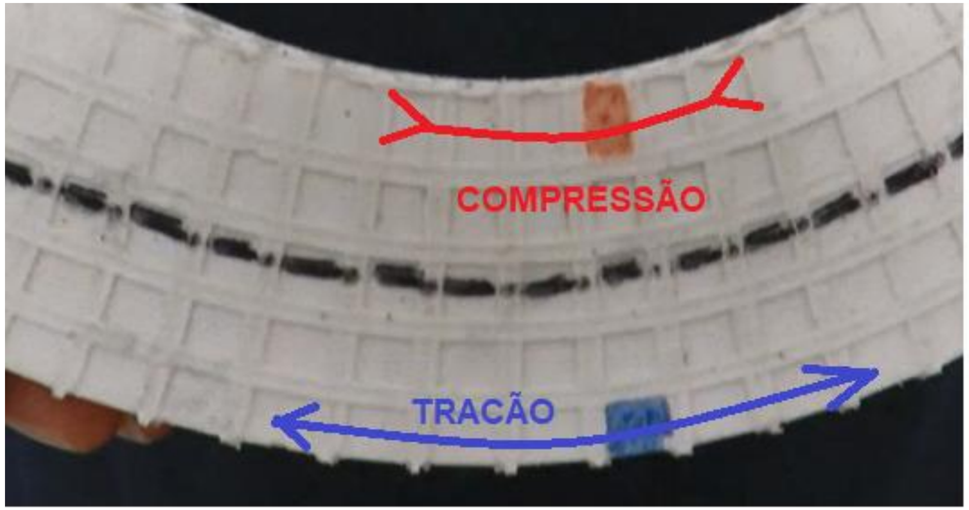
$$T = \int_A \left(\tau_z \, y - \tau_y \, z\right) dA$$

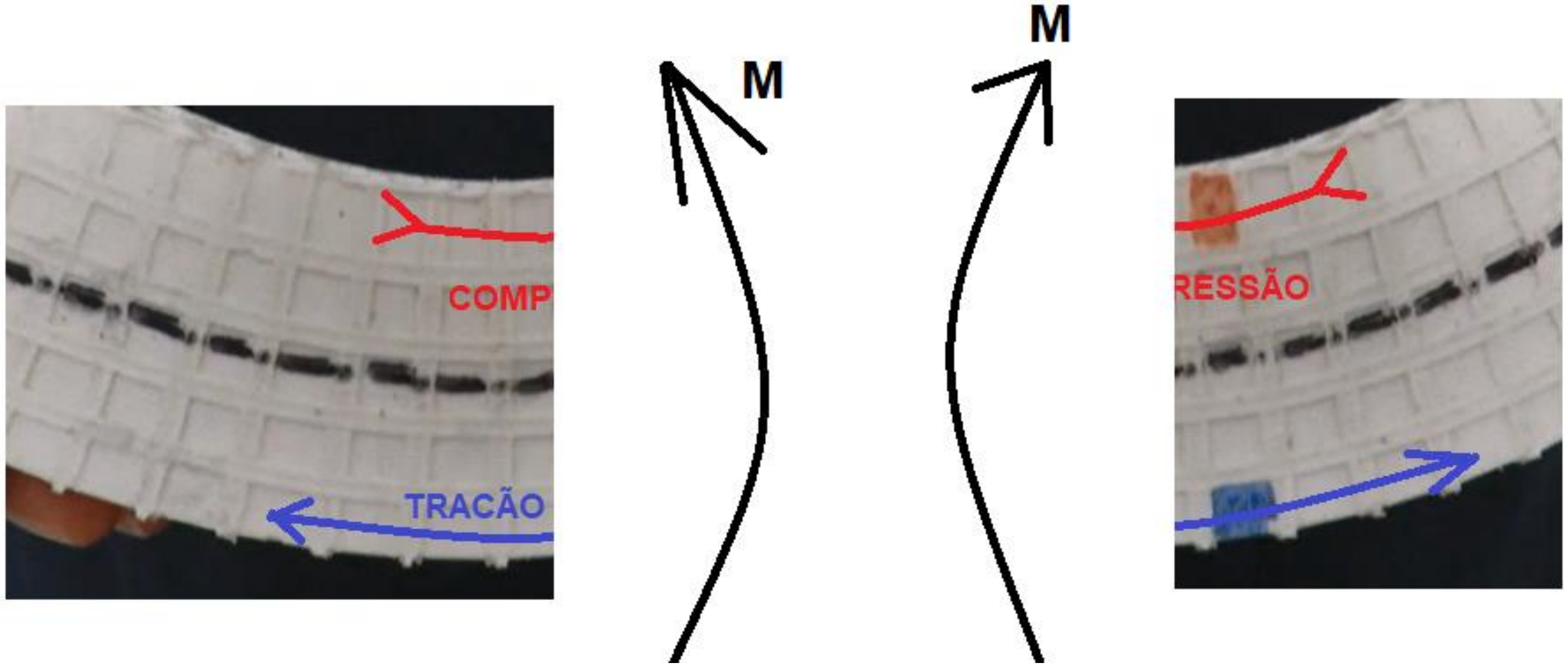
ESFORÇOS SOLICITANTES – SISTEMAS PLANOS

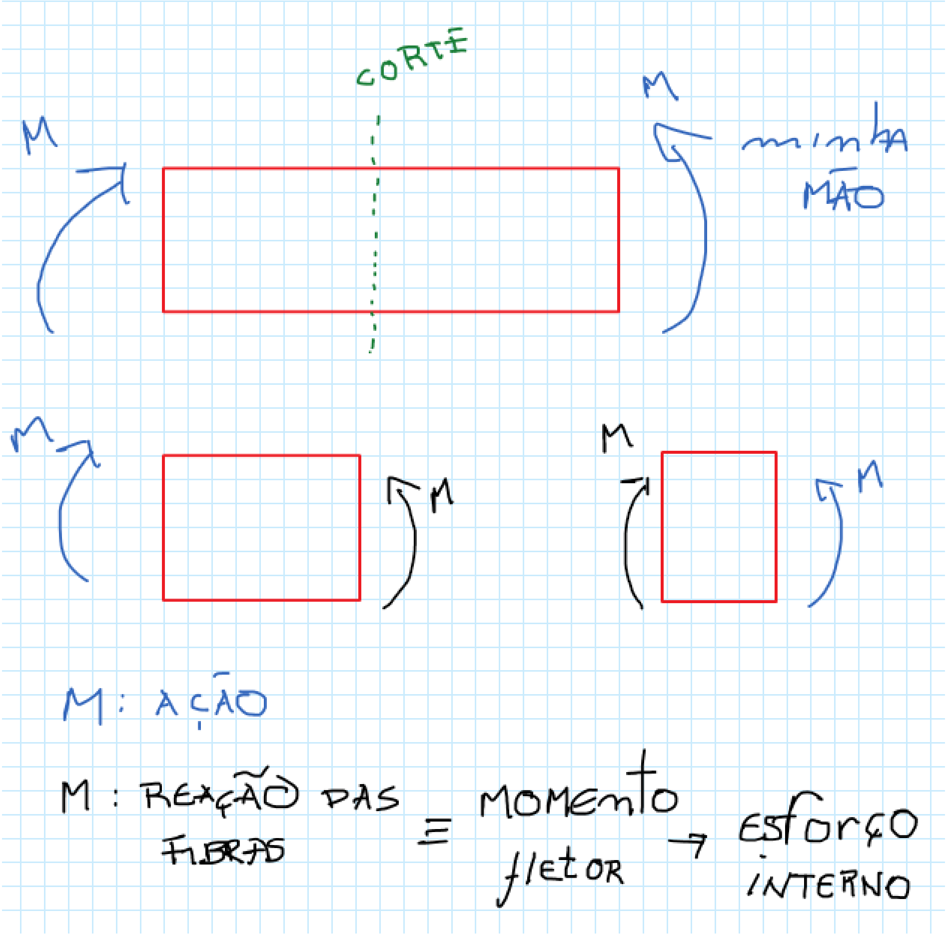
Para o caso de cargas/geometria contidas no plano, vamos estudar por agora 3 componentes: **M, V e N**, dispensando os índices.







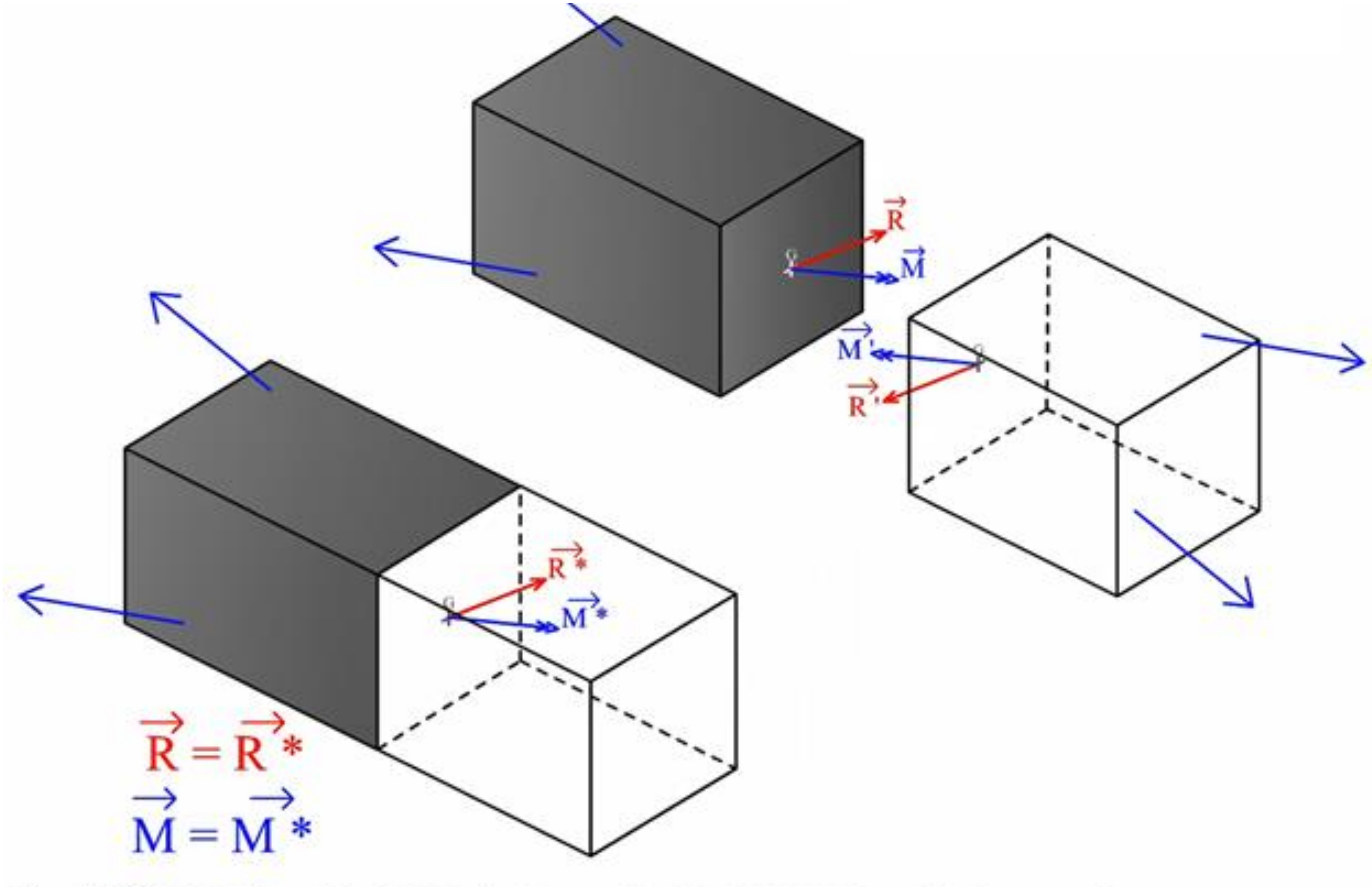




Momento traciona as fibras inferiores, em ambos os cortes

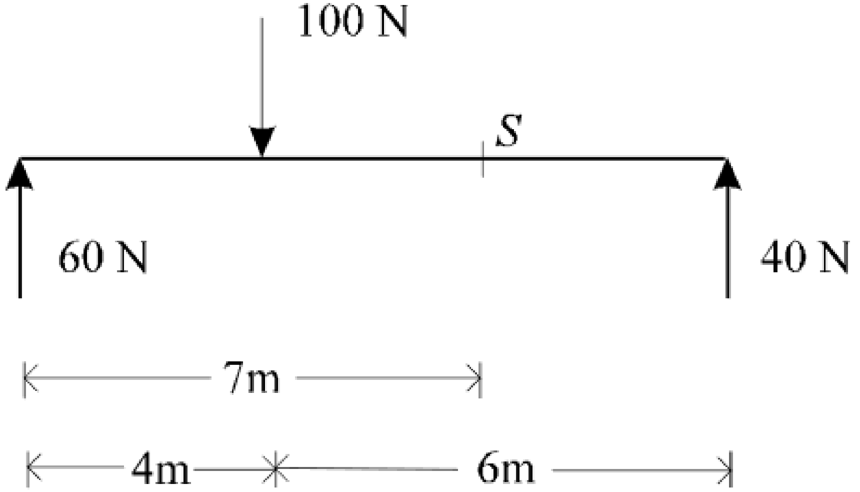
Enunciado fundamental

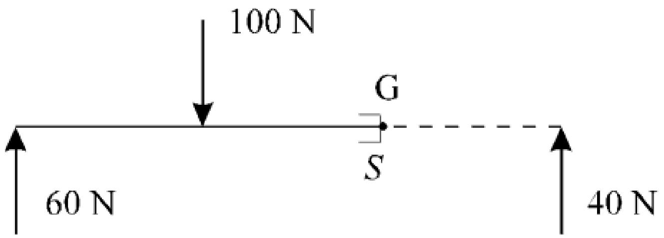
Os esforços solicitantes que atuam em uma seção transversal de uma barra podem ser obtidos cortando a barra nesta seção e reduzindo no seu centro de gravidade ou todos os esforços externos aplicados de um lado do corte ou então todos os esforços externos aplicados do outro lado do corte.



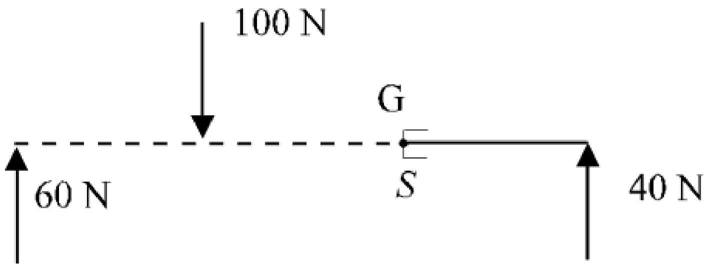
Exemplo

Seja o caso:



