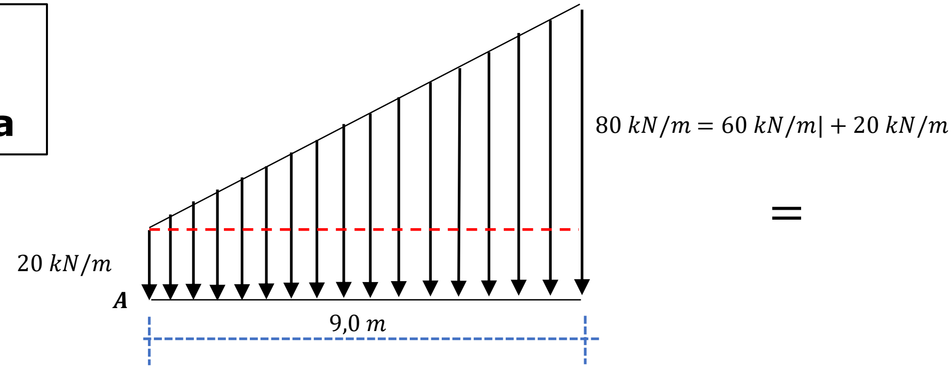
PEF3200 INTRODUÇÃO À MECÂNICA DAS ESTRUTURAS

AULA 3

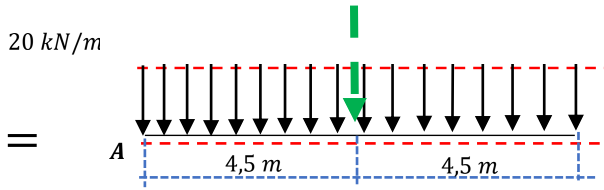
Osvaldo Nakao

EXTRA: Determinar a força mecanicamente equivalente ao carregamento distribuído da figura