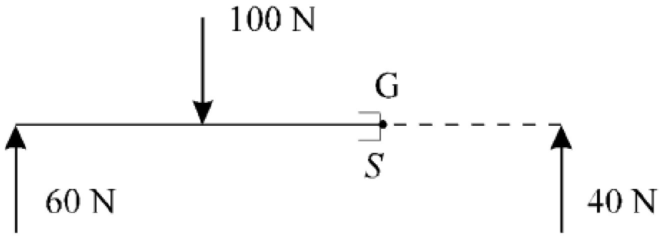


Corte à esquerda

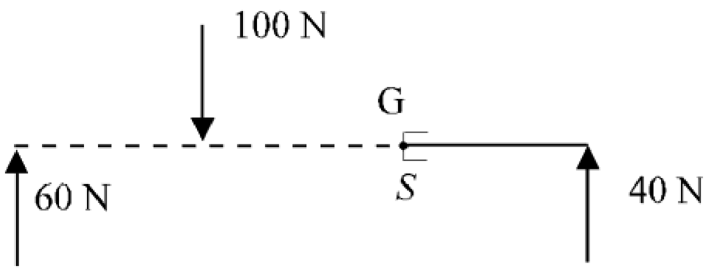


Corte à direita

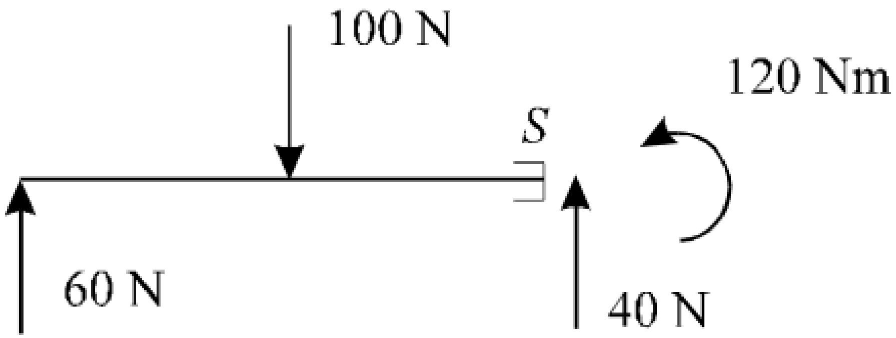
Exemplo

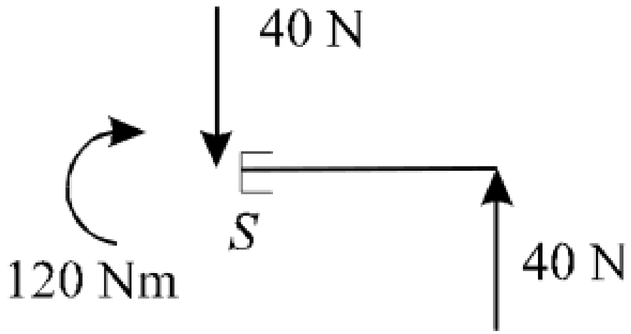


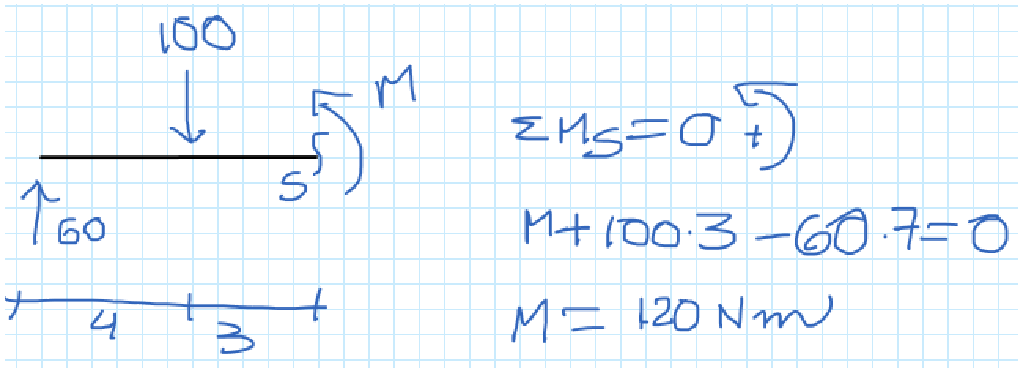
Corte à esquerda

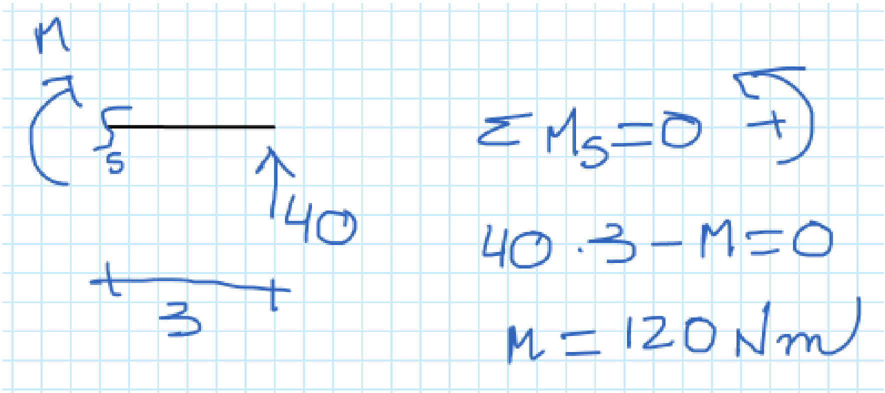


Corte à direita

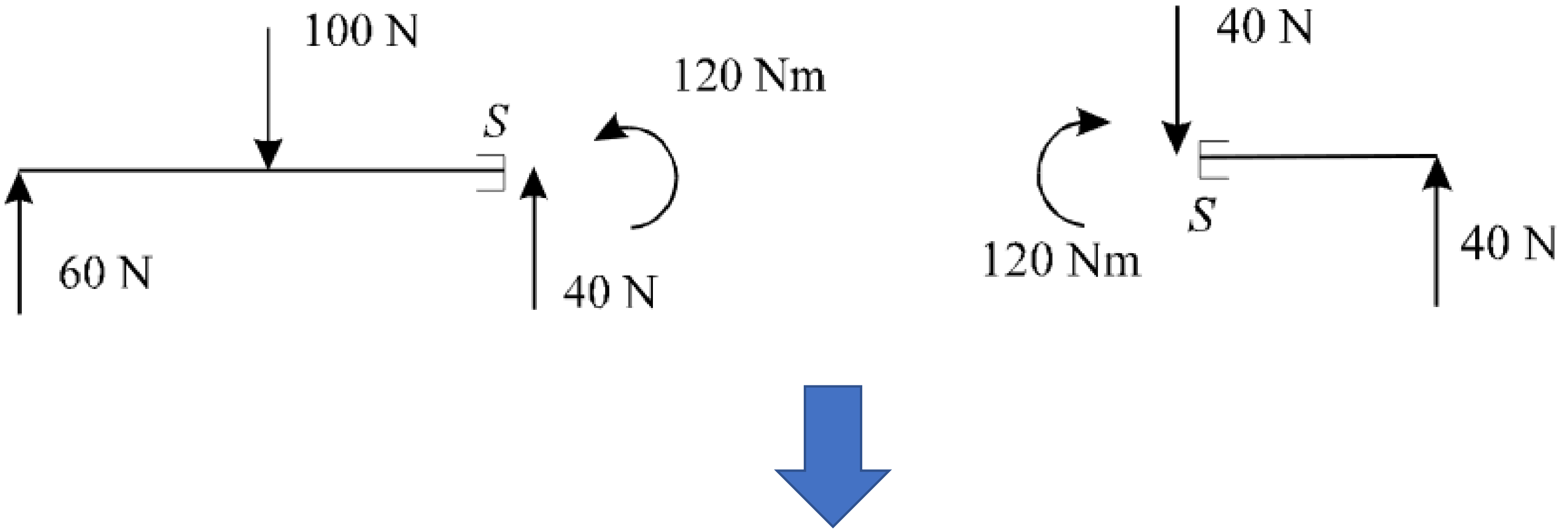








Exemplo

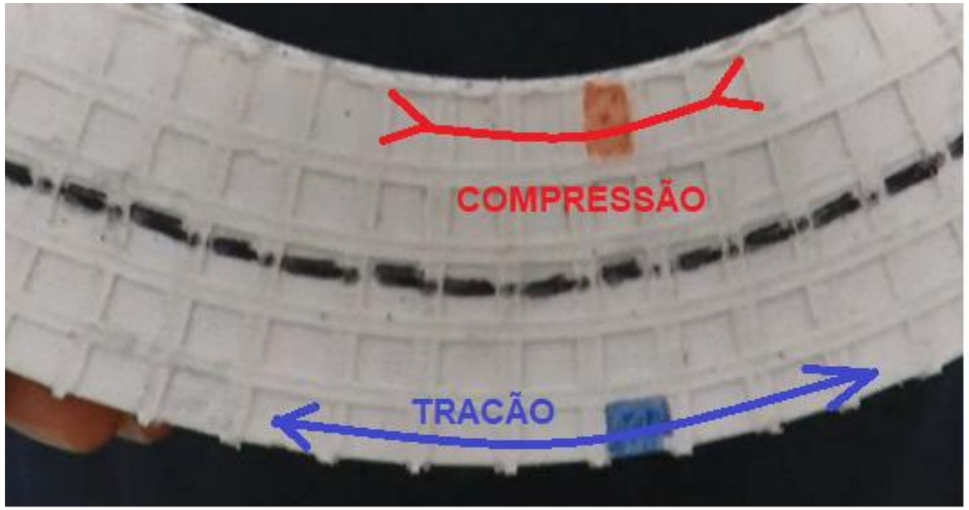


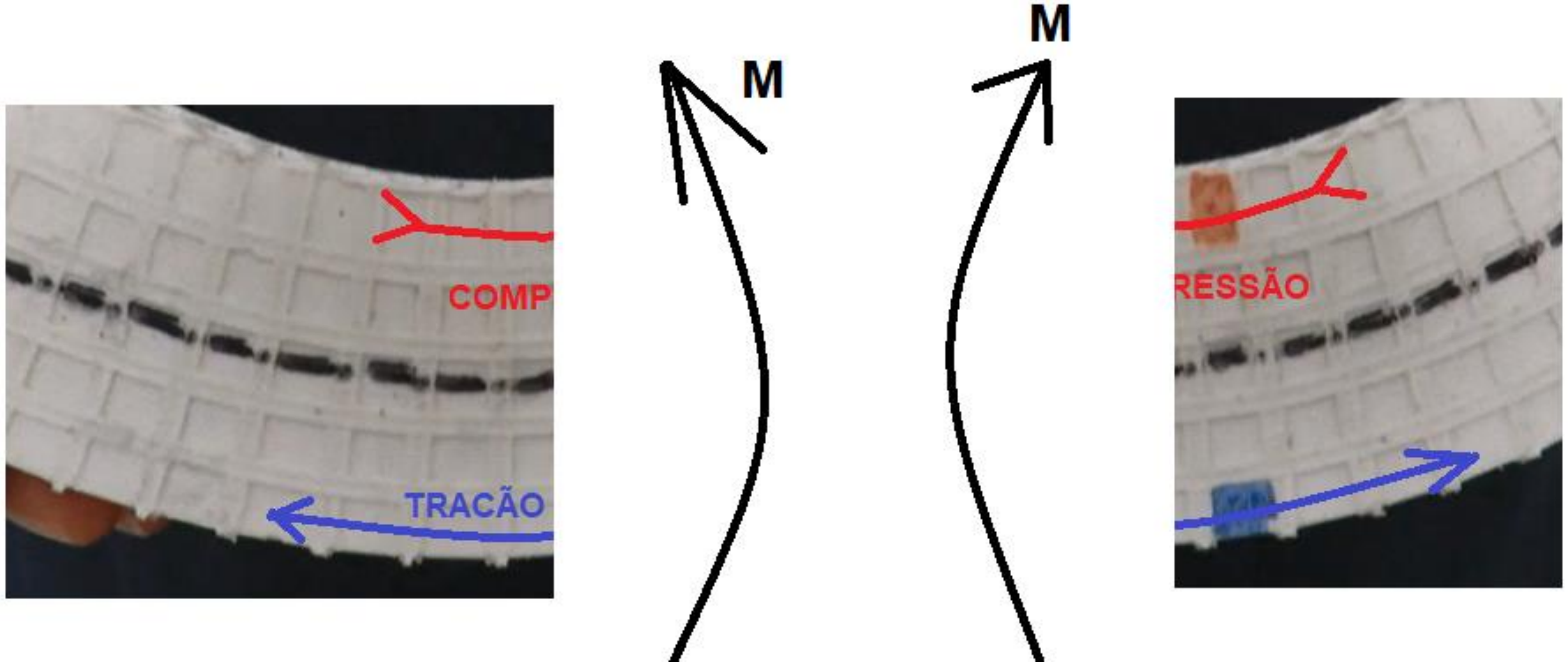
Em ambos os cortes:

Momento traciona as fibras inferiores

Cortante gira a seção no sentido anti-horário

Sentido físico do momento fletor

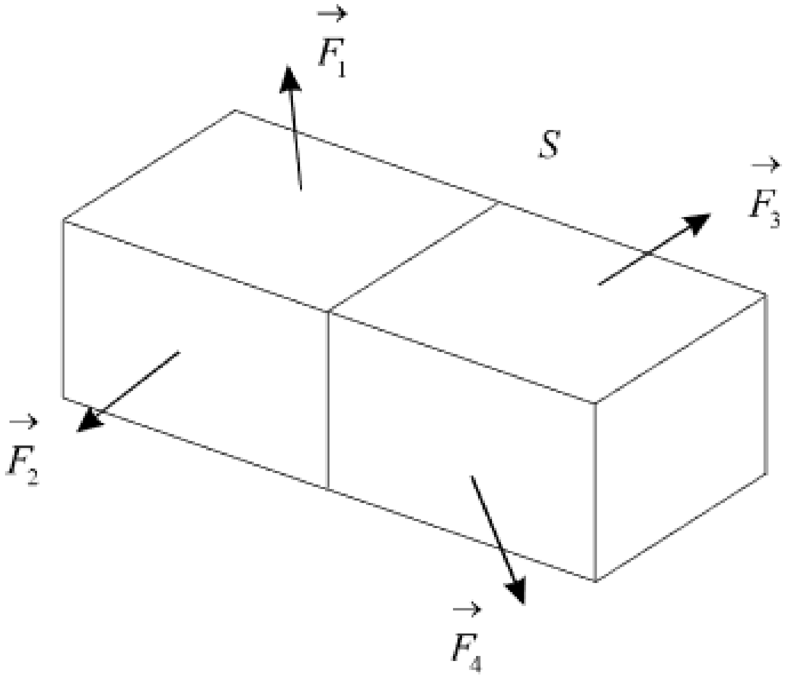




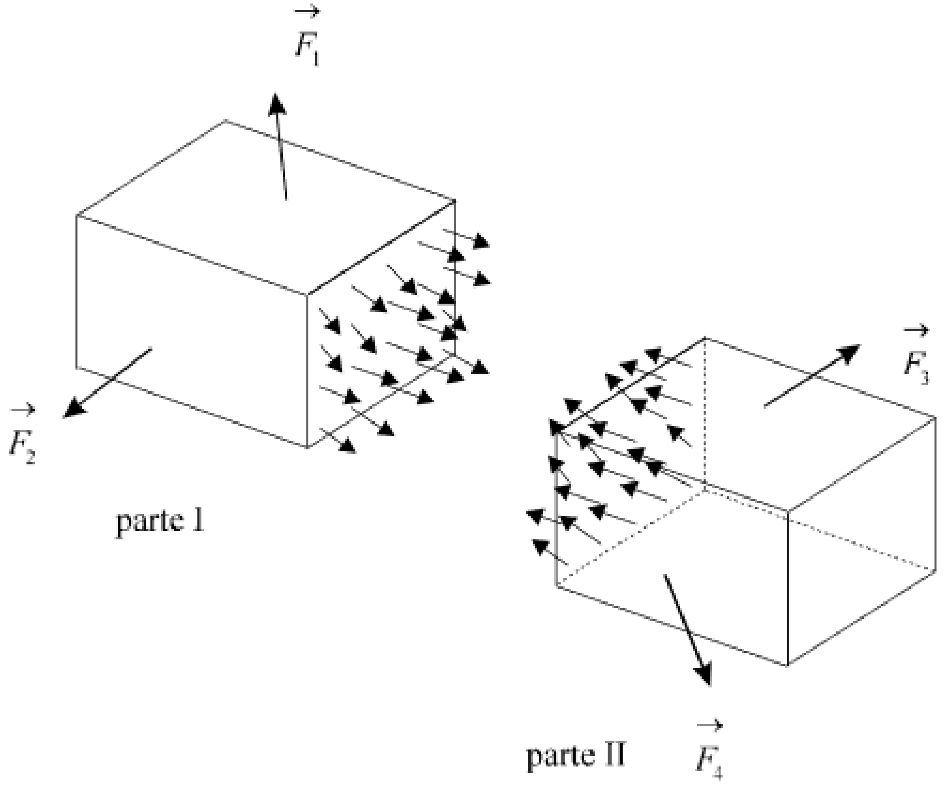
Momento traciona as fibras inferiores, em ambos os cortes

Demonstração

Seja o sistema em equilíbrio de ações ativas a reativas:

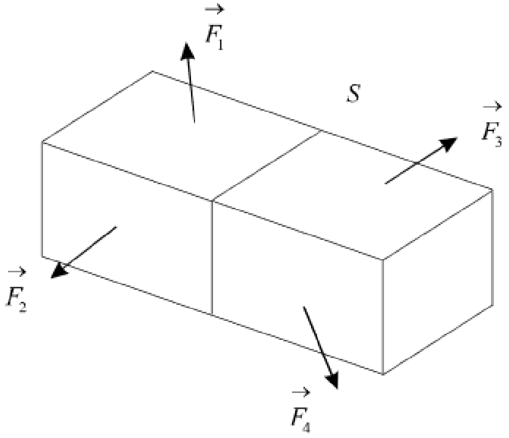


Corte na seção S

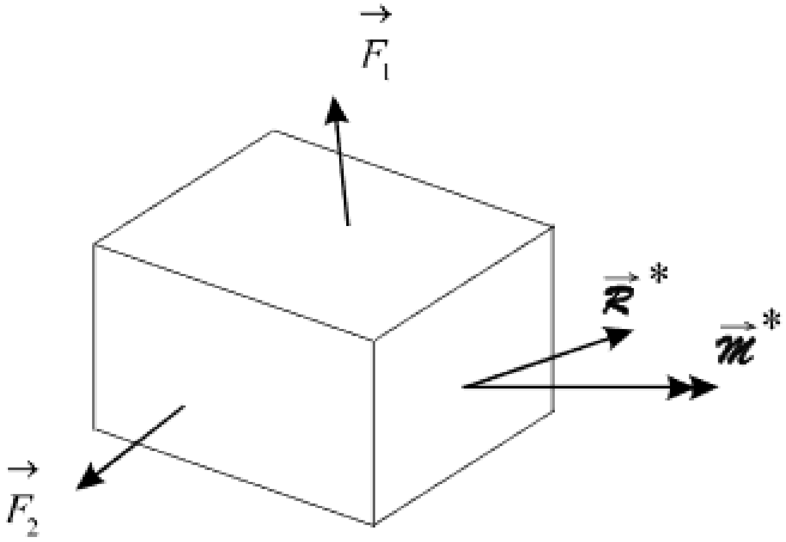


(a)

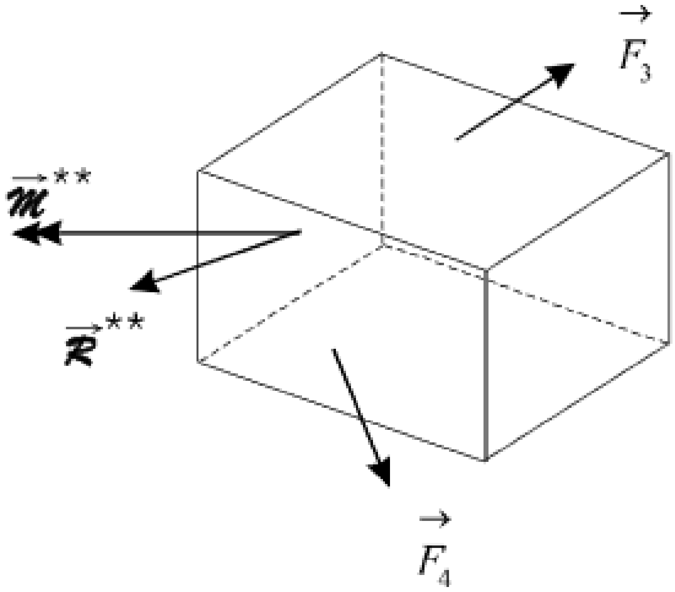
Demonstração



Redução dos esforços no CG da seção:



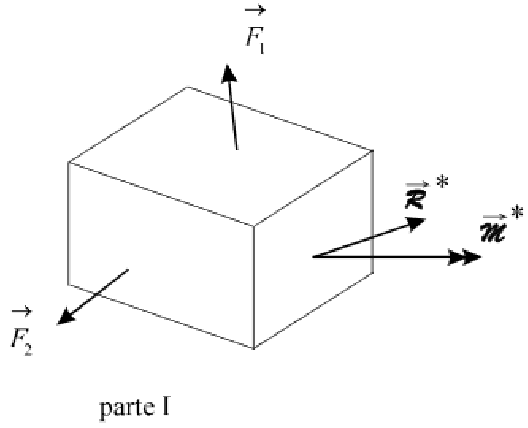
parte I

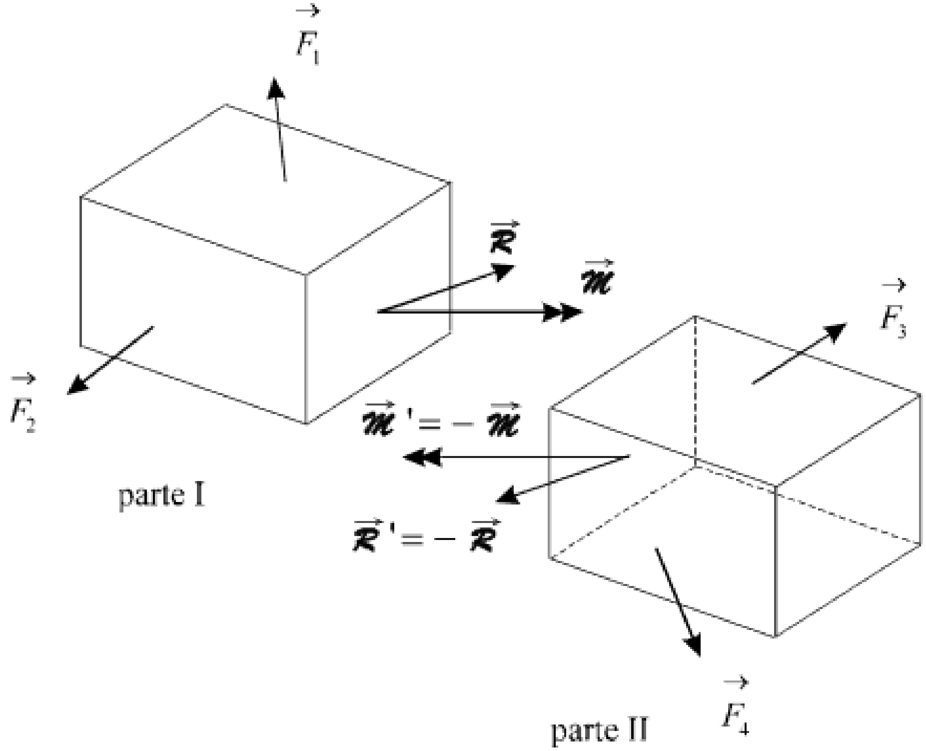


parte II

Demonstração

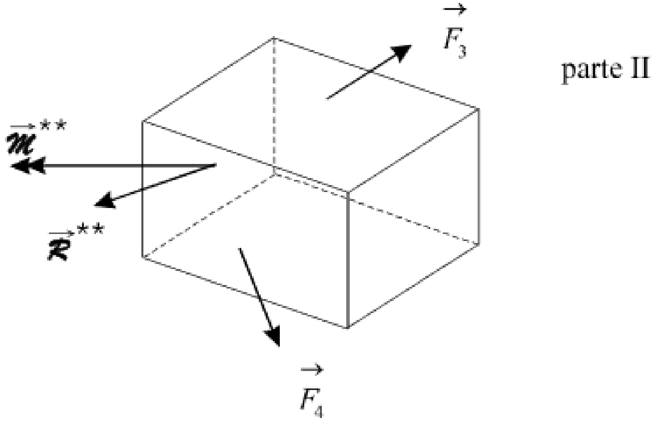
Devido ao conceito de ação e reação:





$$\vec{\mathcal{R}}^{*} = \vec{\mathcal{R}} \quad \text{e} \quad \vec{\mathcal{M}}^{*} = \vec{\mathcal{M}}$$

$$\vec{\mathcal{R}}^{**} = \vec{\mathcal{R}}' \quad \text{e} \quad \vec{\mathcal{M}}^{**} = \vec{\mathcal{M}}$$

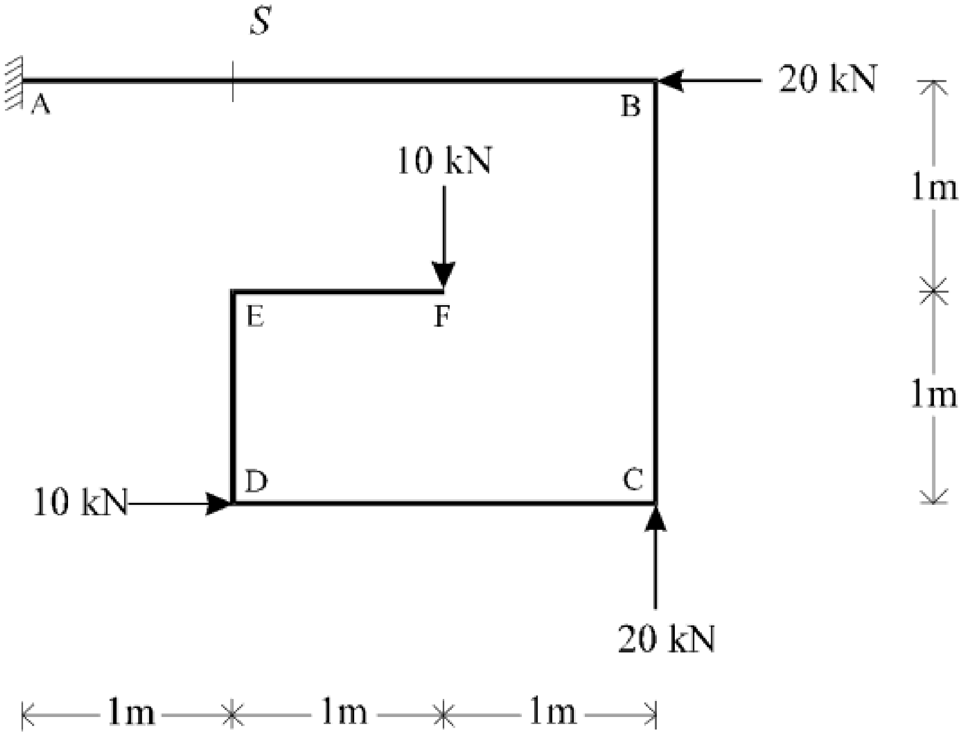


$$\vec{\mathcal{R}}^{**} = \vec{\mathcal{R}}' = -\vec{\mathcal{R}} = -\vec{\mathcal{R}}^{*}$$

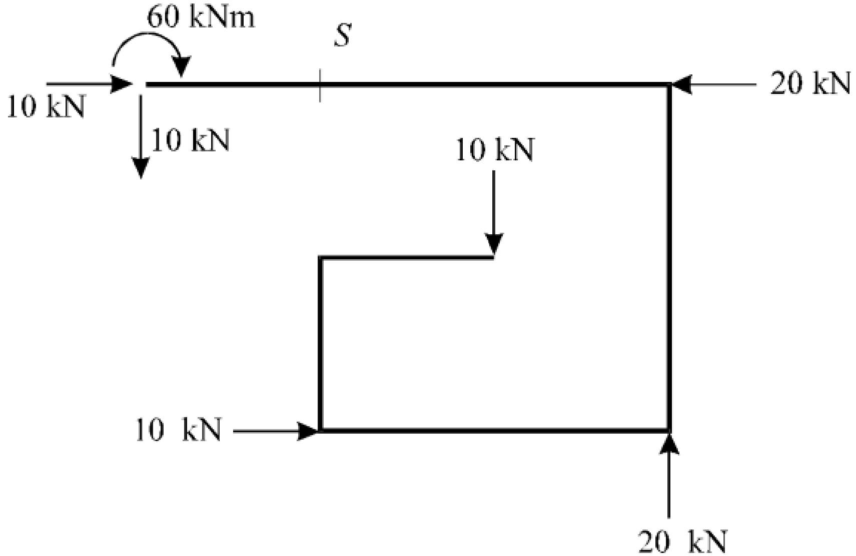
$$\vec{\mathcal{M}}^{**} = \vec{\mathcal{M}}' = -\vec{\mathcal{M}} = -\vec{\mathcal{M}}^{*}$$