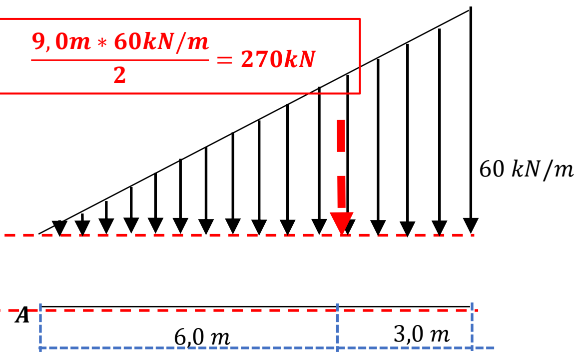
=

$$9,0m * \frac{20kN}{m} = 180kN$$

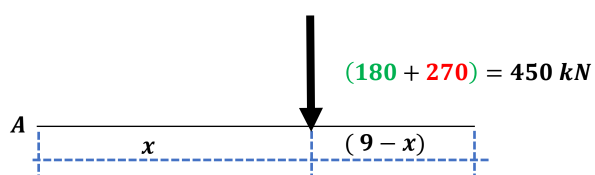


+

$$\frac{9,0m * 60kN/m}{2} = 270kN$$



=

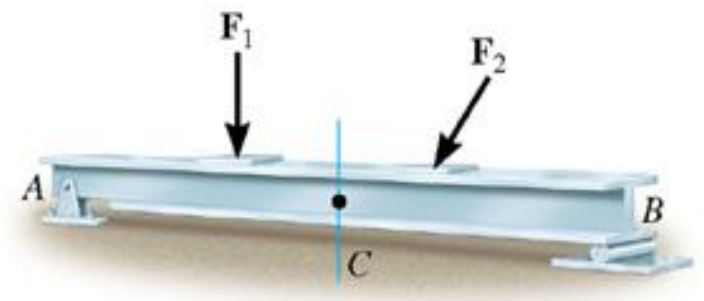


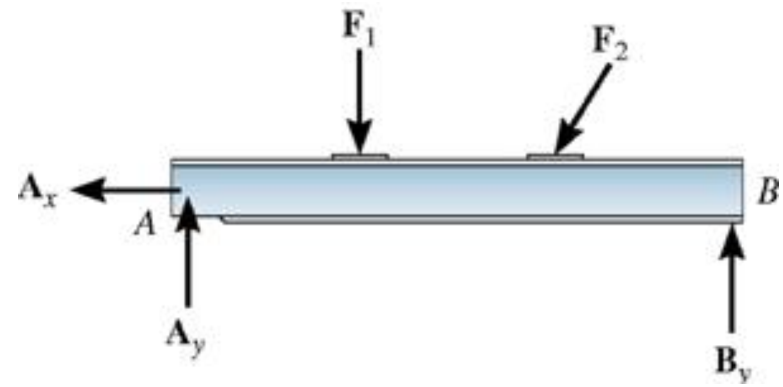
$$M_A = (-180 * 4,5) + (-270 * 6,0) = -(450 * x) \Longrightarrow x = 5,4m$$

RESP: A força mecanicamente equivalente ao carregamento distribuído da figura é 450 kN aplicado a 5,4 m de A

EQUILÍBRIO:

UM SISTEMA DE PONTOS MATERIAIS ESTÁ EM EQUILÍBRIO SE ELE ESTIVER EM REPOUSO EM RELAÇÃO A UM REFERENCIAL, SE AS POSIÇÕES DE TODOS OS SEUS PONTOS NÃO VARIAREM COM O TEMPO.





EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Para um corpo em repouso em relação a um sistema inercial, as leis de Euler[3] fornecem:

$$\sum_{i=1}^{n_F} \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0}, \qquad \sum_{j=1}^{n_M} \boldsymbol{M}_{\mathrm{O}\,j} = \boldsymbol{0}, \tag{2.1}$$

correspondendo ao equilíbrio de n_F forças $\boldsymbol{F}_i$ e n_M momentos $\boldsymbol{M}_j$ em relação a um polo arbitrário O. Reescrevendo a equação acima empregando as componentes de força e momento em relação a três eixos ortogonais x, y e z passando por O, obtemos

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0, & \sum M_{\mathrm{O}x} &= 0, \\ \sum F_y &= 0, & \sum M_{\mathrm{O}y} &= 0, \\ \sum F_z &= 0, & \sum M_{\mathrm{O}z} &= 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

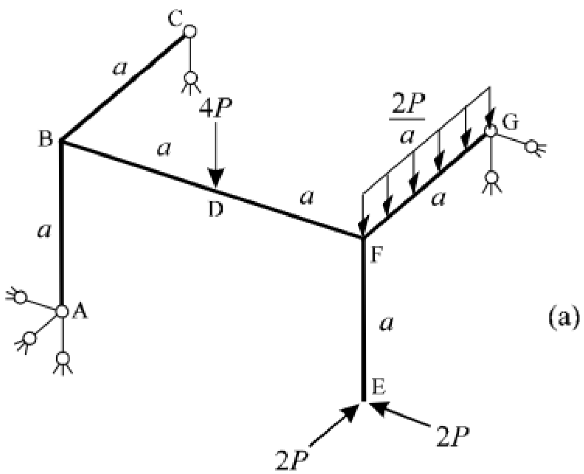
onde os índices foram omitidos. Para um sistema de forças coplanares em que as forças e momentos atuam no plano definido pelos eixos x e y, restam apenas três equações não-identicamente nulas:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0, \\ \sum F_y &= 0, \end{aligned} \qquad \sum M_{\mathrm{O}z} = 0. \tag{2.3}$$

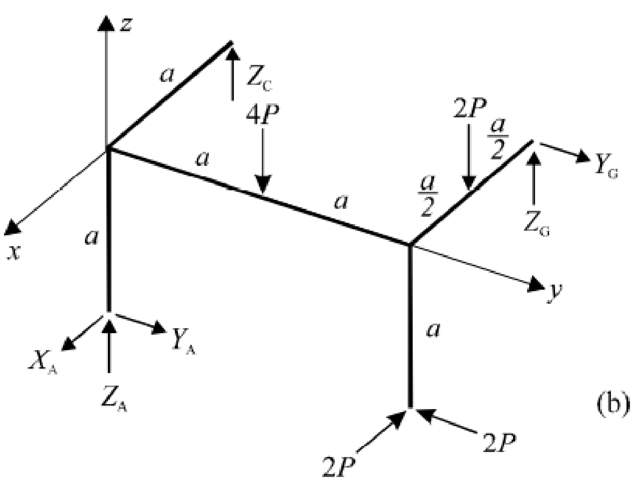
Fonte: Almeida Neto, E. S. Conceitos fundamentais de Resistência dos materiais, apostila Epusp, São Paulo, 2011