Exemplo

Obter os esforços na seção S:

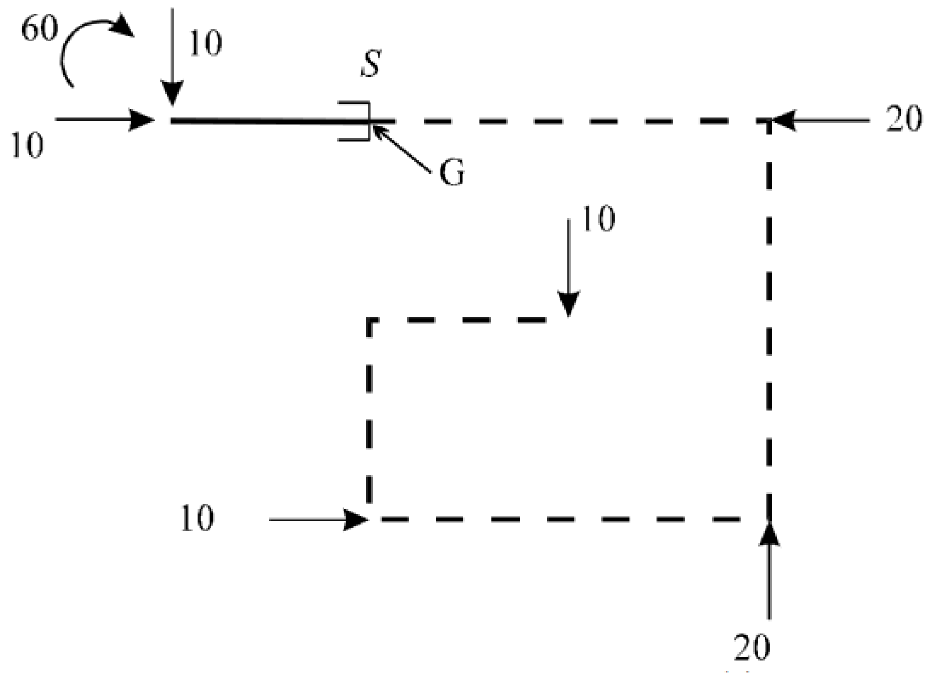


a) Cálculo das reações:



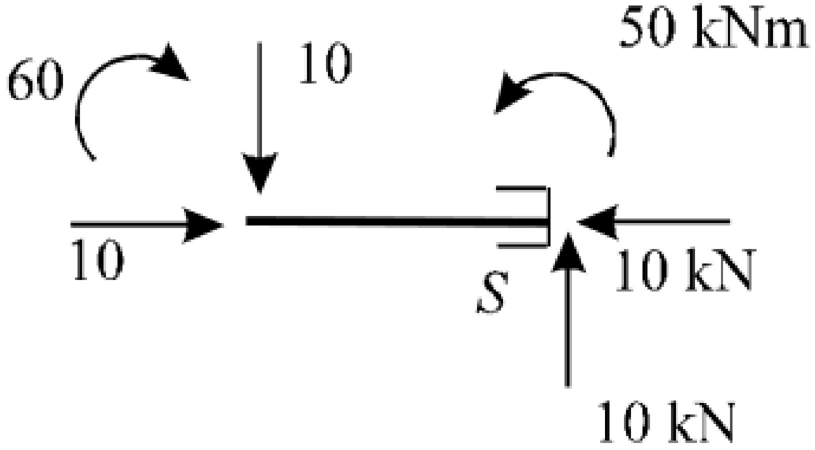
Exemplo

b) Corte à esquerda:



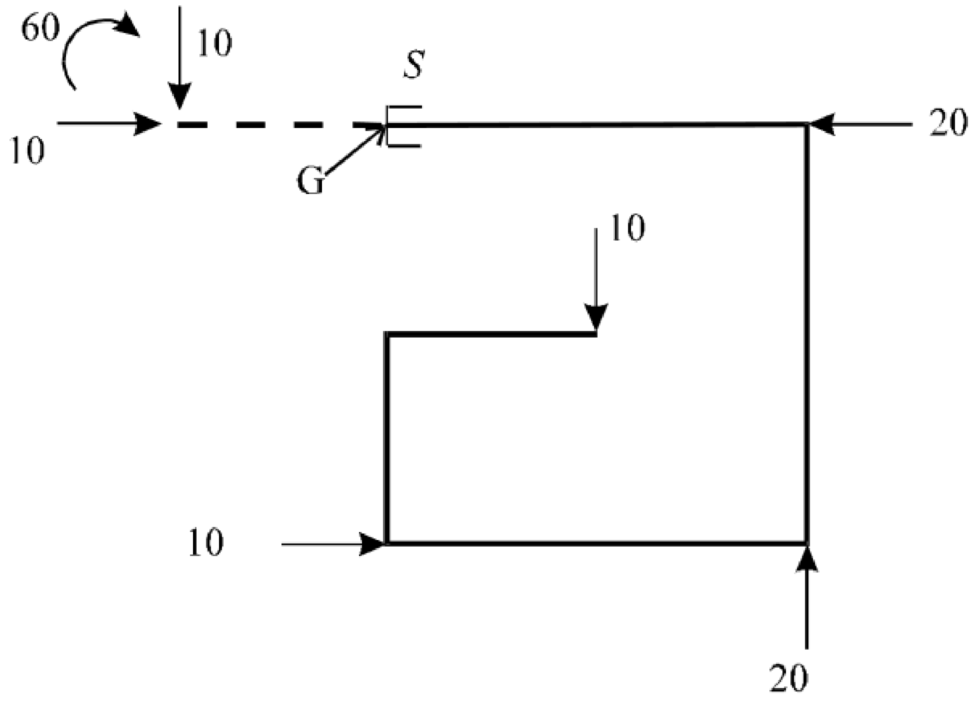
Realizando equilíbrio estático no corpo cortado:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M_s = 0$$



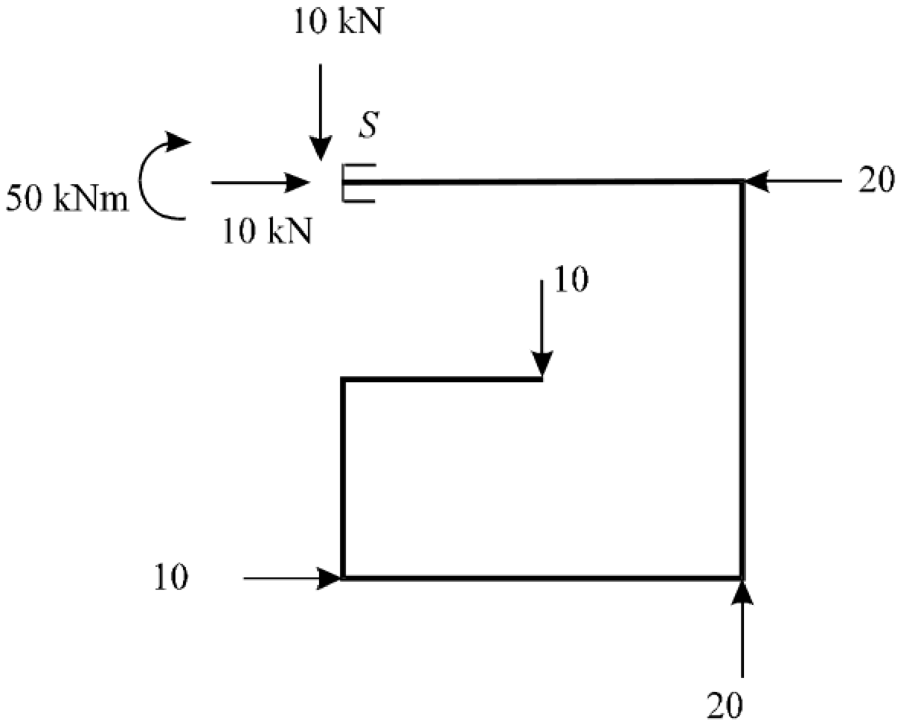
Exemplo 2

c) Corte à direita:



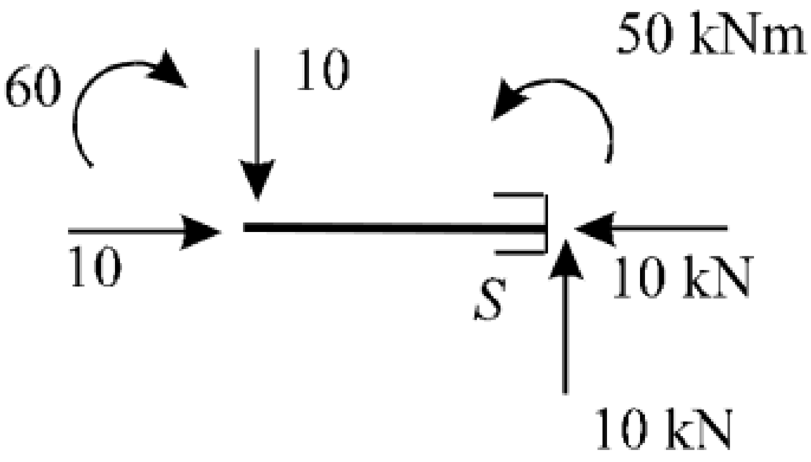
Realizando equilíbrio estático no corpo cortado:

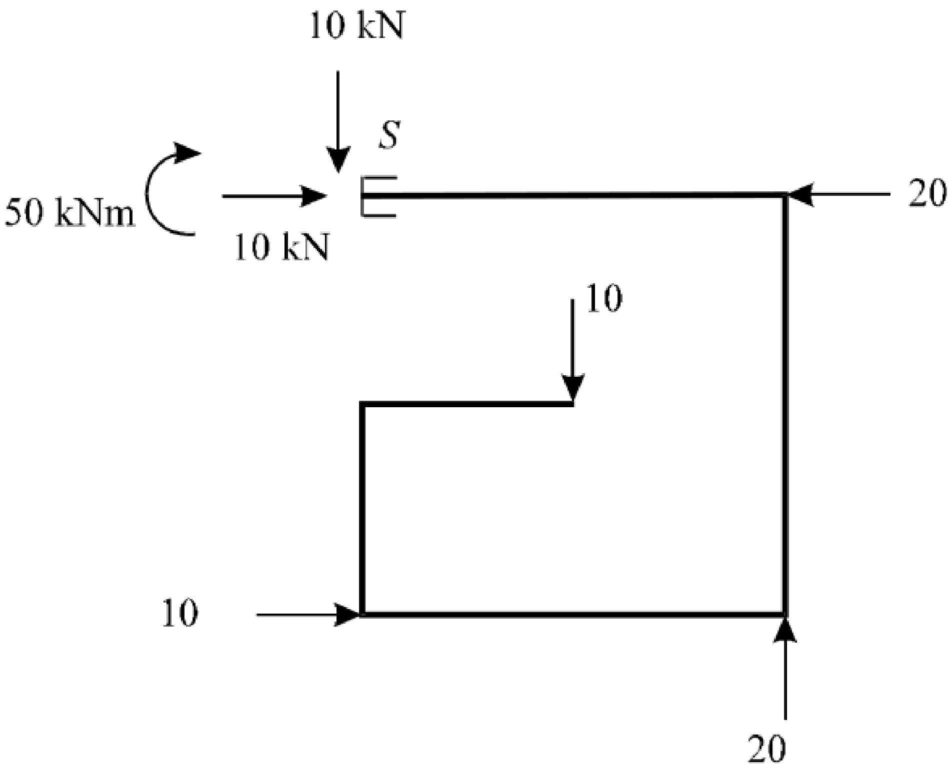
$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M_s = 0$$



Exemplo

A seção S está com os seguintes esforços solicitantes:



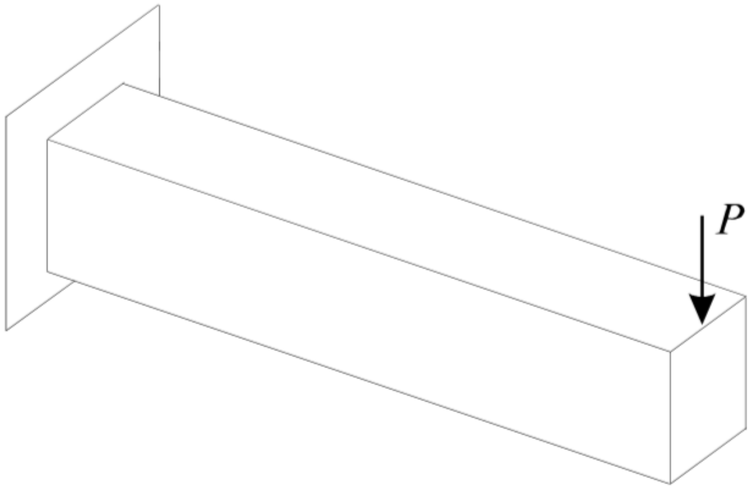


N_s = 10 kN
V_s = 10 kN
M_s = 50 kNm

(sentidos indicados pelo equilíbrio)

Diagramas de esforços solicitantes de estruturas planas

Se se aumentar continuamente o valor da carga P aplicada nesta viga, onde deverá ocorrer sua ruptura, ou seja, onde a viga irá se romper?”



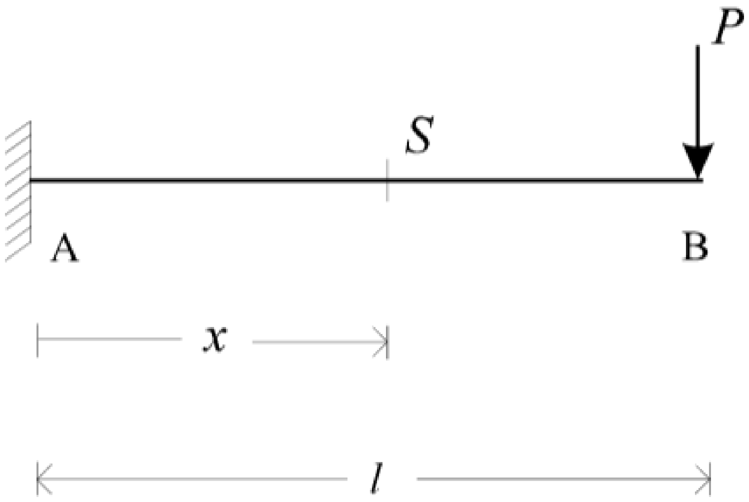
Por que os maiores esforços nesta viga se darão junto ao engastamento?”

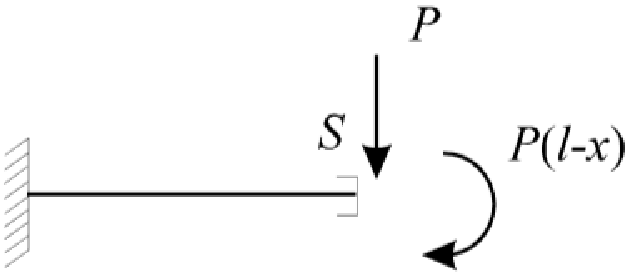
A viga deverá se romper junto ao engastamento porque é nesta região que ela estará sujeita aos maiores esforços.

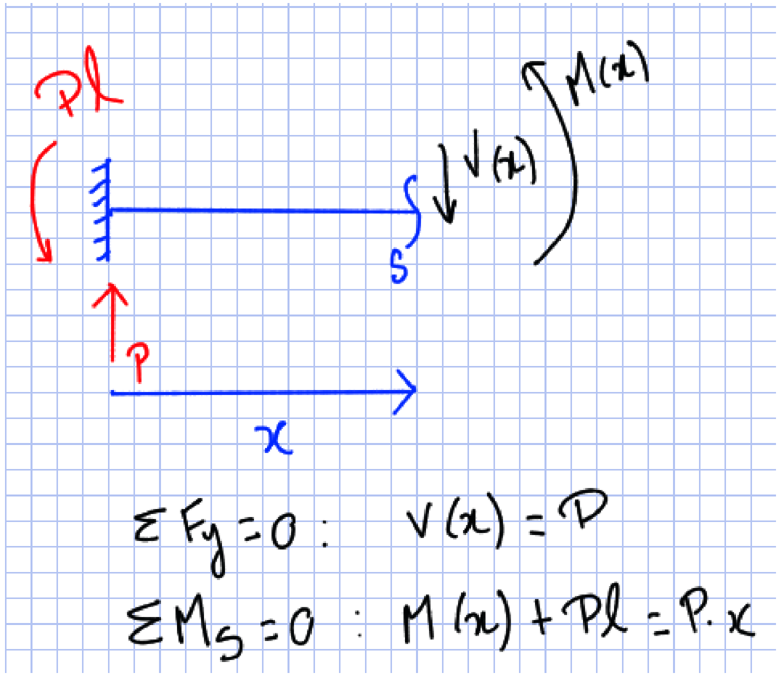
Diagramas de esforços

Seja a viga em balanço:

Corte S numa seção x:



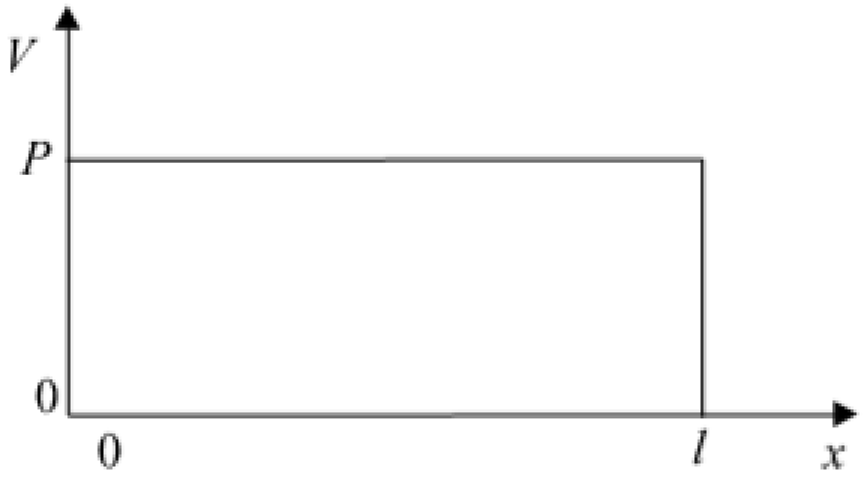


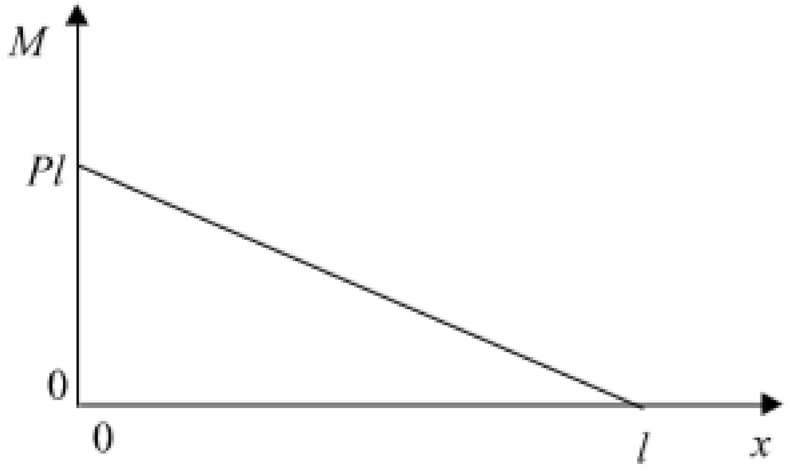


N(x) = 0 (nesse exemplo)

Diagramas de esforços

Gráficos que mostram a variação do esforço normal, cortante e do momento fletor ao longo do eixo da estrutura