Exercício 10 (aula 2)

Determinar as reações de apoio da estrutura



(a)

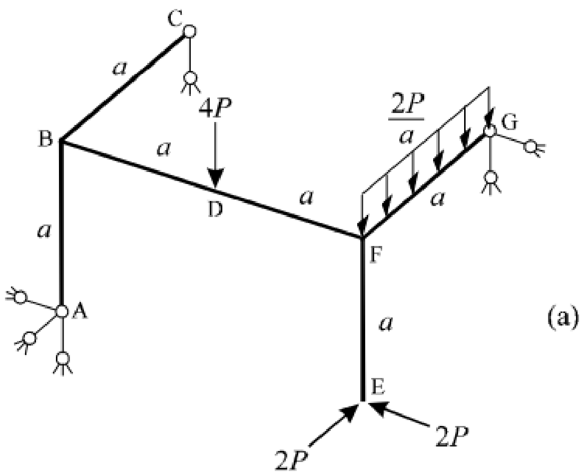


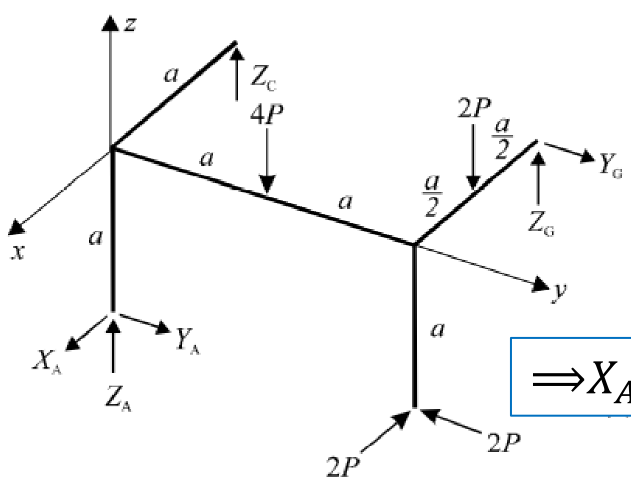
(b)

Fonte: Lindenberg Neto, H. Introdução à Mecânica das estruturas, apostila Epusp, São Paulo, 1997

Exercício 10 (aula 2)

Determinar as reações de apoio da estrutura





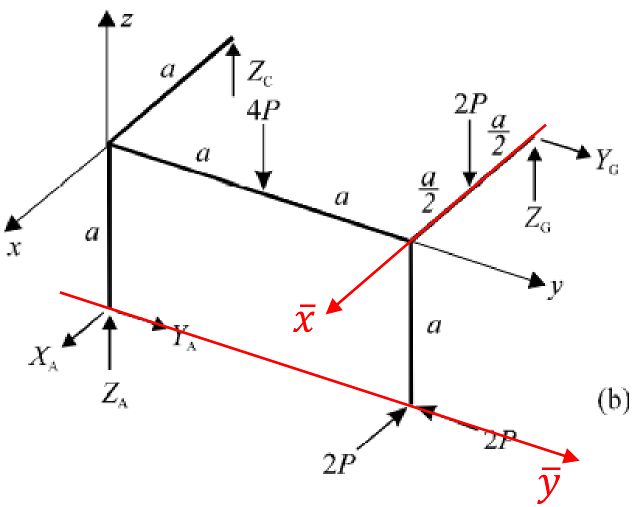
$$
\begin{cases}
\sum X = 0 = X_A - 2P \\
\sum Y = 0 = Y_A + Y_G - 2P \\
\sum Z = 0 = Z_A - 4P + Z_C - 2P + Z_G \\
\sum M_x = 0 = Y_A * a - 4P * a - 2P * a - 2P * 2a + Z_G * 2a \\
\sum M_y = 0 = -X_A * a + Z_C * a + 2P * a - 2P * \dfrac{a}{2} + Z_G * a \\
\sum M_z = 0 = 2P * 2a - Y_G * a
\end{cases}
$$

$$\boxed{\Longrightarrow X_A = 2P;\ Y_A = -2P;\ Z_A = 5P;\ Z_C = -5P;\ Y_G = 4P;\ Z_G = 6P;}$$

Fonte: Lindenberg Neto, H. Introdução à Mecânica das estruturas, apostila Epusp, São Paulo, 1997

Exercício 10 (aula 2)

Determinar as reações de apoio da estrutura

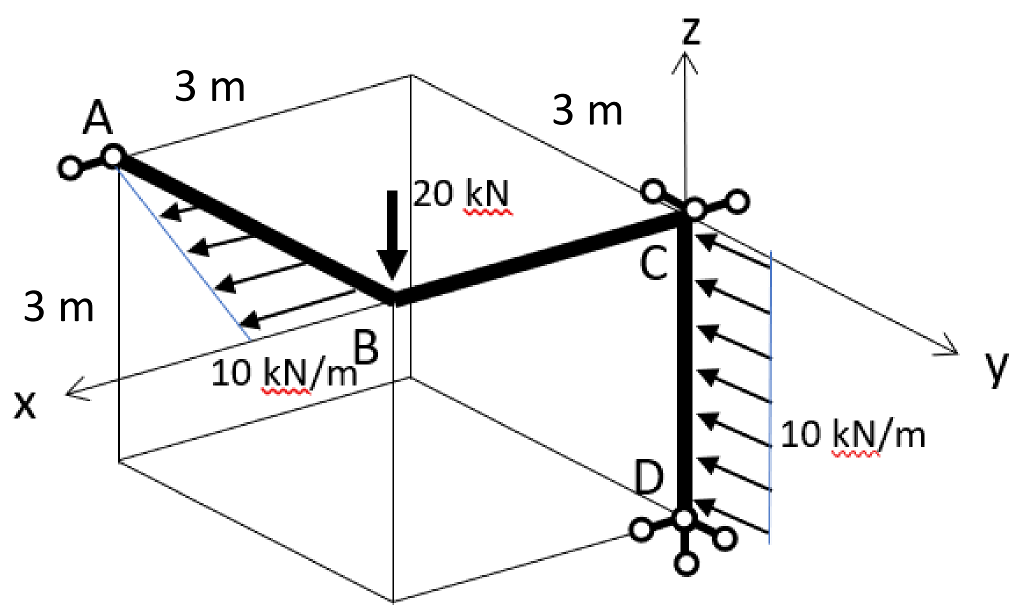


$$
\begin{cases}
\sum X = 0 = X_A - 2P \\
\sum Y = 0 = Y_A + Y_G - 2P \\
\sum Z = 0 = Z_A - 4P + Z_C - 2P + Z_G \\
\sum M_{\bar{x}} = 0 = -Z_A * 2a + Y_A * a - Z_c * 2a + 4P * a \; - 2P * a \\
\sum M_{\bar{y}} = 0 = Z_C * a - 2P * \dfrac{a}{2} + Z_G * a \\
\sum M_z = 0 = 2P * 2a - Y_G * a
\end{cases}
$$