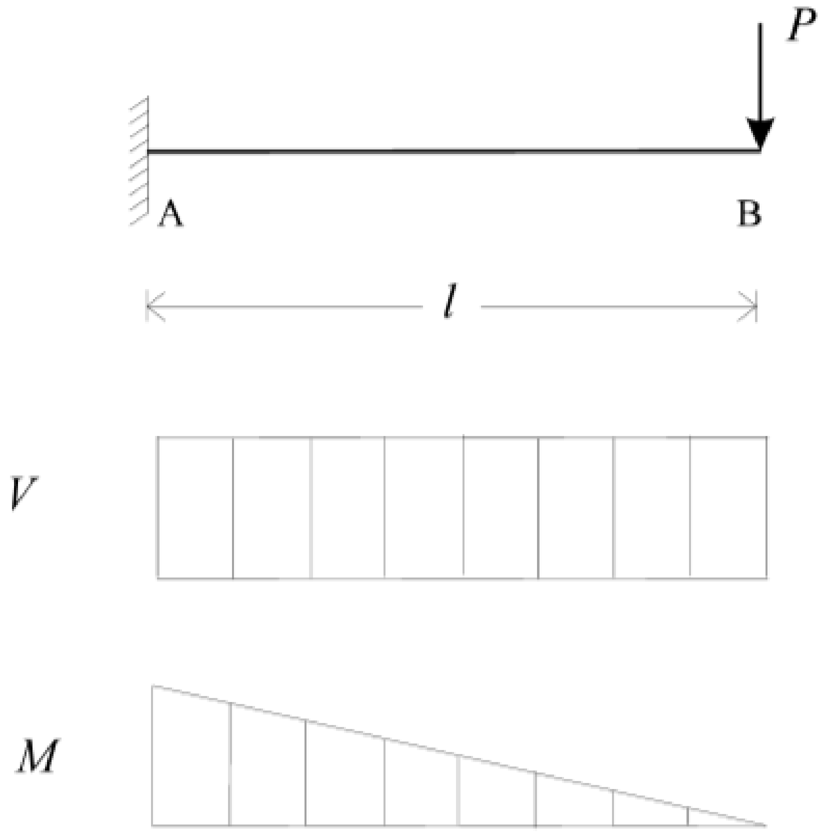


Seção junto ao engaste é a mais solicitada

*** N(x) = 0 (nesse exemplo)**

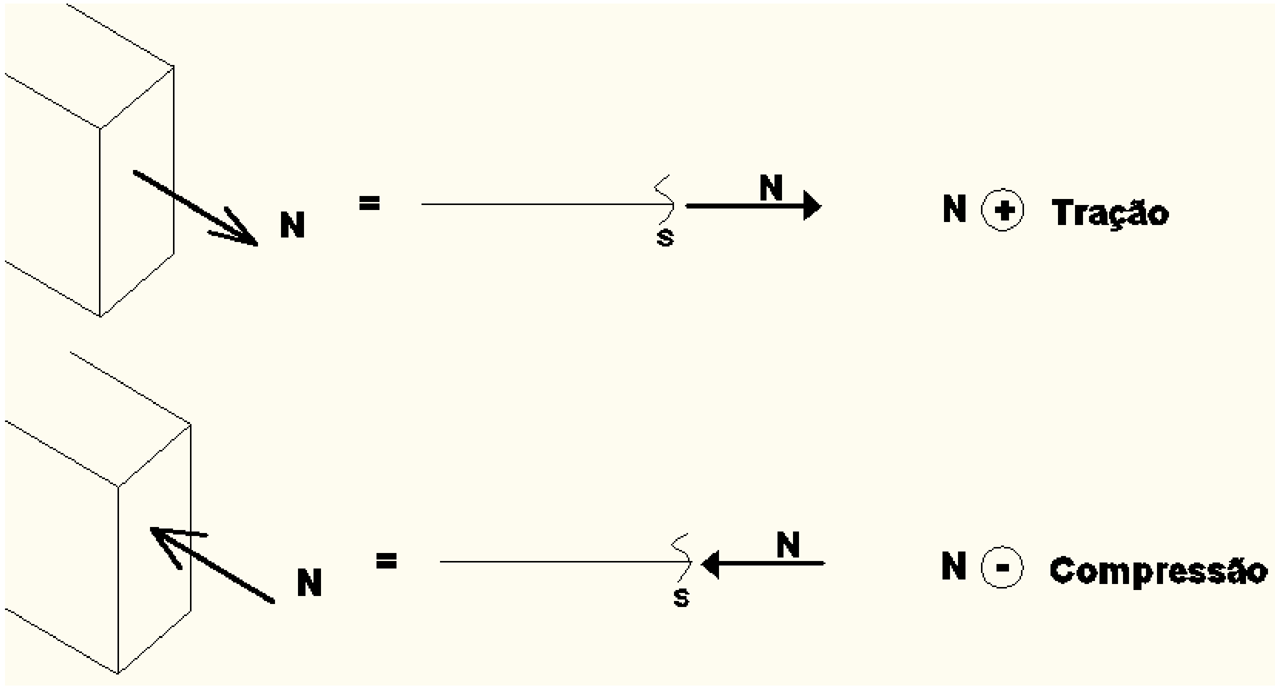
Diagramas de esforços

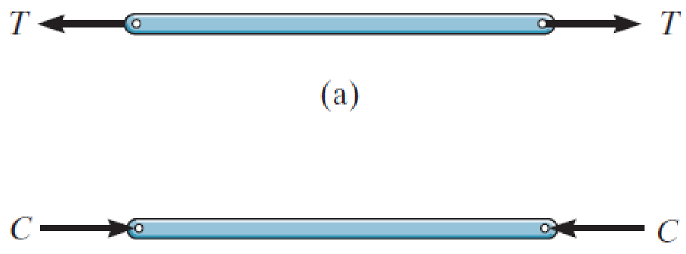
Valores plotados são na direção perpendicular, ou paralelo ao eixo, conforme definição do esforço

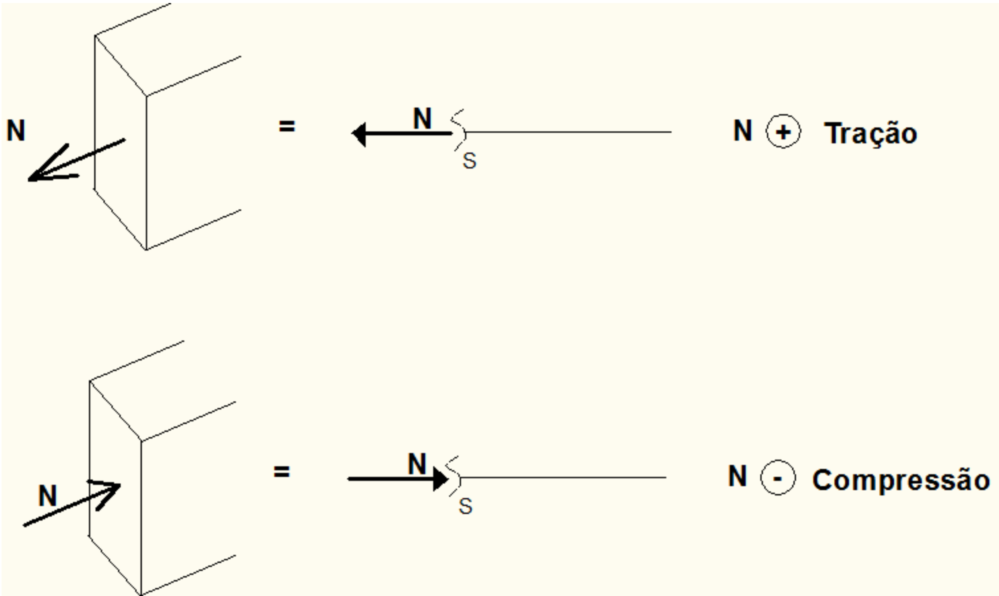


Diagramas de esforços - Convenção de sinais

Esforço Normal (N)

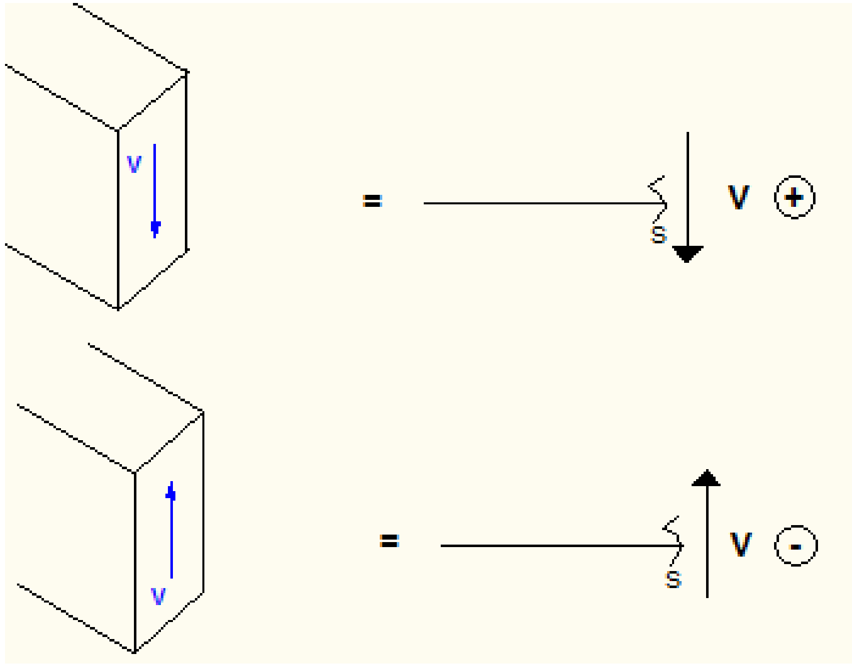


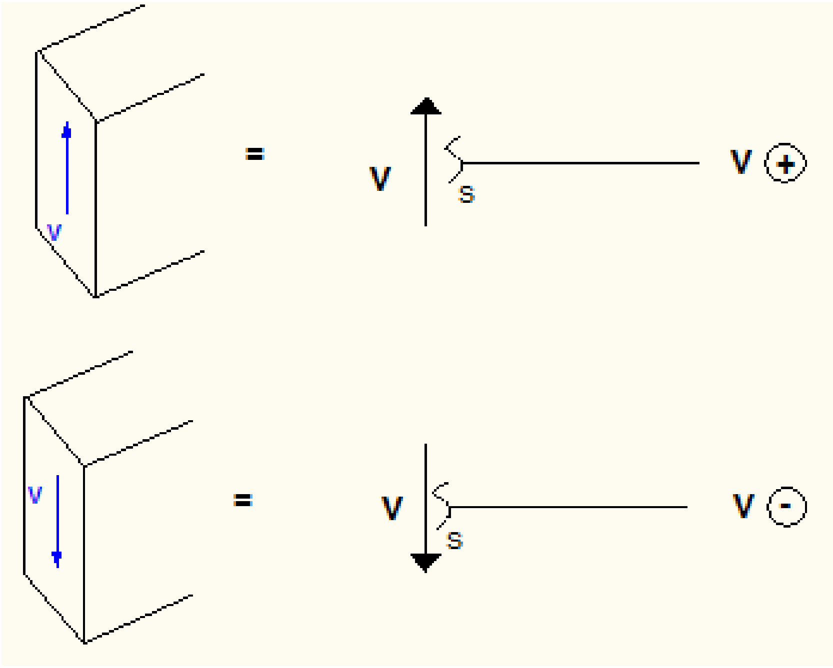




Diagramas de esforços - Convenção de sinais

Esforço Cortante (V)

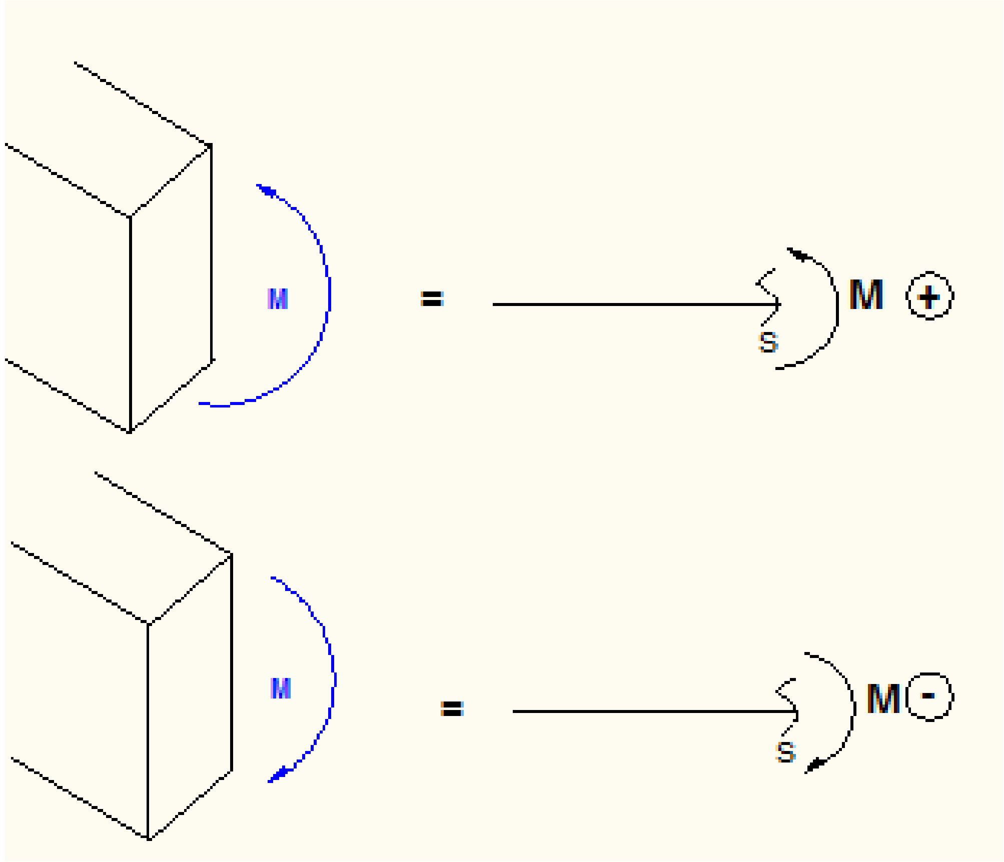


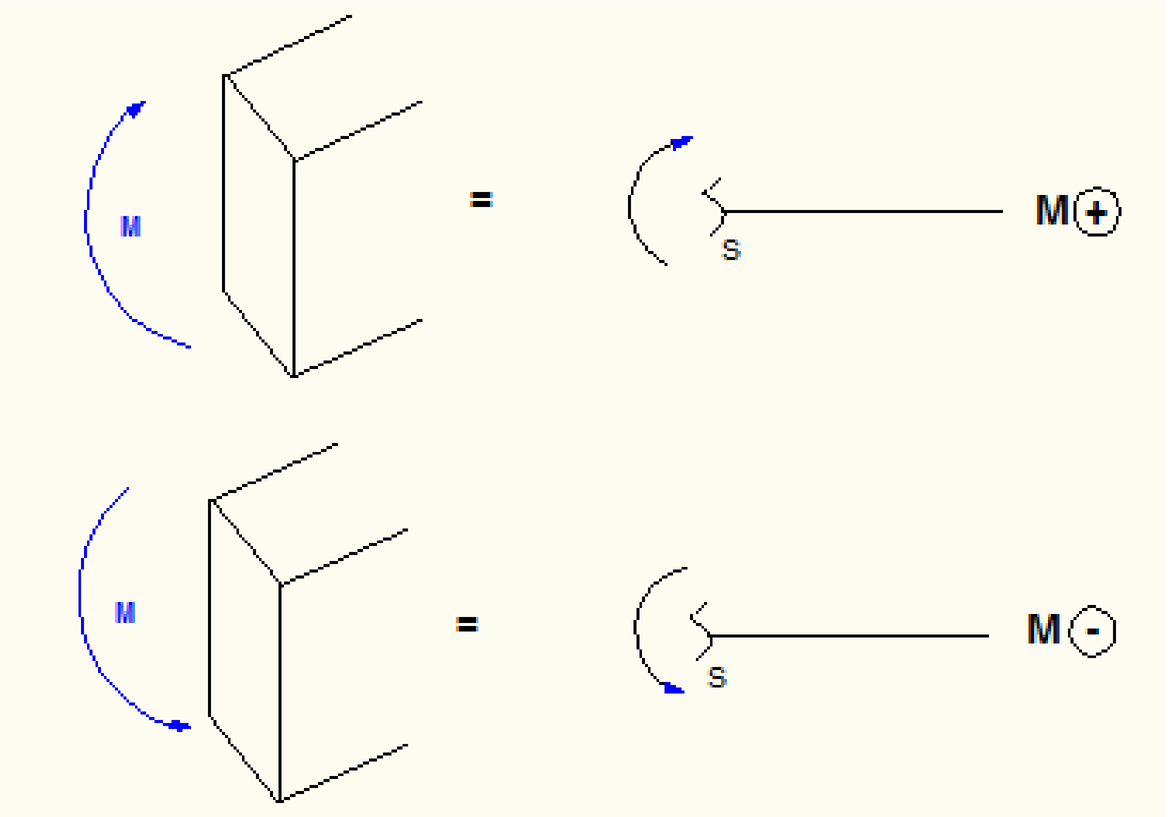


Força cortante	Gira o trecho de barra em que atua no sentido horário **V>0**	Gira o trecho de barra em que atua no sentido anti-horário **V<0**

Diagramas de esforços - Convenção de sinais

Momento fletor (M)



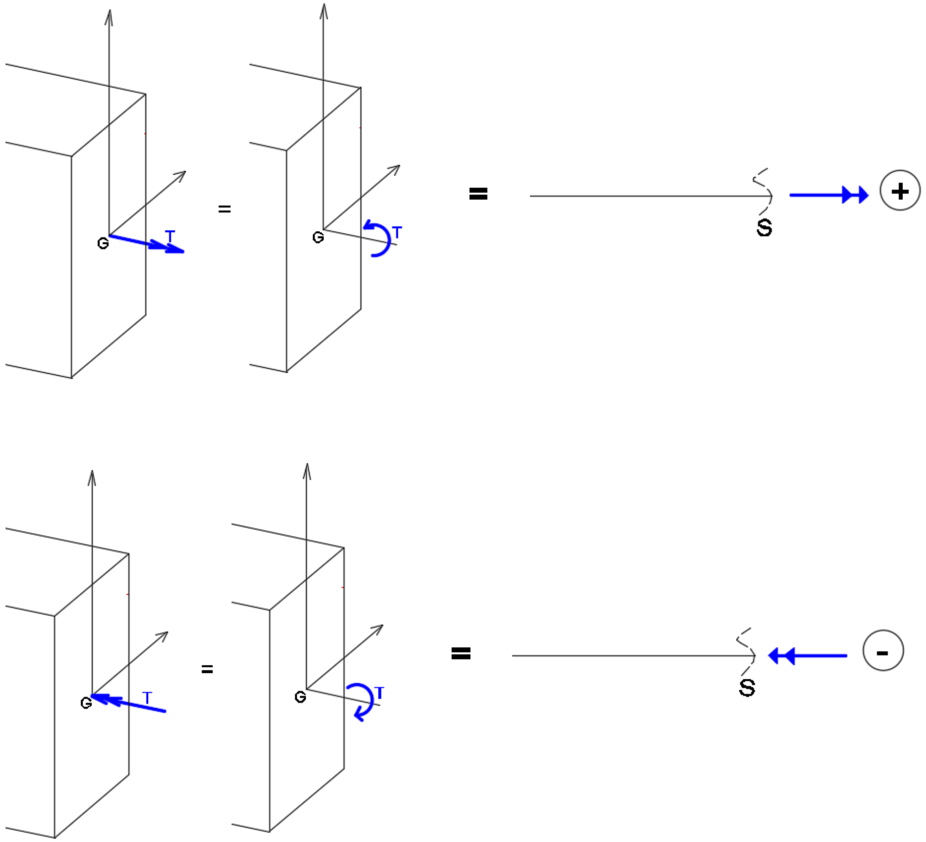


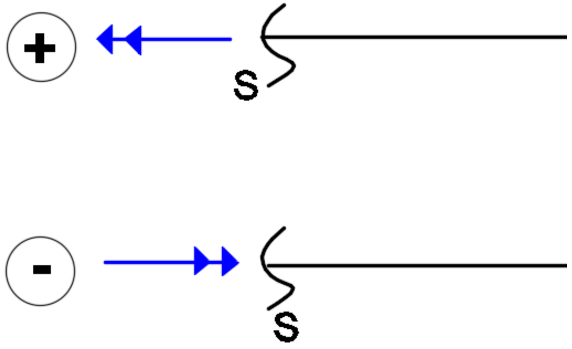
Momento fletor	Traciona as fibras inferiores da barra	Traciona as fibras superiores da barra

M>0 **M<0**

Diagramas de esforços - Convenção de sinais

Momento de torção (T)



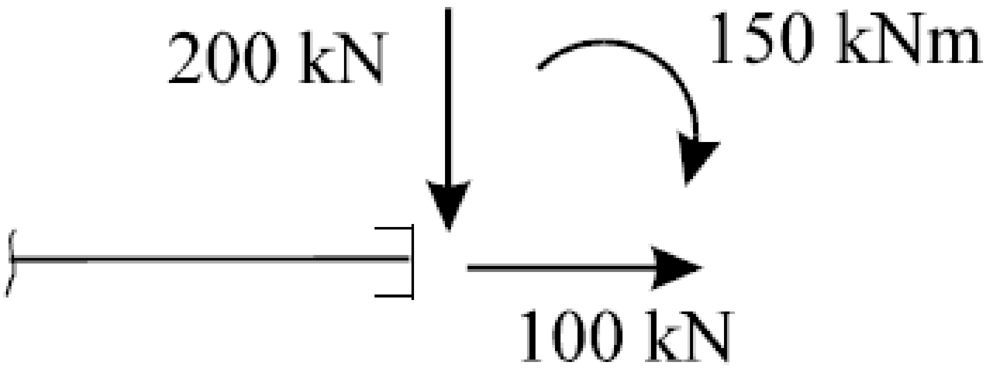


Momento de torção[2]	O vetor momento tem o sentido da normal externa à seção transversal em que atua	O vetor momento tem sentido contrário ao da normal externa à seção tranversal em que atua
	T>0	**T<0**

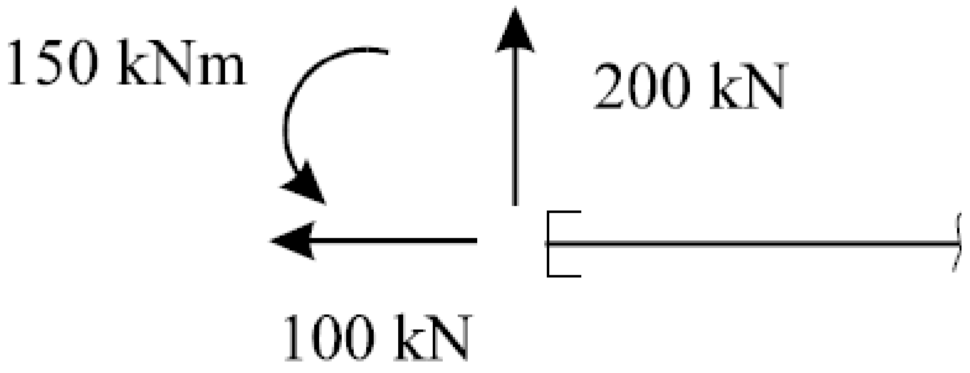
Rotacionar a seção no sentido anti-horário (T>0)