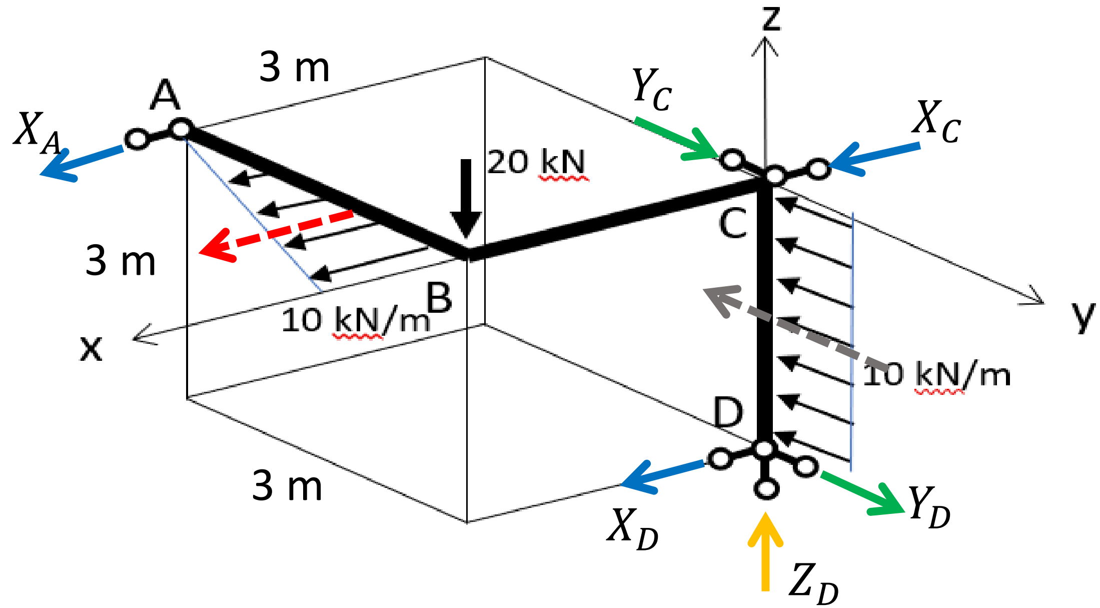
$$\boxed{\Longrightarrow X_A = 2P;\; Y_A = -2P;\; Z_A = 5P;\; Z_C = -5P;\; Y_G = 4P;\; Z_G = 6P;}$$

Exercício 11 (aula 2)

P1-2020. Na viga poligonal ABCD da figura está apoiada em A, C e D por barras curtas na direção dos eixos x, y e z. A barra AB na direção do eixo y está submetida a um carregamento uniformemente variado de zero a 10 kN/m na direção do eixo x; a barra BC está na direção do eixo x; a barra CD na direção do eixo z está submetida a um carregamento uniforme de 10 kN/m na direção do eixo y; em B há uma força concentrada de 20 kN na direção z. Determine as reações dos apoios A, C e D.



$$\boxed{10\frac{kN}{m} * 3m \div 2 = 15\ kN}$$



$$\boxed{10\frac{kN}{m} * 3m = 30\ kN}$$

$$\begin{cases}
\sum X = 0 = X_A + 15 + X_C + X_D \Longrightarrow X_C = -30kN \\
\sum Y = 0 = Y_C - 30 + Y_D \Longrightarrow Y_C = 15kN \\
\sum Z = 0 = -20 + Z_D \Longrightarrow Z_D = 20kN \\
\sum M_x = 0 = -30 * 1{,}5 + Y_D * 3 \Longrightarrow Y_D = 15kN \\
\sum M_y = 0 = 20 * 3 - X_D * 3 \Longrightarrow X_D = 20kN \\
\sum M_z = 0 = X_A * 3 + 15 * 1 \Longrightarrow X_A = -5kN
\end{cases}$$

PEF3200

Aula 3

12 abr

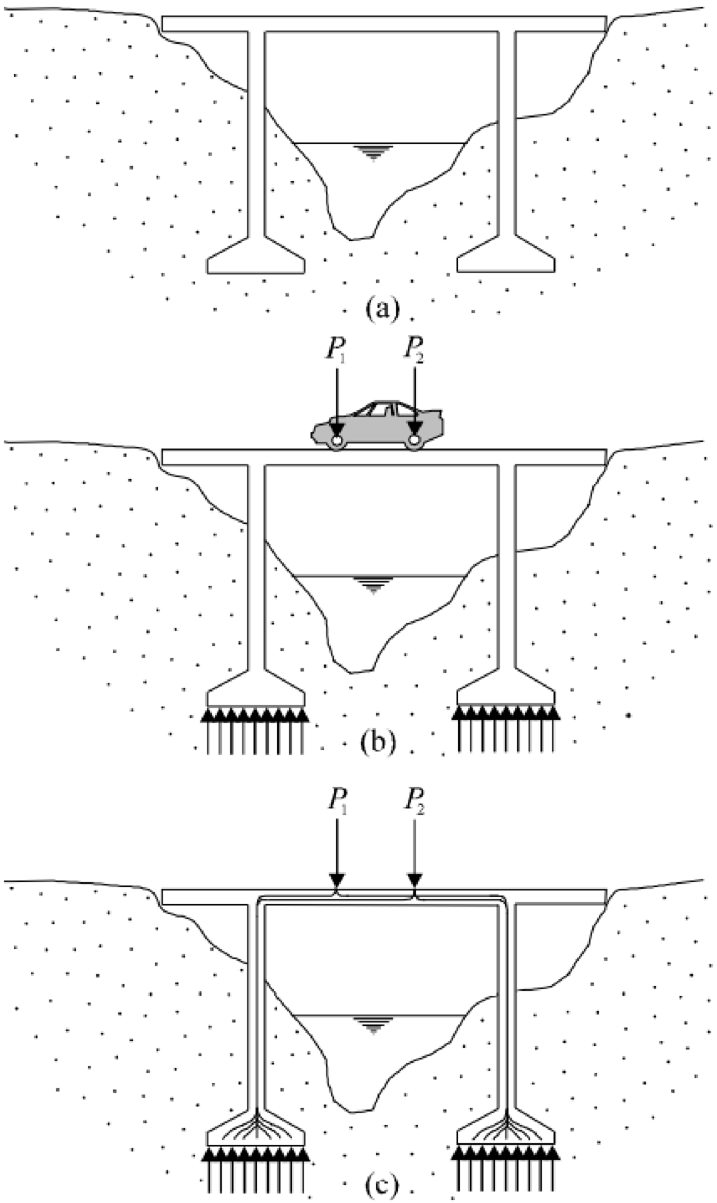
PROF. NAKAO

- **O conceito de tensão.**
- **Esforços solicitantes. Teorema fundamental.**
- **Diagramas de esforços solicitantes de estruturas planas.**

AULA 3
12 abr

- **O conceito de tensão.**
- **Esforços solicitantes. Teorema fundamental.**
- **Diagramas de esforços solicitantes de estruturas planas.**