Exemplo 1

Corte à direita



Corte à esquerda



$$N = 100 \text{ kN}$$

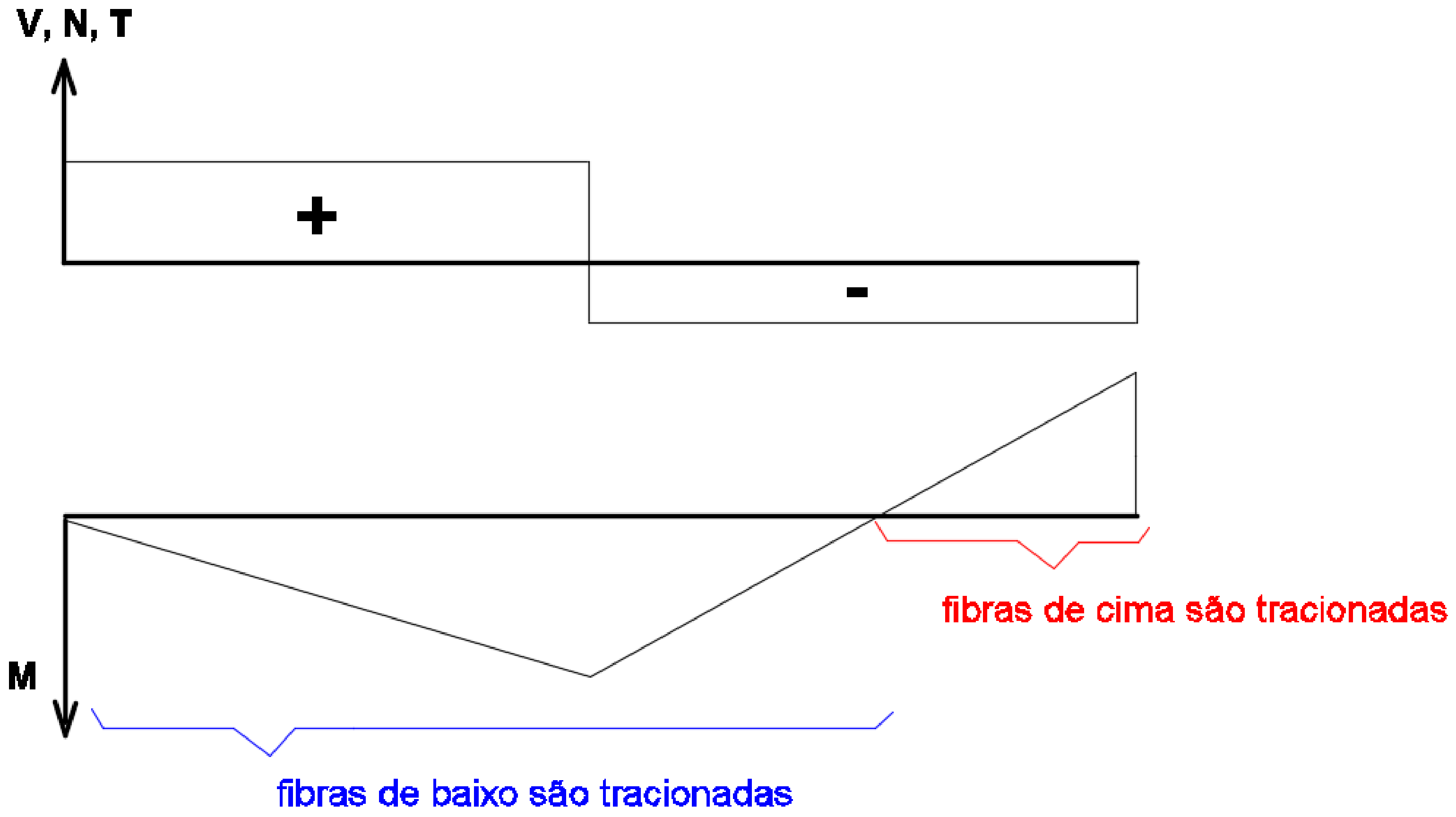
$$V = 200 \text{ kN}$$

$$M = -150 \text{ kNm}$$

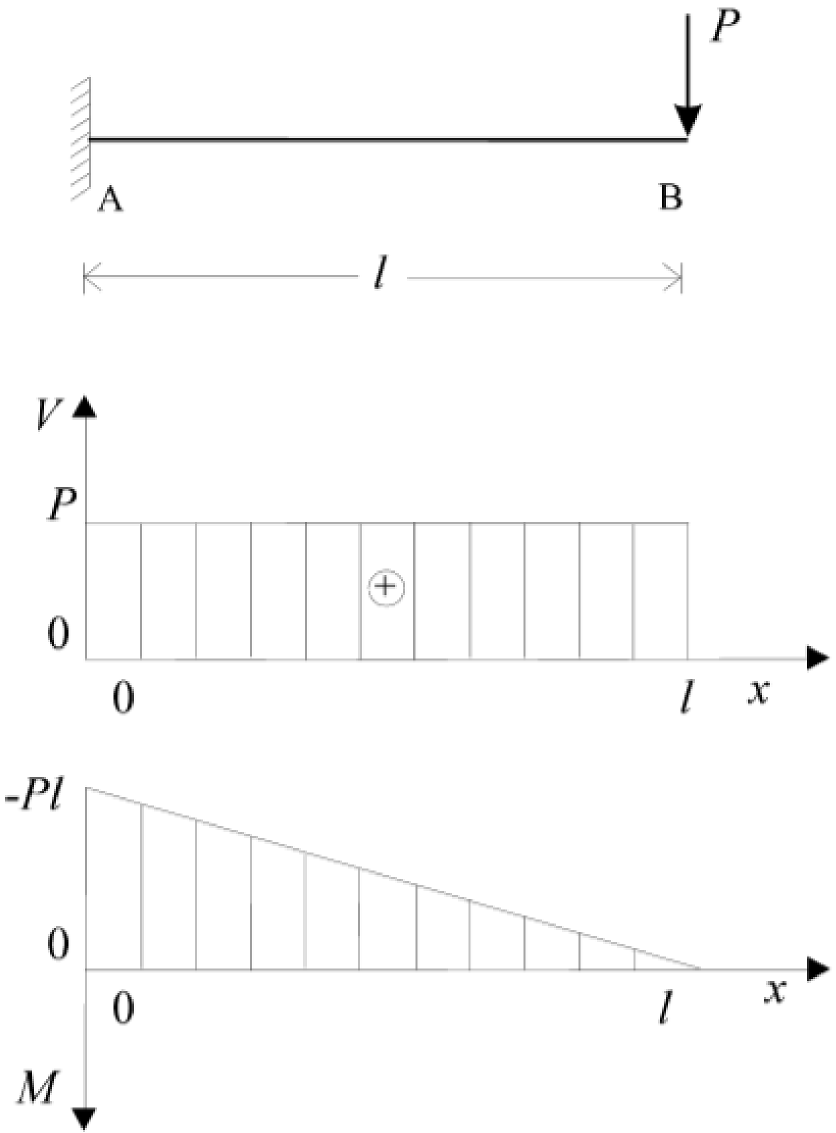
Diagramas de esforços - Desenhos

N, V, T > 0 → Desenha acima do eixo

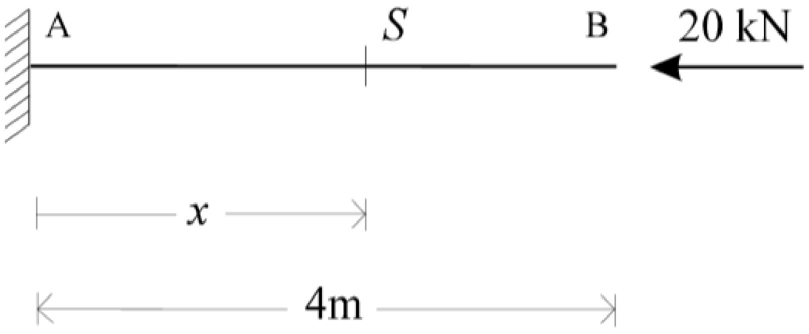
M: → Desenha o lado que traciona, c/ referencia o eixo da seção



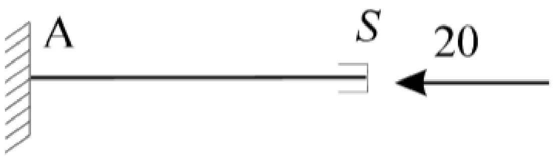
Diagramas de esforços – Exemplo de diagrama



Exemplo 2: Força horizontal



(a)



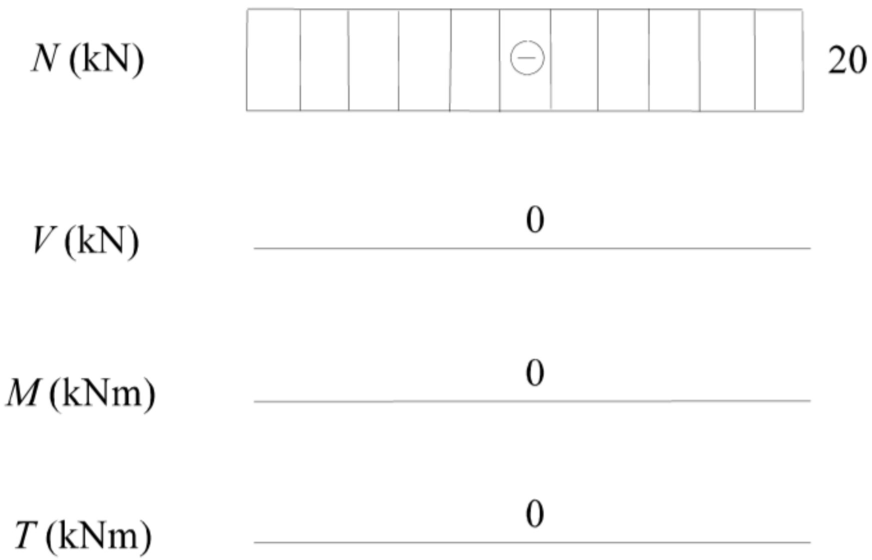
Por equilíbrio estático no corpo cortado:

$$N(x) = -20$$

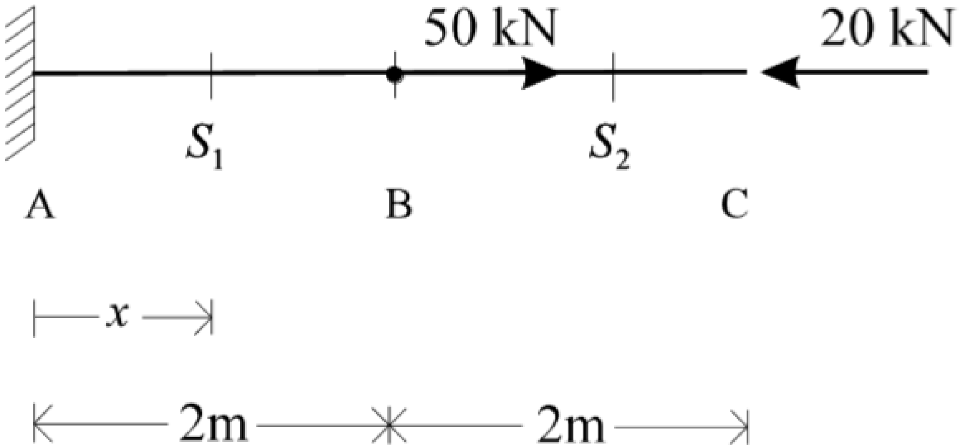
$$V(x) = 0$$

$$M(x) = 0$$

$$T(x) = 0\,.$$



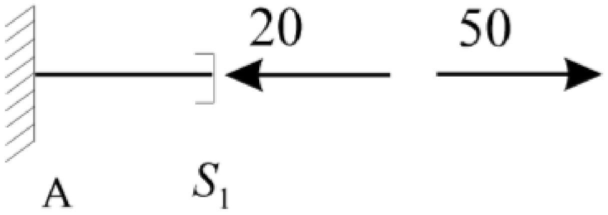
Exemplo 3: Duas forças horizontais



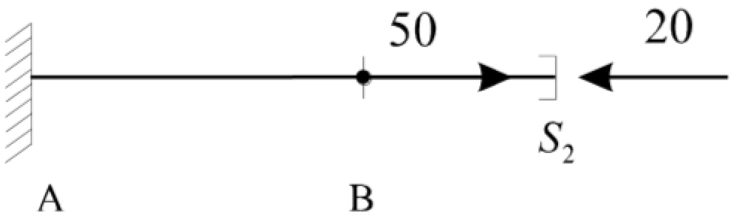
Note que entre AB e BC há uma força horizontal concentrada.

Dividir corte em 2 trechos (S_1 e S_2):

Trecho S_1:



Trecho S_2 :



Exemplo 3: Duas forças horizontais

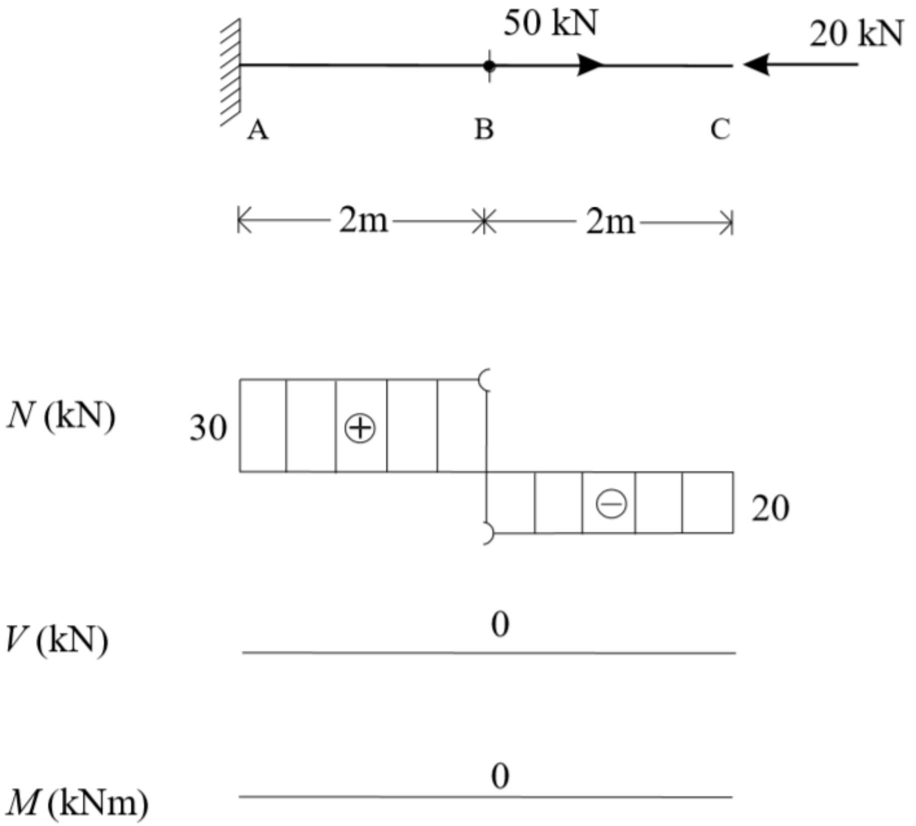
Por equilíbrio estático no corpo cortado:

- trecho AB: $0 \leq x < 2\text{m}$

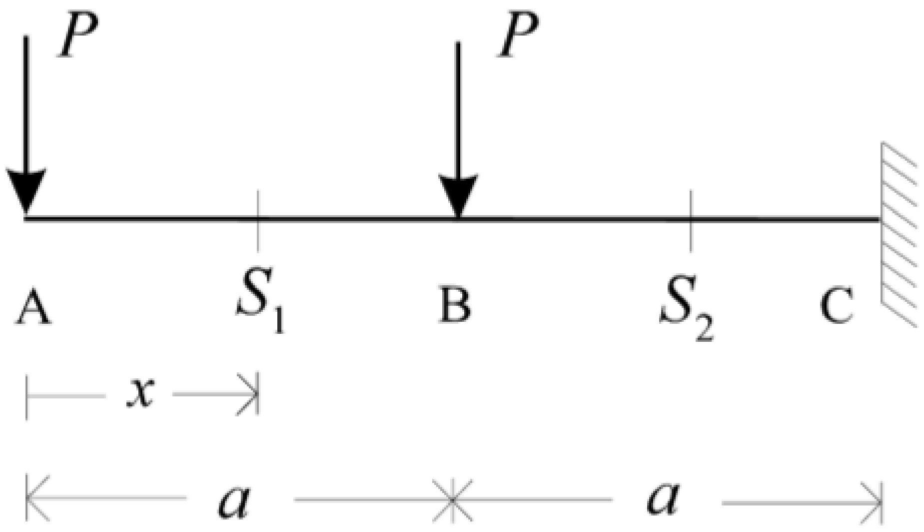
$$N(x) = -20 + 50 = 30$$
$$V(x) = 0$$
$$M(x) = 0$$

- trecho BC: $2\text{m} < x \leq 4\text{m}$

$$N(x) = -20$$
$$V(x) = 0$$
$$M(x) = 0$$



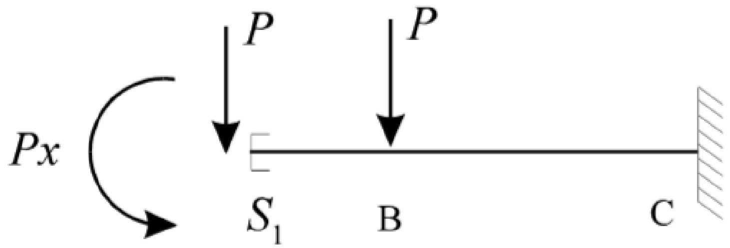
Exemplo 4: Duas forças verticais



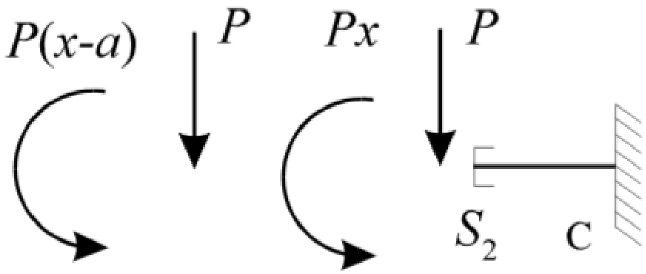
Note que entre AB e BC há uma força vertical concentrada.

Dividir corte em 2 trechos (S_1 e S_2):

Trecho S_1:



Trecho S_2 :



Exemplo 4: Duas forças verticais

Por equilíbrio estático no corpo cortado:

• trecho AB $0 \leq x < a$

$$N(x) = 0$$

$$V(x) = -P$$

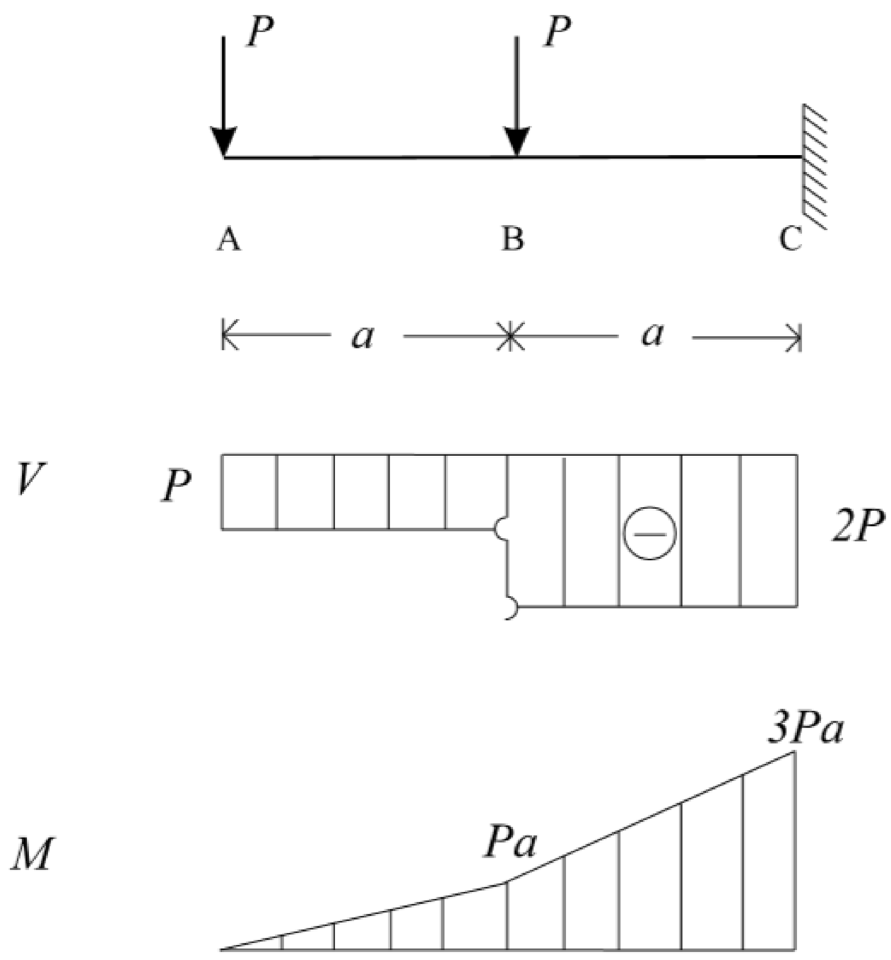
$$M(x) = -Px$$

• trecho BC $a < x \leq 2a$

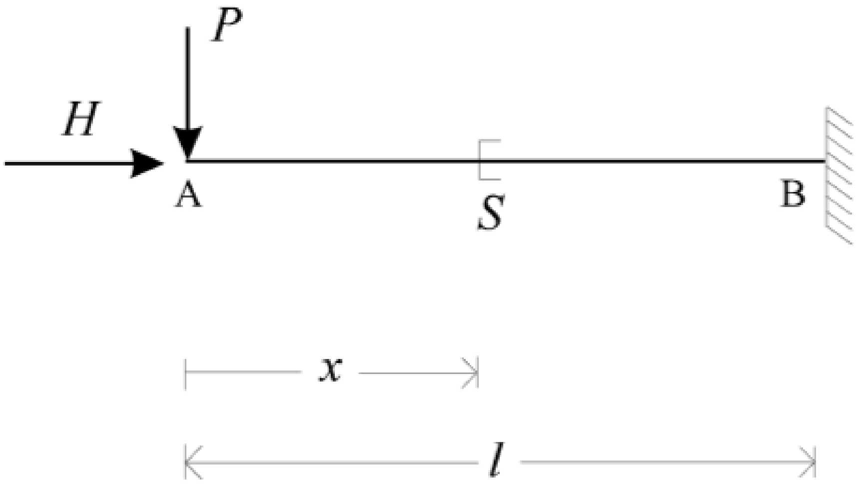
$$N(x) = 0$$

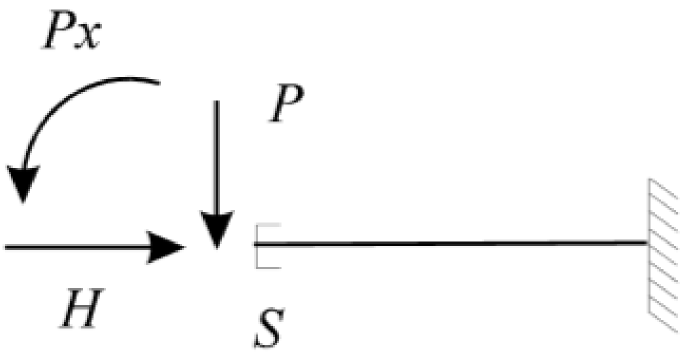
$$V(x) = -2P$$

$$M(x) = -Px - P(x-a)$$



Exemplo 5: Força horizontal e vertical



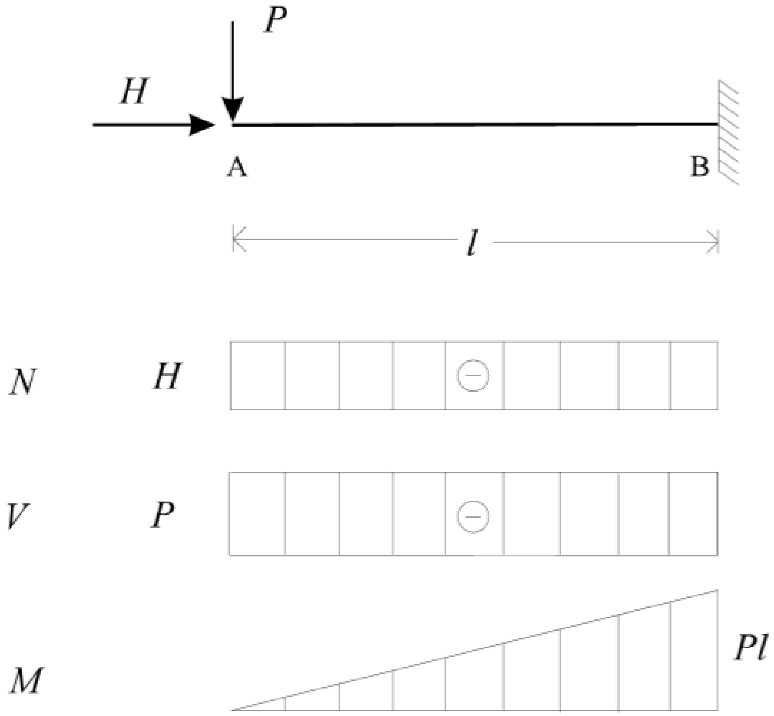


Por equilíbrio estático no corpo cortado:

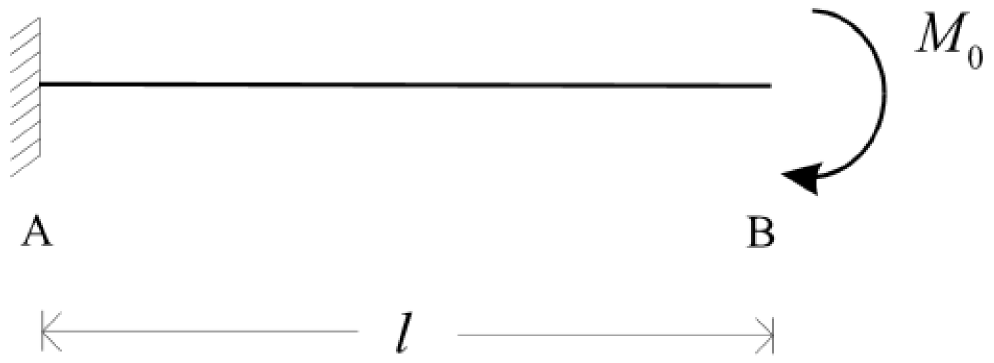
$$N(x) = -H$$

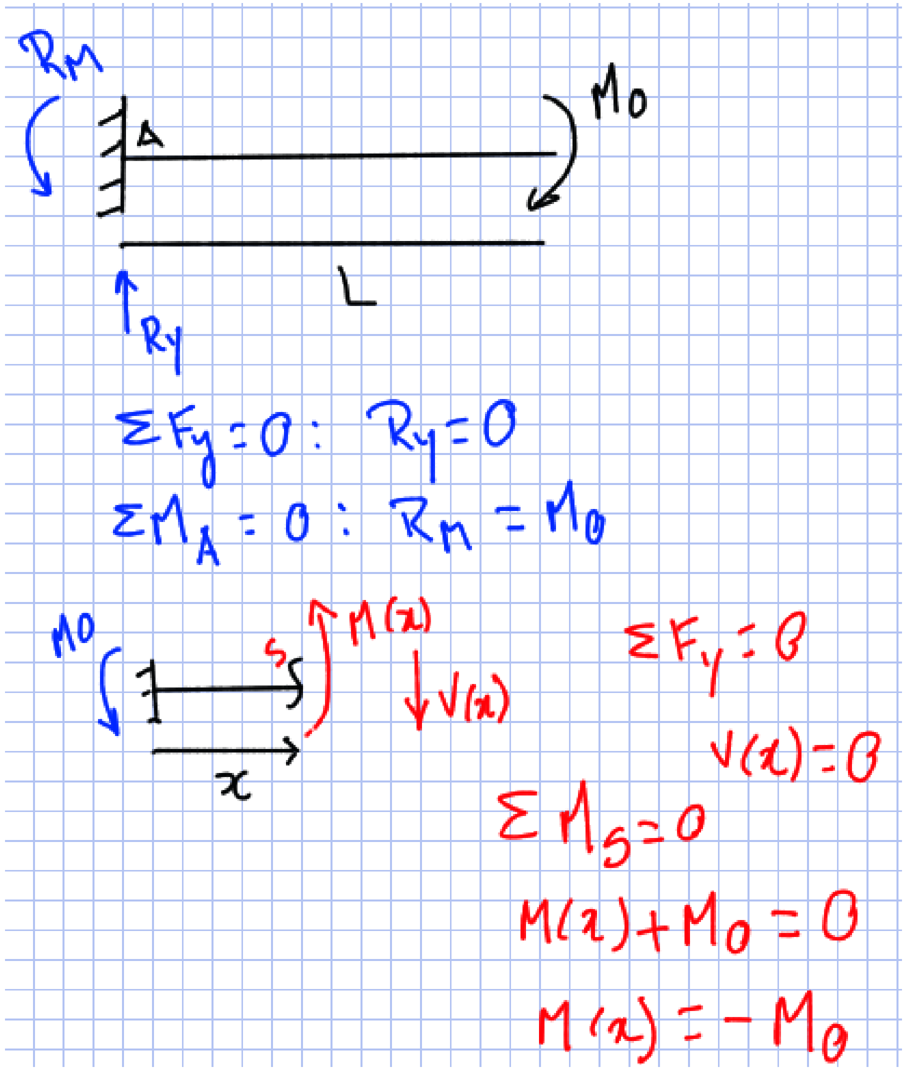
$$V(x) = -P$$

$$M(x) = -Px$$



Exemplo 6: Momento concentrado





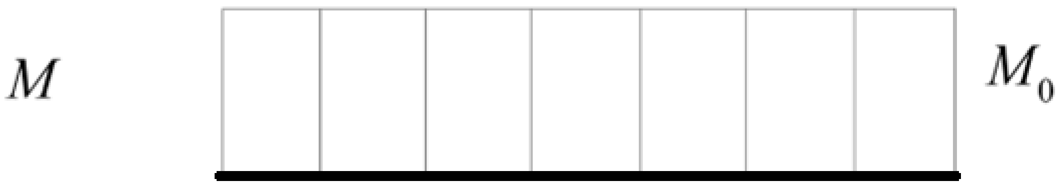
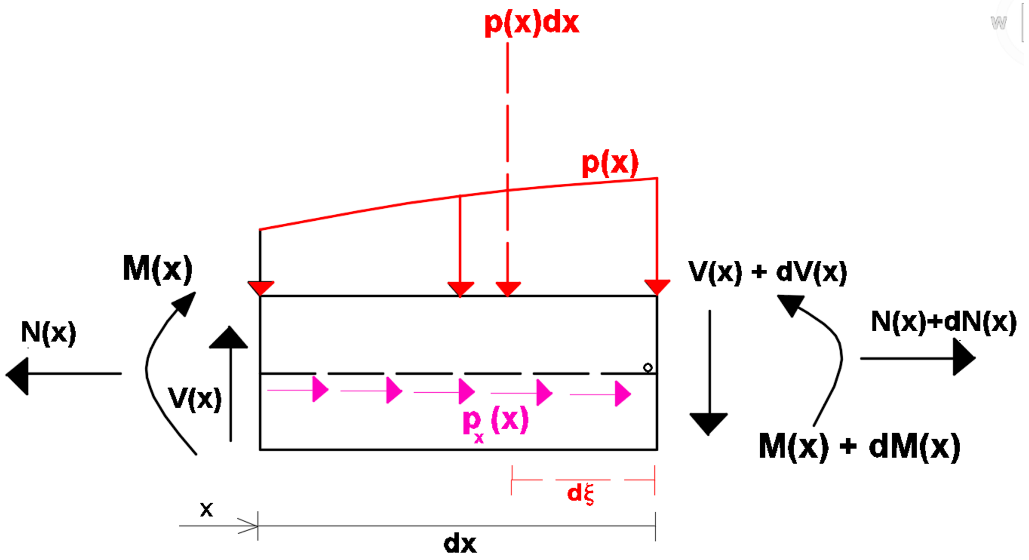


Diagrama de momento fletor: desenha acima do eixo da viga, lado que traciona

Equação Diferencial de Equilíbrio



$$\sum F_y = 0$$

$$V - p(x) \cdot dx - (V + dV) = 0$$

$$\frac{dV(x)}{dx} = -p(x)$$

$$\sum F_x = 0$$

$$dN(x) + p_x(x) dx = 0$$

$$\frac{dN(x)}{dx} = -p_x(x)$$

$$\sum M_o = 0$$

$$(M + dM) + [p(x) \cdot dx] \cdot d\xi - M - V \cdot dx = 0$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x)$$

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = -p(x)$$

Equação Diferencial de Equilíbrio

$$\frac{dV(x)}{dx} = -p(x) \qquad \frac{d^2M(x)}{dx^2} = -p(x) \qquad \frac{dM(x)}{dx} = V(x)$$

a) Caso $p(x) = 0$

Sem carga distribuída no trecho $x_1 < x < x_2$

$V(x) = C_1 = cte \rightarrow$ Função (diagrama) de esforço cortante constante

$M(x) = C_1 \cdot x + C_2 \rightarrow$ Função (diagrama) de momento fletor linear

b) Caso $p(x) = p = cte$

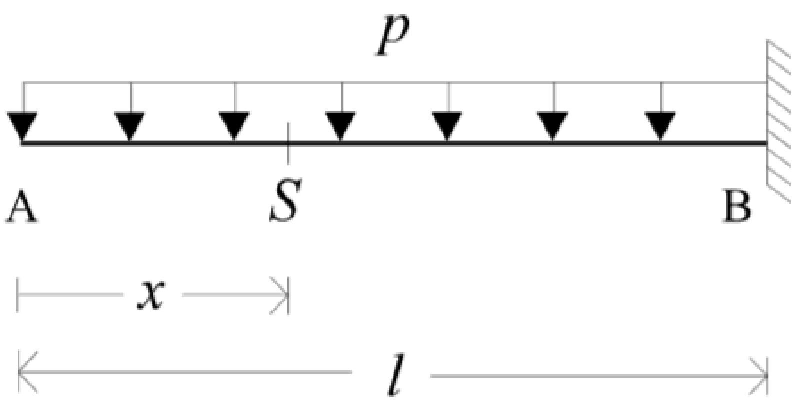
Carga distribuída uniforme no trecho $x_1 < x < x_2$

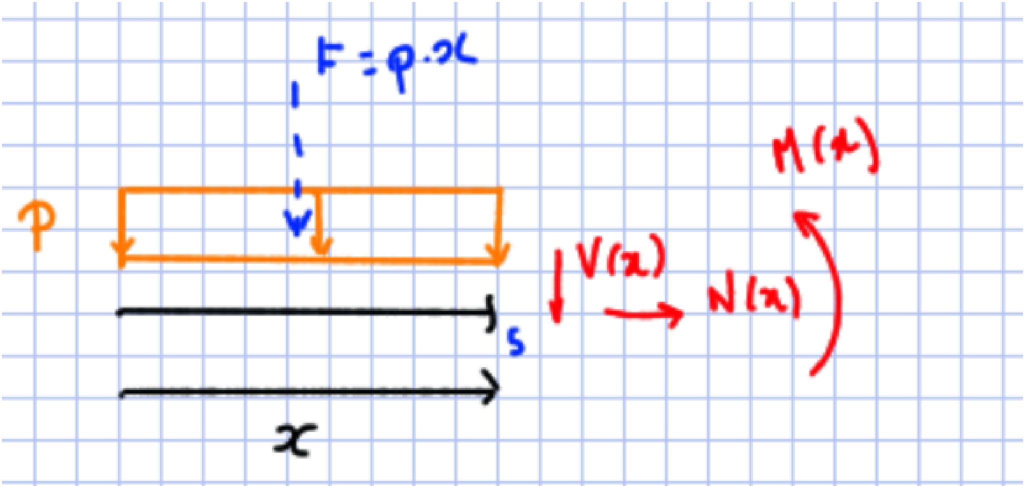
$V(x) = -\,p\,x + C_1 \rightarrow$ Função (diagrama) de esforço cortante linear

$M(x) = -\,p\,\frac{x^2}{2} + C_1 \cdot x + C_2 \rightarrow$ Função (diagrama) de momento fletor é parábola

c) Generalização para $\forall$ p(x) é imediata

Exemplo 7: Carregamento distribuído constantemente





$$\Sigma F_x = 0: \quad N(x) = 0$$

$$\Sigma F_y = 0: \quad V(x) = -p.x$$

$$\Sigma M_S = 0: \quad M(x) + (p.x)\,x/2 = 0$$

$$0 < x < l$$

Exemplo 7: Carregamento distribuído constantemente

Substituindo valores dos extremos do trecho:

- $V(x) = -px$

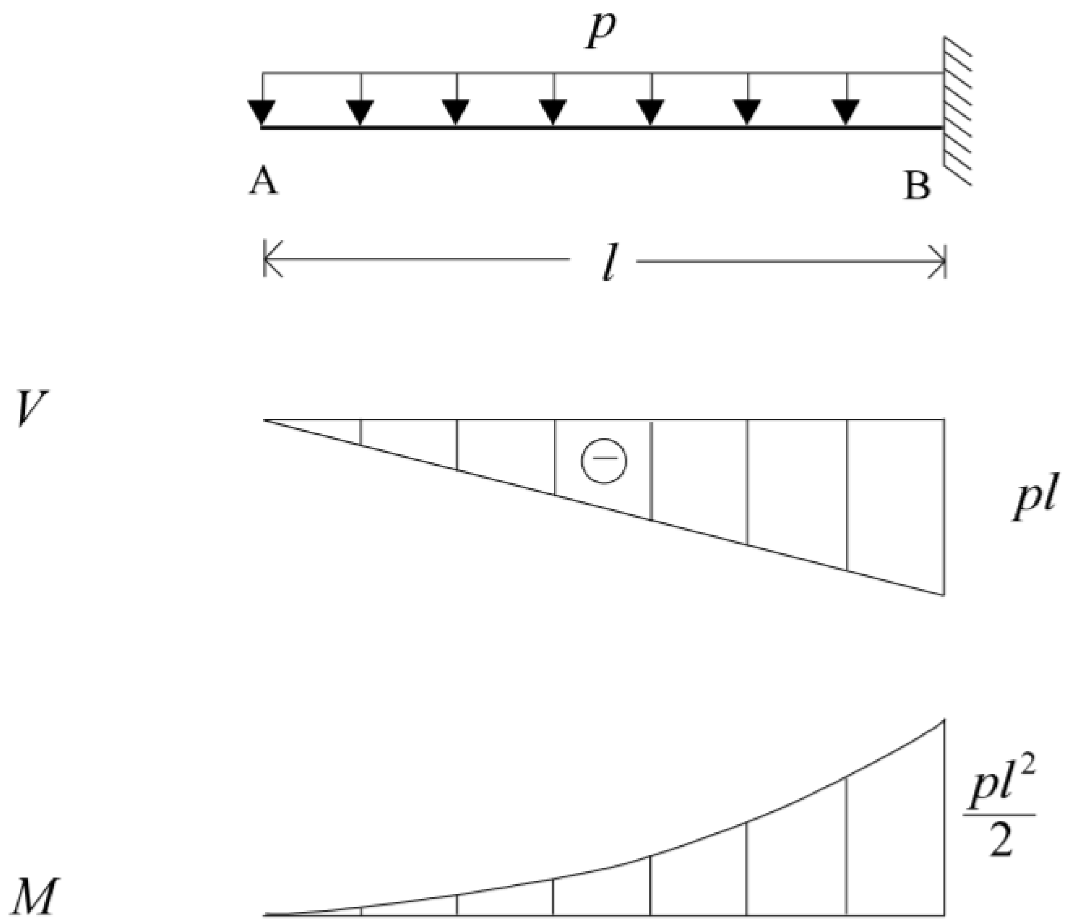
  $V(0) = 0$
  $V(l) = -pl$

- $M(x) = -\frac{px^2}{2}$

  $M(0) = 0$

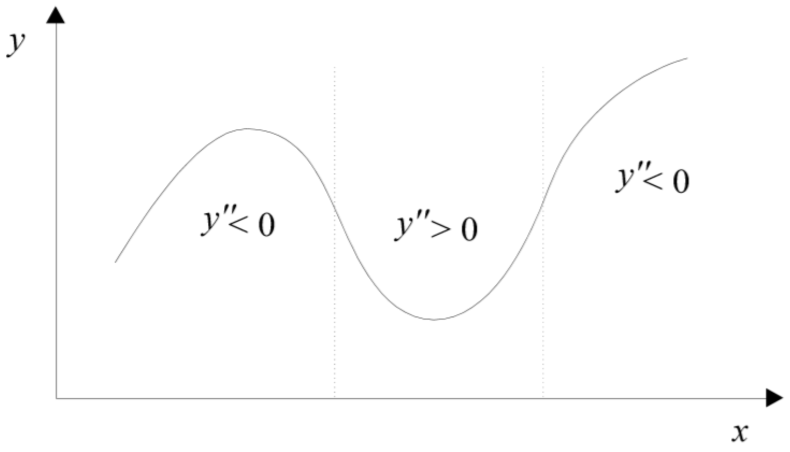
  $M(l) = -\frac{pl^2}{2}$

Diagramas:

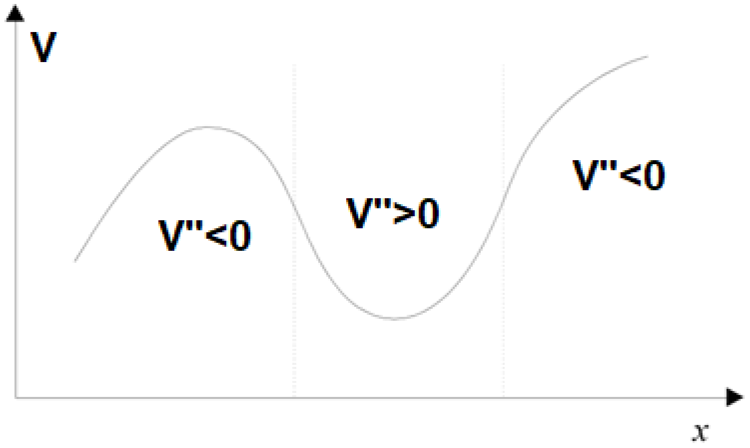


Estudo da concavidade de funções

Lembrar do cálculo:

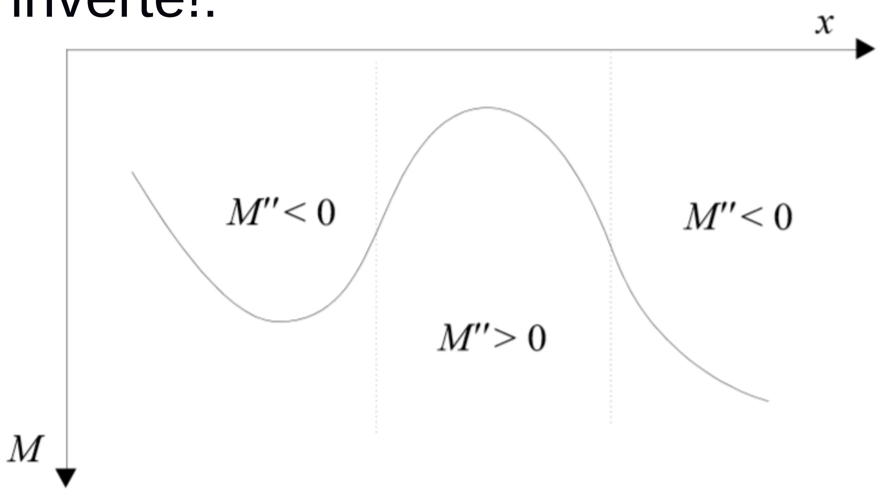


Para o cortante: imediato

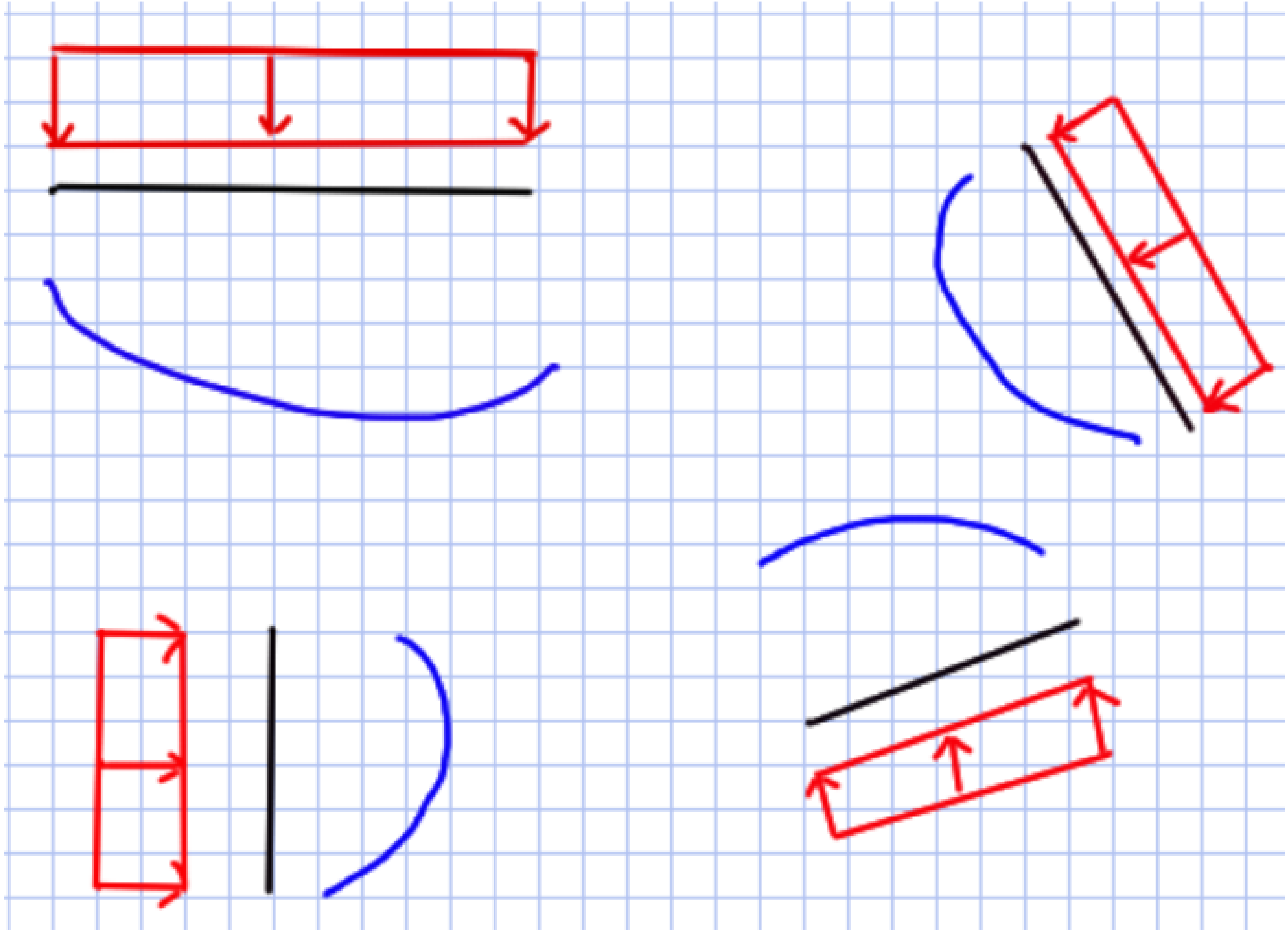


Para o momento, inverte!:

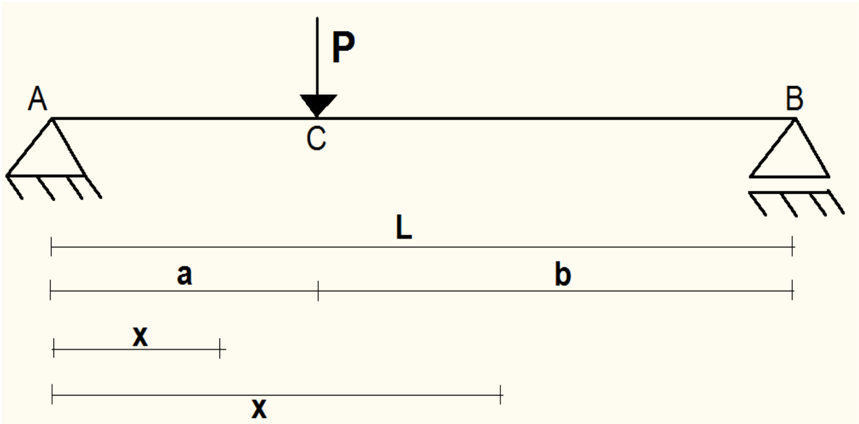
$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = -p(x)$$



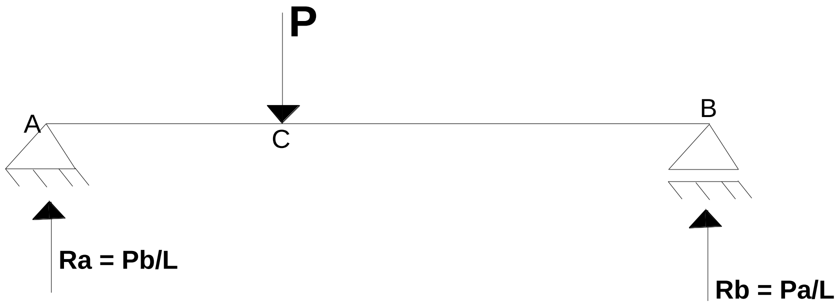
Estudo da concavidade de funções



Exemplo 8: Viga bi-apoiada



1. Obter reações:



2. Esforços em cada trecho:

Determinação das equações nos cortes de cada trecho:

Trecho 1: $0 < x < a$

$$\sum F_y = 0$$

$$R_a - V(x) = 0 \rightarrow V(x) = R_a$$

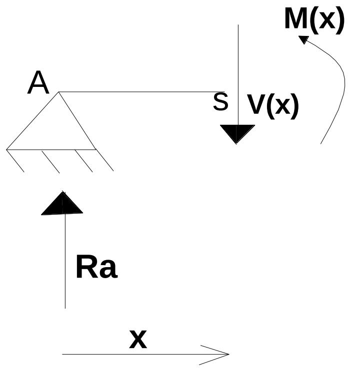
$V(x) = P \cdot b / L$ (constante)

$$\sum M_s = 0$$

$$M(x) - R_a \cdot x = 0 \rightarrow M(x) = R_a \cdot x$$

$M(x) = P \cdot b \cdot x / L$ (reta)

Para x = a : $M(a) = P \cdot b \cdot a / L$



Exemplo 8: Viga bi-apoiada

Trecho 2: $a < x < L$

$\sum F_y = 0$

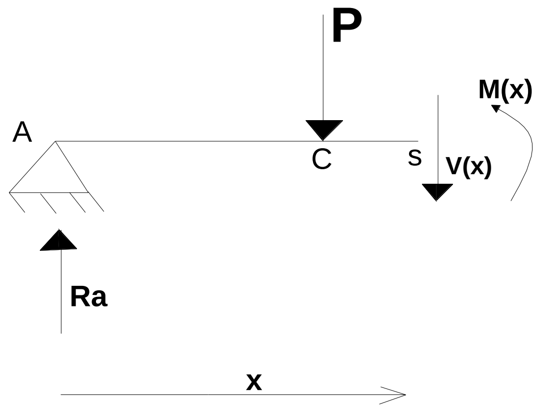
$R_a - P - V(x) = 0 \rightarrow V(x) = R_a - P = P \cdot b / L - P = P(b / L - 1) = -P \cdot a / L$

$V(x) = -P \cdot a / L$ (constante)

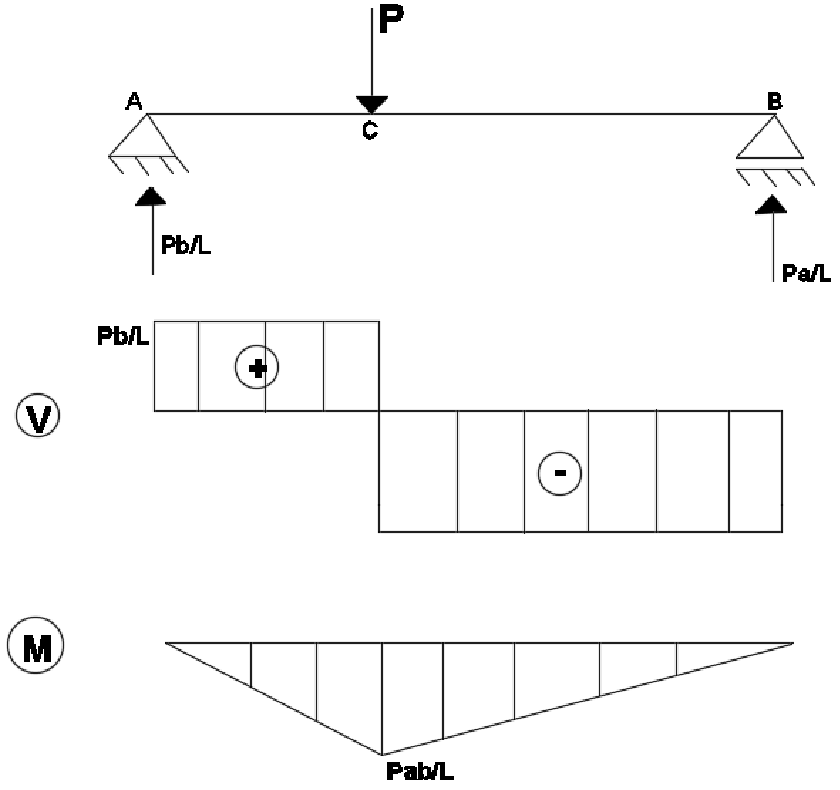
$\sum M_s = 0$

$M(x) + P \cdot (x - a) - R_a \cdot x = 0 \rightarrow M(x) = P \cdot b \cdot x / L - P(x - a)$

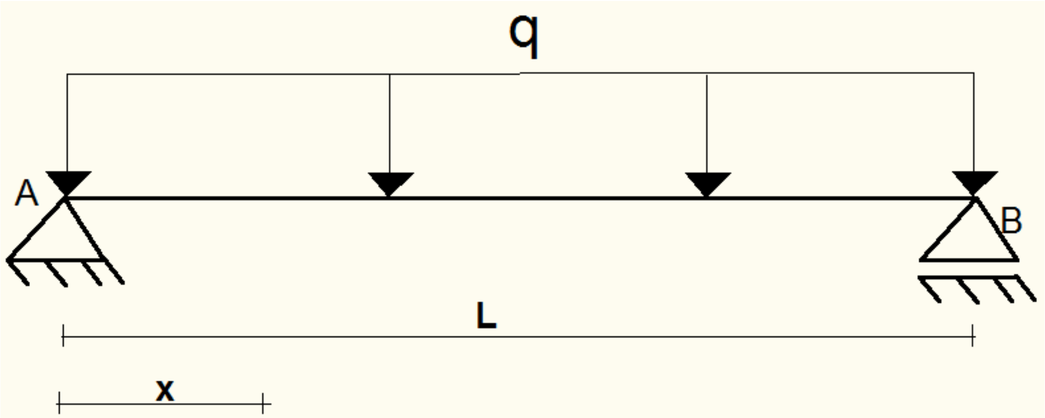
$M(x) = P \cdot a - (P \cdot a / L) \cdot x$ (reta)



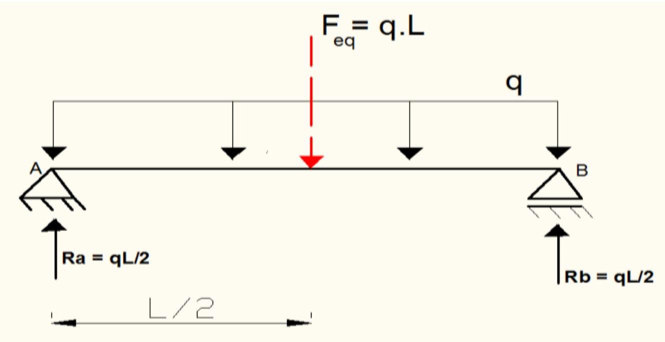
3. Diagramas:

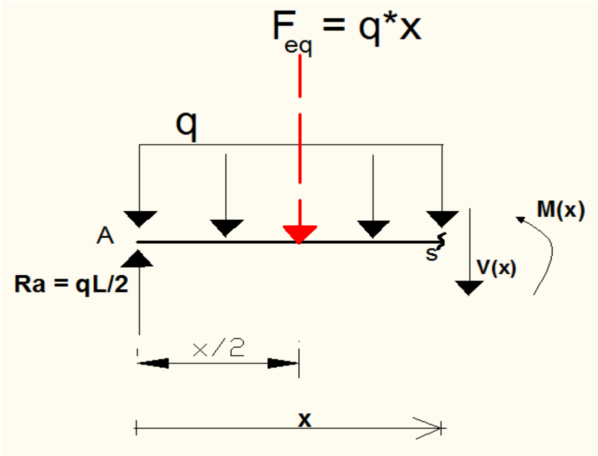


Exemplo 9: Viga bi-apoiada p(x) = q



1. Obter reações:





Determinação das equações nos cortes de cada trecho:

Trecho único: $0 < x < L$

$$\sum F_y = 0 \;\rightarrow\; R_a - q \cdot x - V(x) = 0 \rightarrow V(x) = R_a - q \cdot x$$

$V(x) = q \cdot L/2 - q \cdot x$ (linear)

$$\sum M_s = 0 \;\rightarrow\; M(x) + (q \cdot x) \cdot x/2 - R_a \cdot x = 0 \rightarrow M(x) = R_a \cdot x - q \cdot x^2/2$$

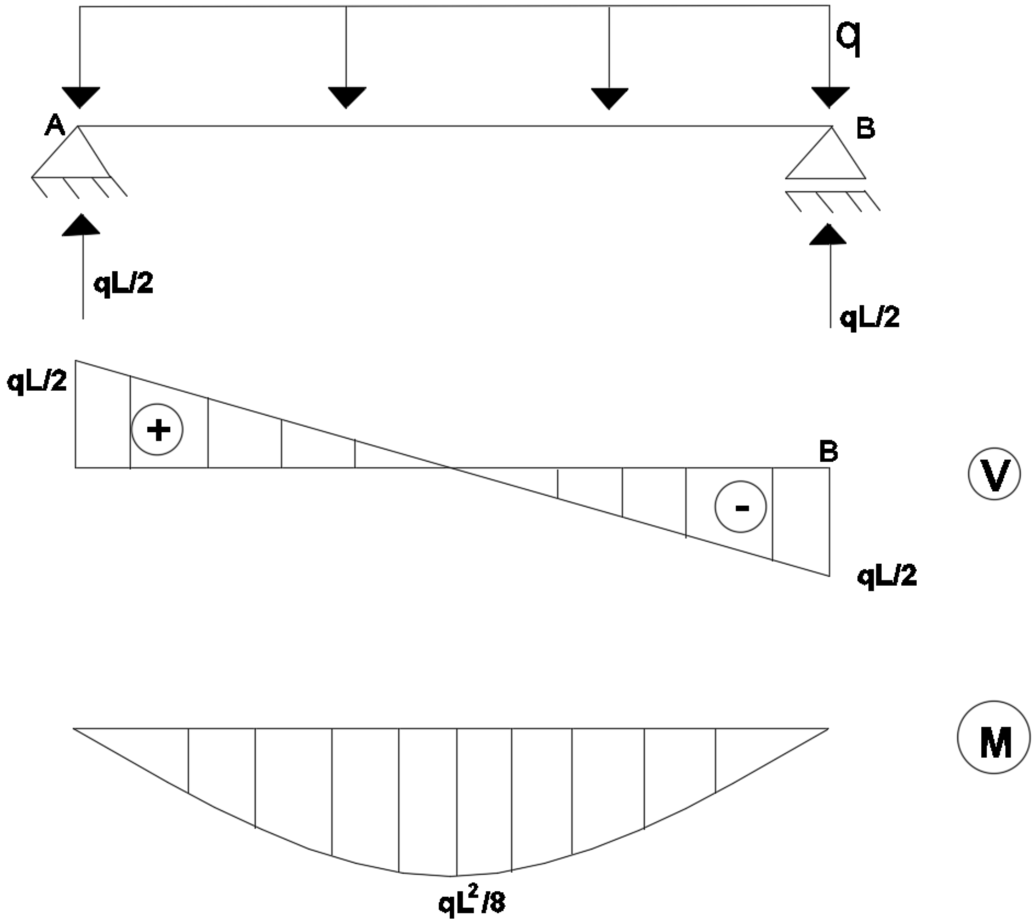
$M(x) = (q \cdot L/2) \cdot x - q \cdot x^2/2$ (parábola)

Exemplo 9: Viga bi-apoiada p(x) = q

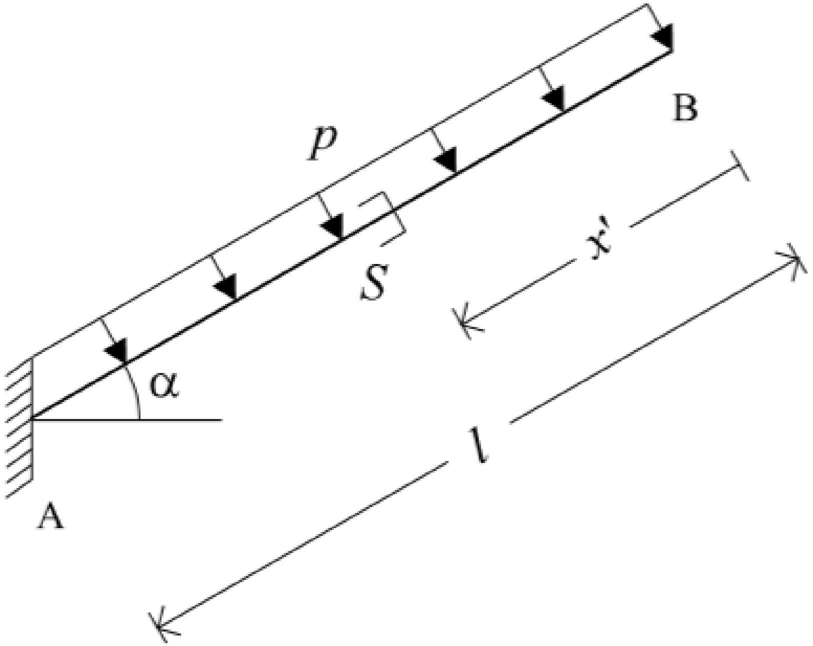
3. Diagramas:

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x) = 0 \rightarrow q \cdot L/2 - q \cdot x = 0 \rightarrow x = \frac{L}{2}$$

$$M(L/2) = (q \cdot L/2) \cdot L/2 - q \cdot (L/2)^2/2 = \frac{q \cdot L^2}{8}$$

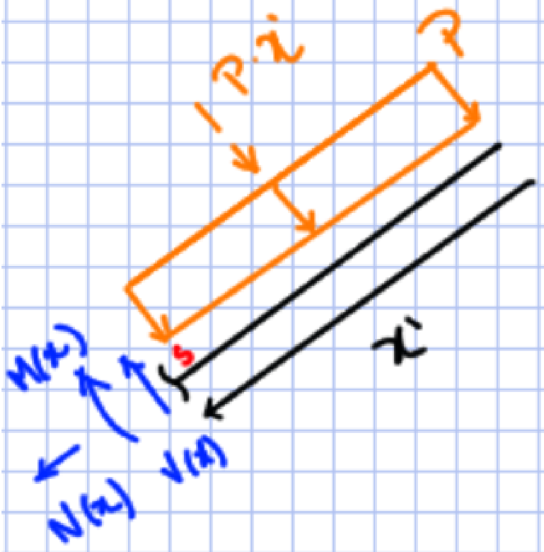


Exemplo 10: Viga em balanço inclinada



$$V(x') = px'$$

$$M(x) = -\frac{px'^2}{2}$$

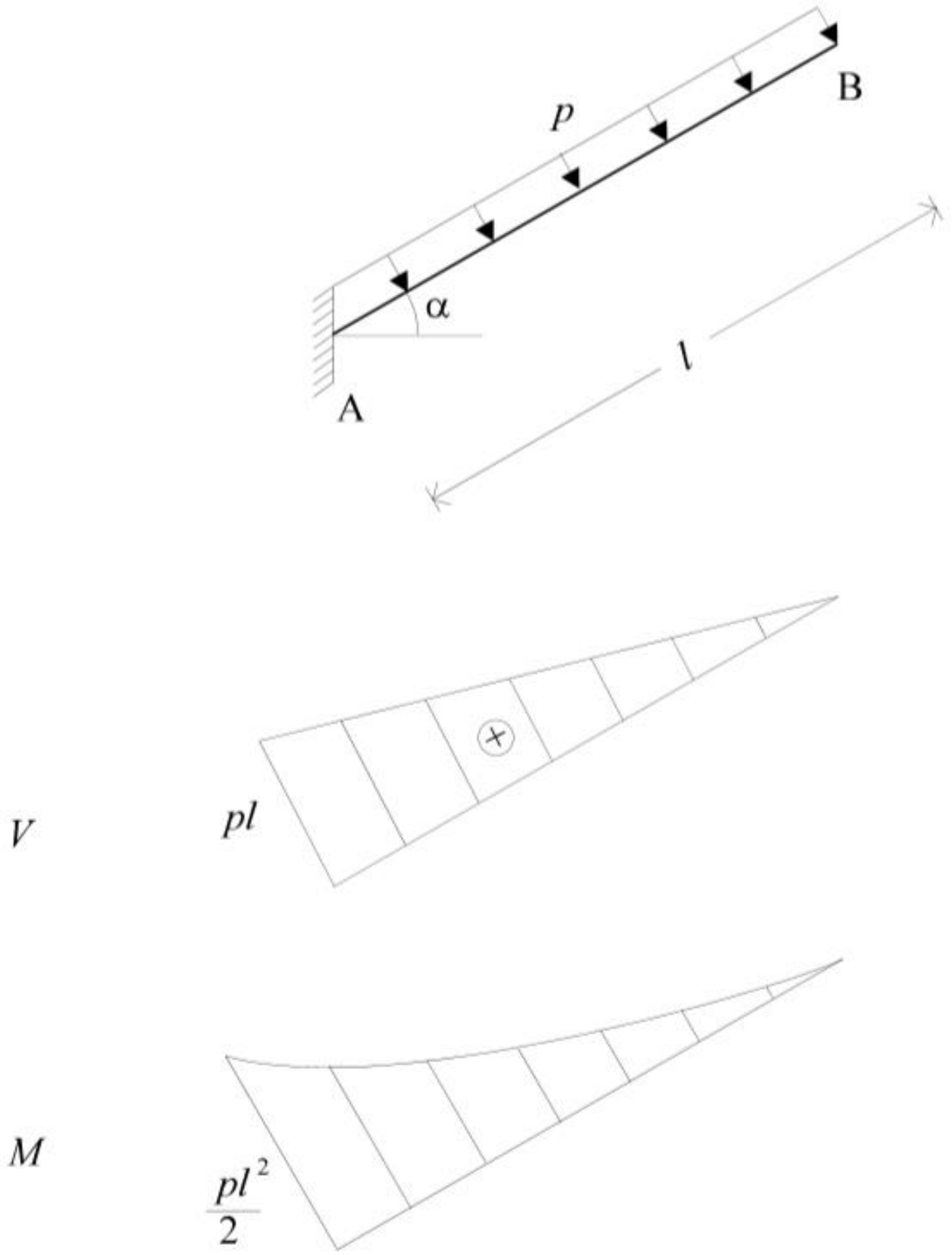


$\Sigma F_{x'} = 0 \; : \; N(x) = 0$

$\Sigma F_{y'} = 0 \; : \; V(x) = p \cdot x'$

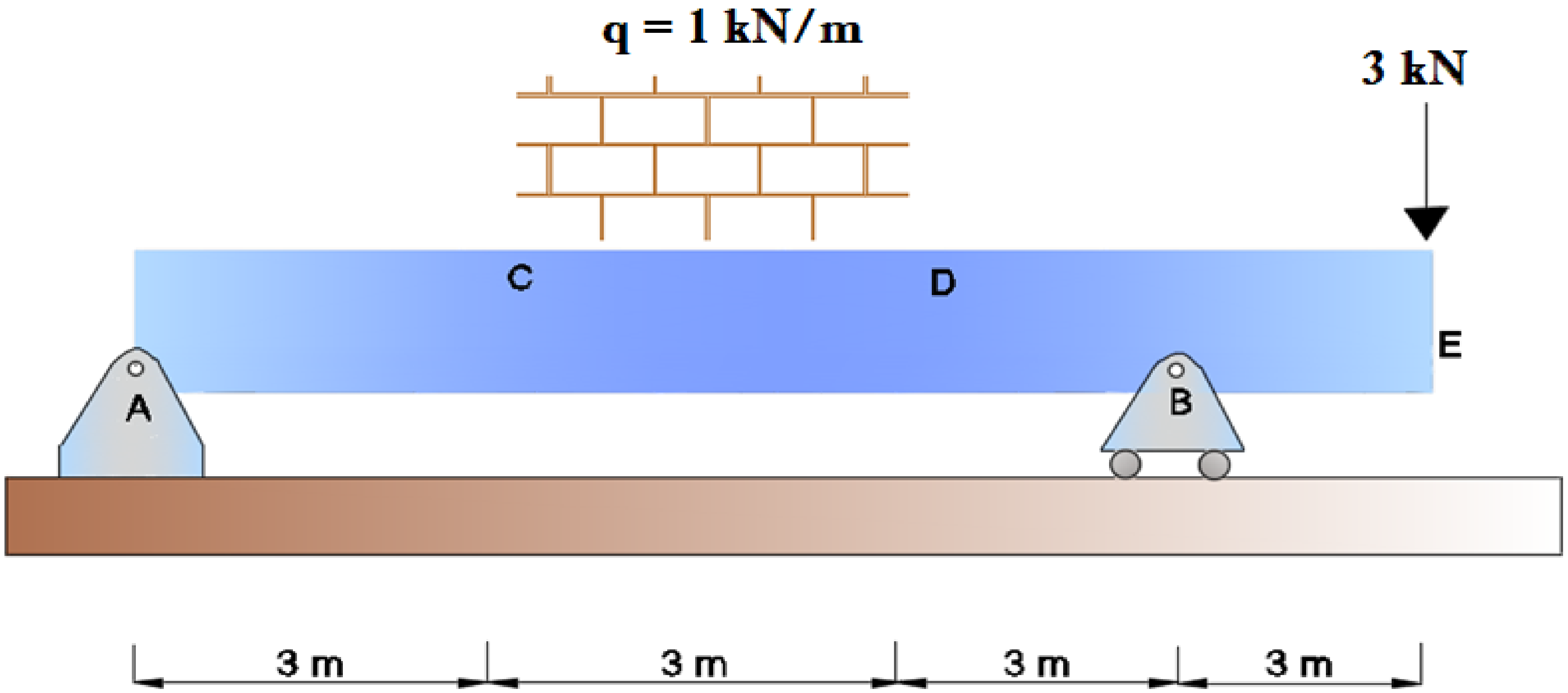
$\Sigma M_S = 0 \; : \; M(x) = (-px') \, x'/2$

Exemplo 10: Viga em balanço inclinada



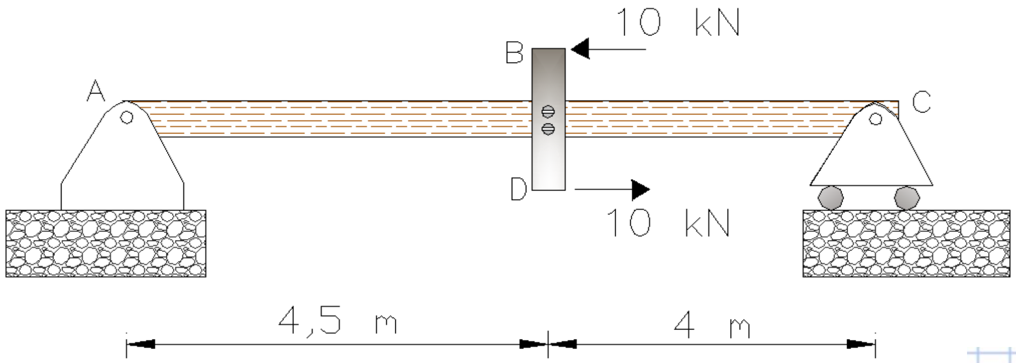
Exercício para casa: Fazer em entregar pelo Moodle até 27/04

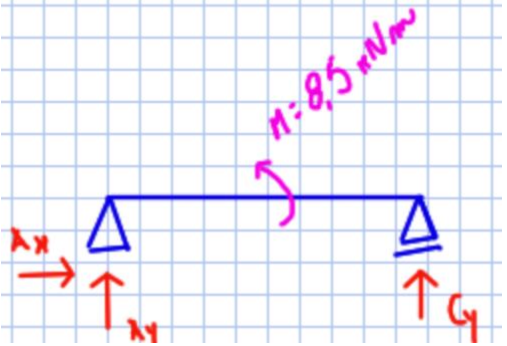
Determinar os diagramas de esforços solicitantes



Exemplo 11: Viga bi-apoiada e momento concentrado*

Determinar os esforços solicitantes (M,V e N) na viga AC, sob a ação do binário indicado, onde a barra rígida BD tem dimensão de 85 cm.





$$\sum F_X = 0: \rightarrow A_x = 0; \sum M_C = 0: \rightarrow 8,5.A_y = 10.0,85 \rightarrow$$

$$A_y = 1 \quad kN \quad (\uparrow); C_y = -1 \quad kN \quad (\downarrow)$$

*Resistência do Materiais: Um guia prático. Valerio Almeida; Marcelo Greco, Daniel Maciel. Elsevier, 2018

Exemplo 11: Viga bi-apoiada e momento concentrado*

Dois trechos para realizar os cortes:

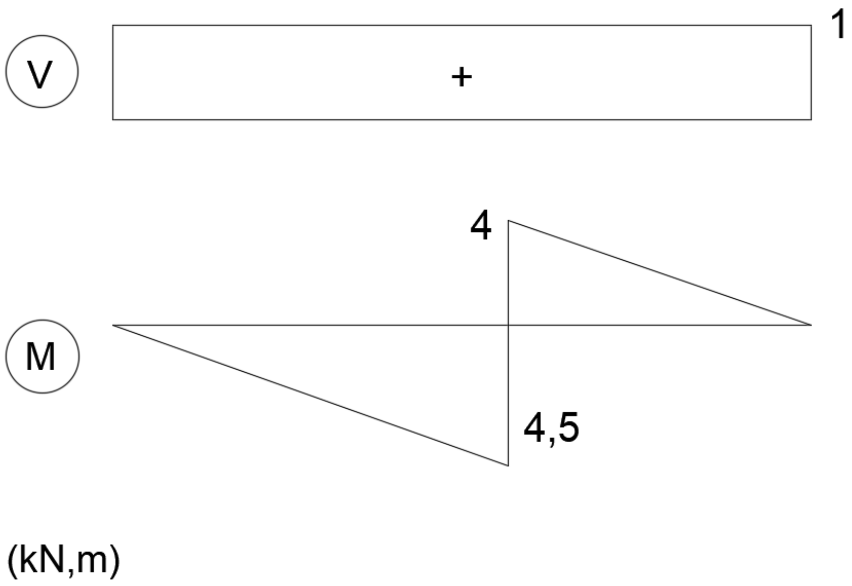
Trecho 1: $0 < x < 4{,}5$

$\sum F_y = 0: \rightarrow V(x) = 1 \rightarrow V(x) = 1; \sum M_S = 0: \rightarrow M(x) = x$

Valores nos extremos do intervalo:

Trecho 2: $4{,}5 < x < 8{,}5$

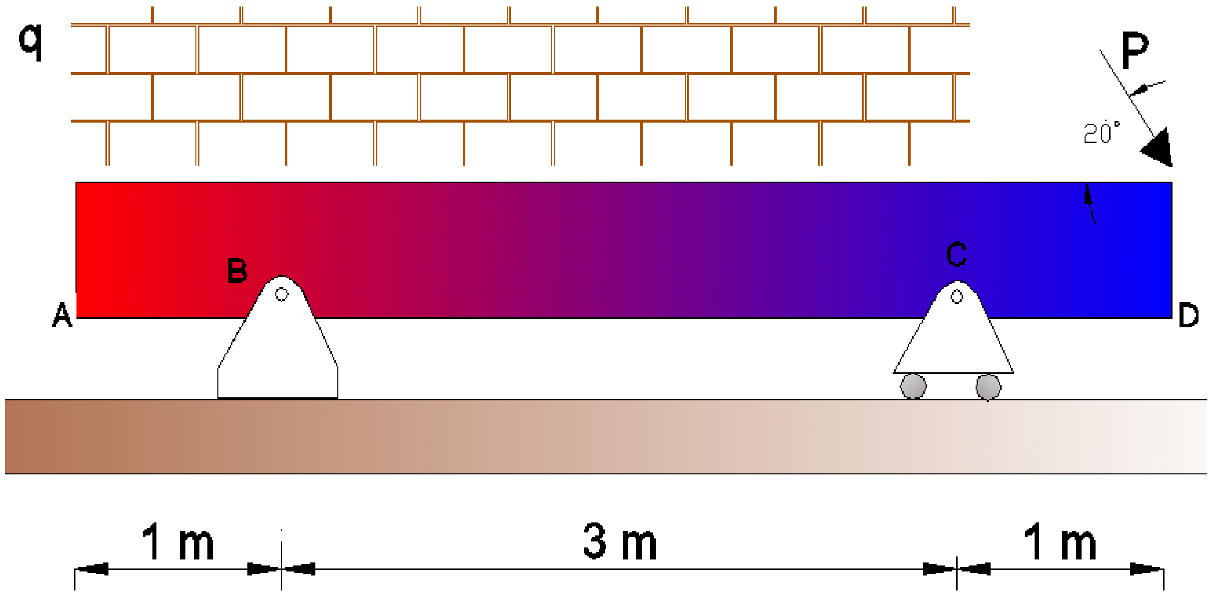
$\sum F_y = 0: \rightarrow V(x) = 1 \rightarrow V(x) = 1; \sum M_S = 0: \rightarrow M(x) = x - 8{,}5$



*Resistência do Materiais: Um guia prático. Valerio Almeida; Marcelo Greco, Daniel Maciel. Elsevier, 2018

Exemplo 12: Viga bi-apoiada e balanço*

Determinar os diagramas de esforços. Dados q = 28 kN/m e P = 5 kN.



Calcular reações:

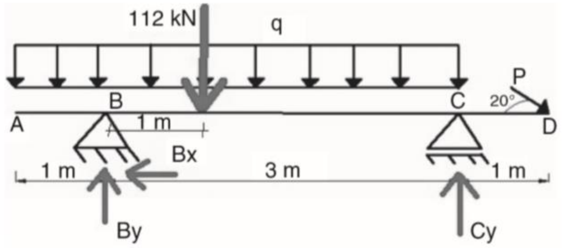
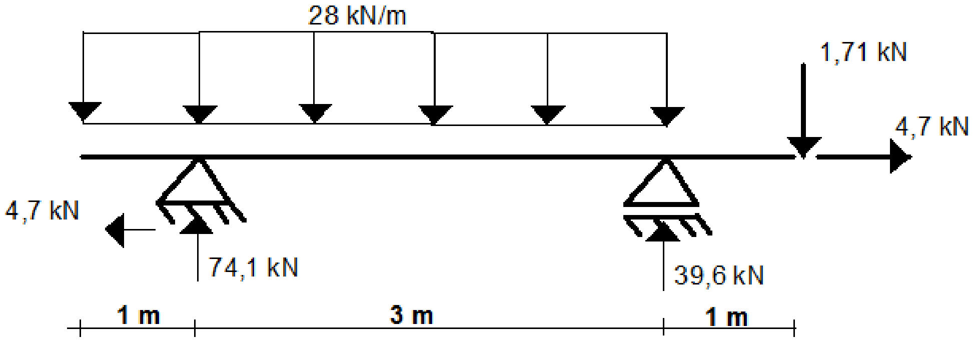


FIGURA 1.56B **Indicação das reações e forças resultantes na viga.**

$$\sum F_X = 0 : \rightarrow B_x - 5 \cdot \cos 20° = 0 \rightarrow B_x = 4{,}7 \ \text{kN} \ (\leftarrow)$$

$$\sum M_B = 0 : \rightarrow 3 \cdot C_y = 112 \cdot 1 + 1{,}71 \cdot 4 \rightarrow C_y = 39{,}6 \ \text{kN} \ (\uparrow)$$

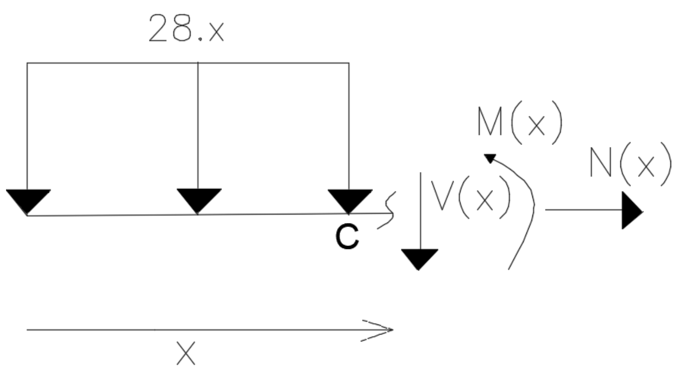
$$\sum F_y = 0 : \rightarrow B_y = 112 + 1{,}71 \quad 39{,}6 = 74{,}1 \ \text{kN} \ (\uparrow)$$



*Resistência do Materiais: Um guia prático. Valerio Almeida; Marcelo Greco, Daniel Maciel. Elsevier, 2018

Exemplo 12: Viga bi-apoiada e balanço

Trecho 1: 0 < x < 1



$$\sum F_x = 0 : \rightarrow N(x) = 0 \rightarrow N(x) = 0$$

$$\sum F_y = 0 : \rightarrow V(x) + 28x = 0 \rightarrow V(x) = -28 \cdot x$$

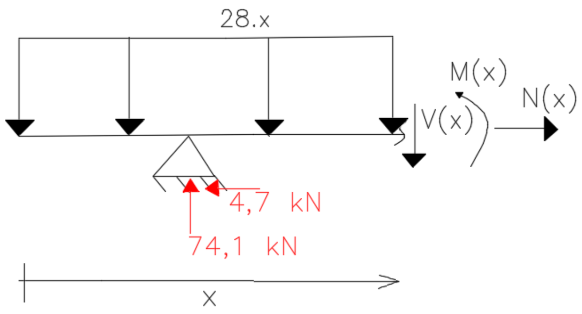
$$\sum M_S = 0 : \rightarrow M(x) + 28x \cdot \frac{x}{2} = 0 \rightarrow M(x) = -14 \cdot x^2$$

Valores nos extremos do intervalo: $N(0) = N(1) = 0$; $V(0) = 0$; $V(1) = -28$

$M(0) = 0$; $M(1) = -14$

Não tem derivada nula nesse intervalo para construir M(x)

Trecho 2: 1 < x < 4



$$\sum F_x = 0 : \rightarrow N(x) - 4{,}7 = 0 \rightarrow N(x) = 4{,}7$$

$$\sum F_y = 0 : \rightarrow V(x) + 28 \cdot x - 74{,}1 = 0 \rightarrow V(x) = -28 \cdot x + 74{,}1$$

$$\sum M_S = 0 : \rightarrow M(x) + 28 \cdot x \cdot \frac{x}{2} - 74{,}1 \cdot (x-1) = 0 \rightarrow M(x) = -14 \cdot x^2 + 74{,}1 \cdot x - 74{,}1$$

Valores nos extremos do intervalo: $N(1) = N(4) = 4{,}7$; $V(1) = 46{,}1$; $V(4) = -37{,}9$

$M(1) = -14$; $M(4) = -1{,}7$

Obter ponto de extremo de M, fazendo: $V(x) = -28x + 74{,}1 = 0 \rightarrow x = 2{,}65$ m

$$M(x = 2{,}65) = -14 \cdot (2{,}65^2) + 74{,}1 \cdot (2{,}65) - 74{,}1 = 23{,}9$$

Exemplo 12: Viga bi-apoiada e balanço

Trecho 3: $4 < x < 5$

$$\sum F_x = 0 : \rightarrow N(x) - 4{,}7 = 0 \rightarrow N(x) = 4{,}7$$

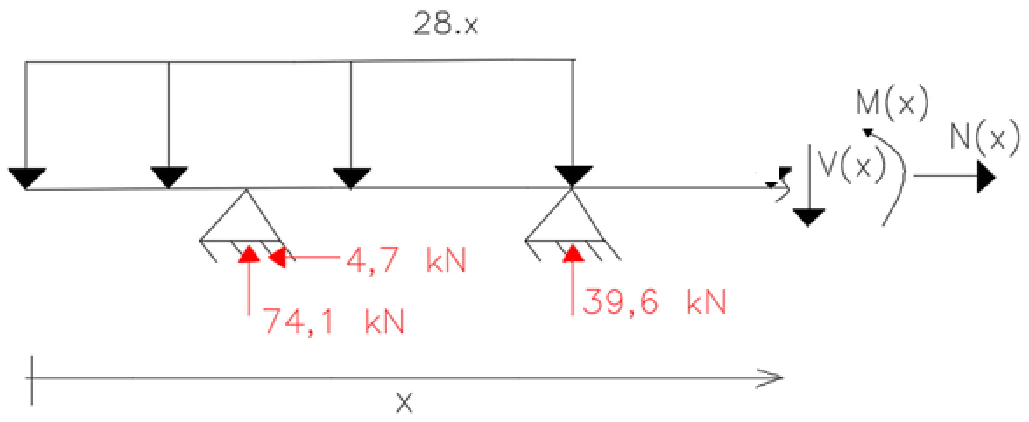
$$\sum F_y = 0 : \rightarrow V(x) + 112 - 74{,}1 - 39{,}6 = 0 \rightarrow V(x) = 1{,}71$$

$$\sum M_S = 0 : \rightarrow M(x) + 112 \cdot (x-2) - 74{,}1 \cdot (x-1) - 39{,}6 \cdot (x-4) = 0 \rightarrow$$

$$M(x) = 1{,}71x - 8{,}55$$

Valores nos extremos do intervalo: $N(4) = N(5) = 4{,}7;\ V(4) = V(5) = 1{,}71$

$M(4) = -1{,}71;\ \ M(5) = 0$



Exemplo 12: Viga bi-apoiada e balanço