Conceito de tensão

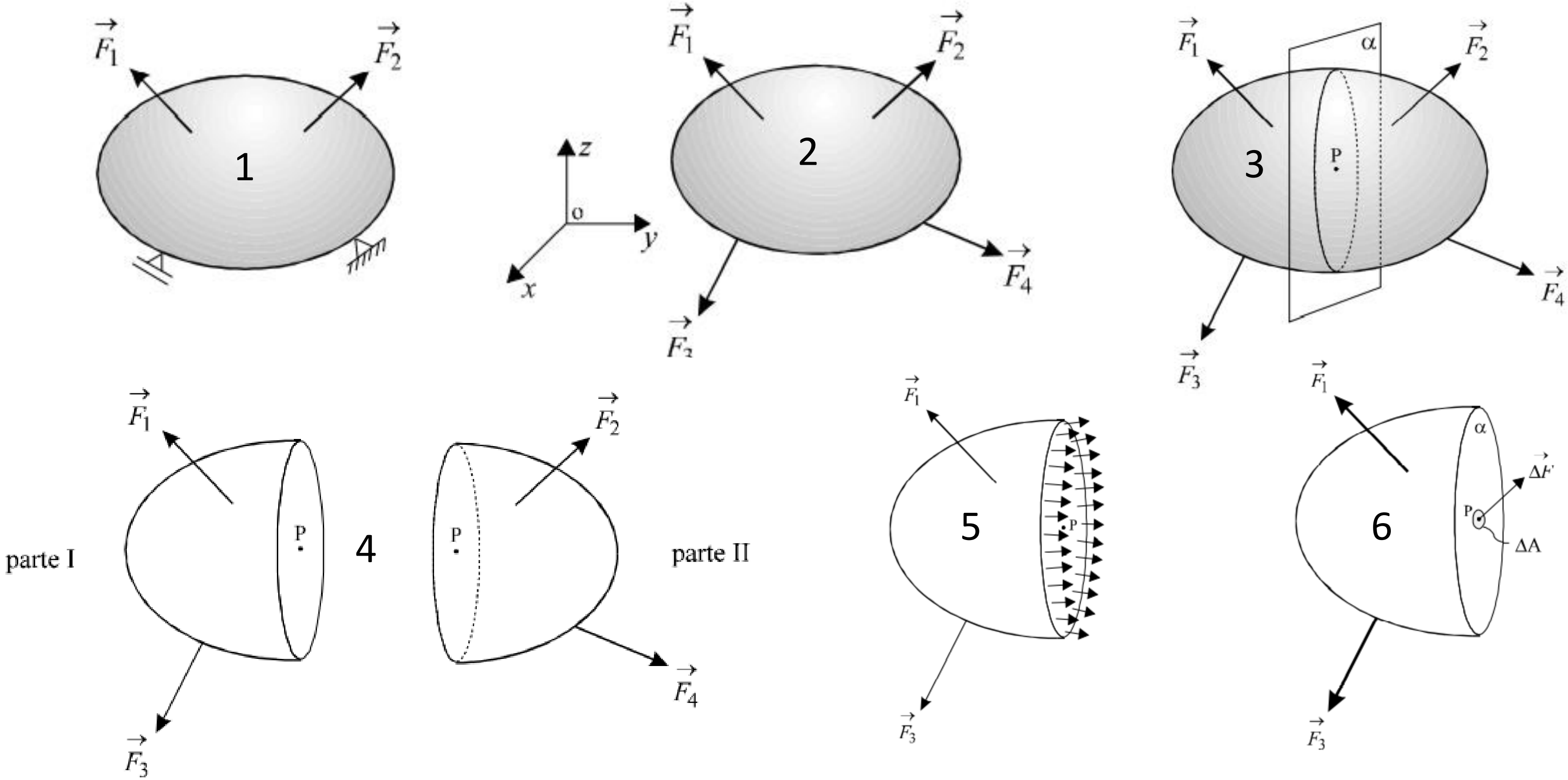


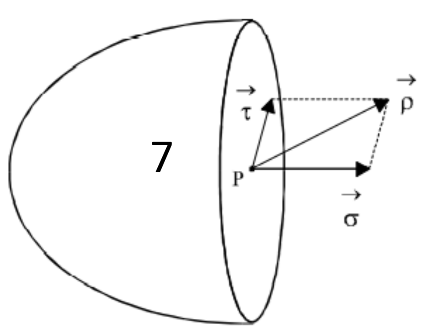
A DEFORMAÇÃO E A RUPTURA RELACIONAM-SE COM O CAMINHAMENTO DOS ESFORÇOS EXTERNOS ATIVOS DESDE SEUS PONTOS DE APLICAÇÃO ATÉ OS APOIOS.

TENSÕES SÃO OS ESFORÇOS QUE SURGEM NO INTERIOR DA ESTRUTURA NESTE CAMINHAMENTO.

TENSÕES SÃO AS FORÇAS DISTRIBUÍDAS QUE ATUAM NOS PLANOS INTERNOS DO SÓLIDO E REPRESENTAM A AÇÃO QUE UMA DAS PARTES EXERCE SOBRE A OUTRA.

Conceito de tensão



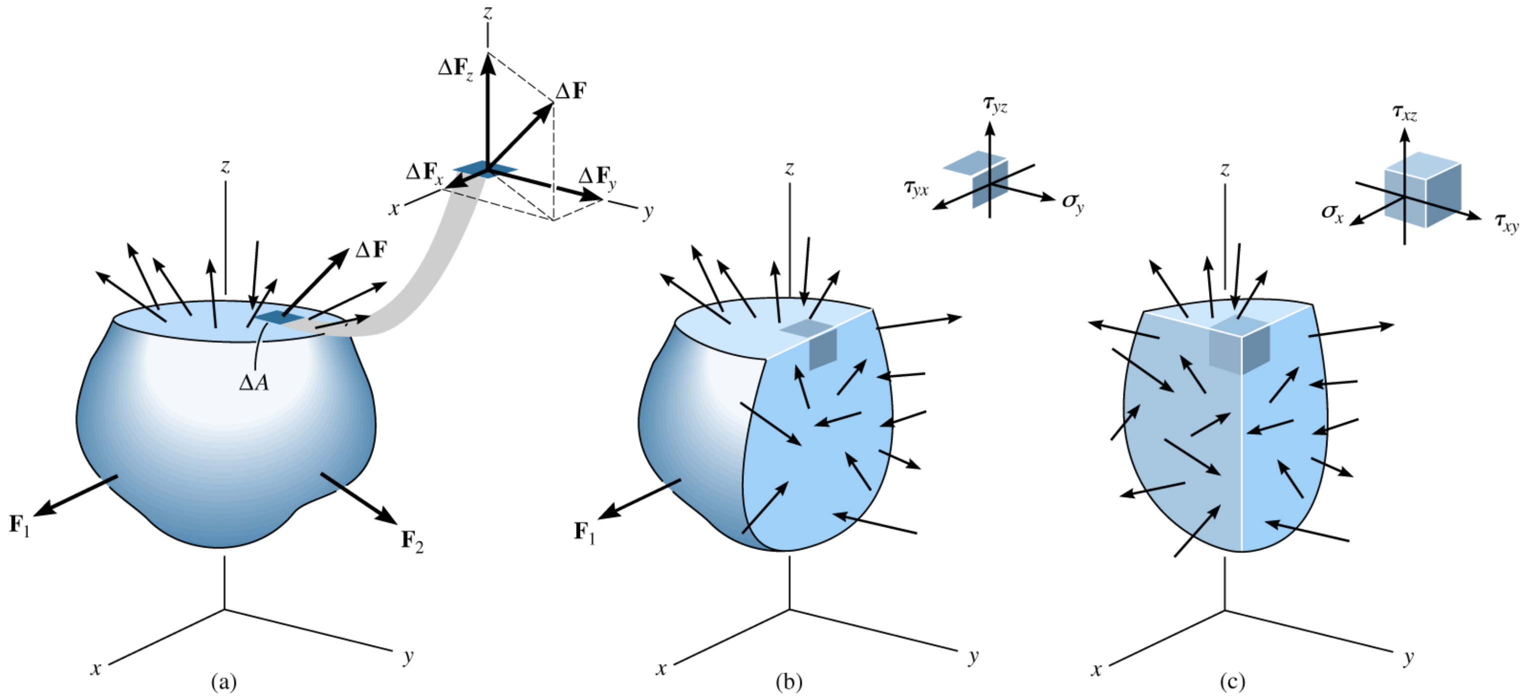


$$\vec{\rho} = \vec{\sigma} + \vec{\tau}$$

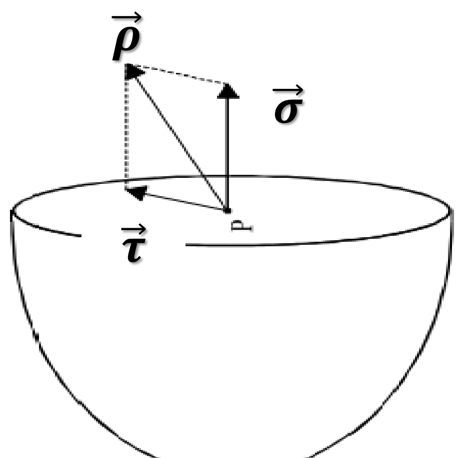
ρ – *tensão*
σ – *tensão normal*
τ – *tensão tangencial*

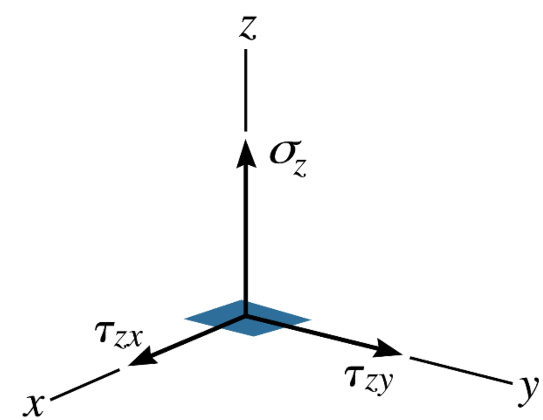
TENSÕES SÃO ESFORÇOS INTERNOS RESULTANTES DA TRANSFERÊNCIA DOS ESFORÇOS EXTERNOS DE UM PONTO A OUTRO

Conceito de tensão



$$\vec{\rho} = \vec{\sigma} + \vec{\tau}$$



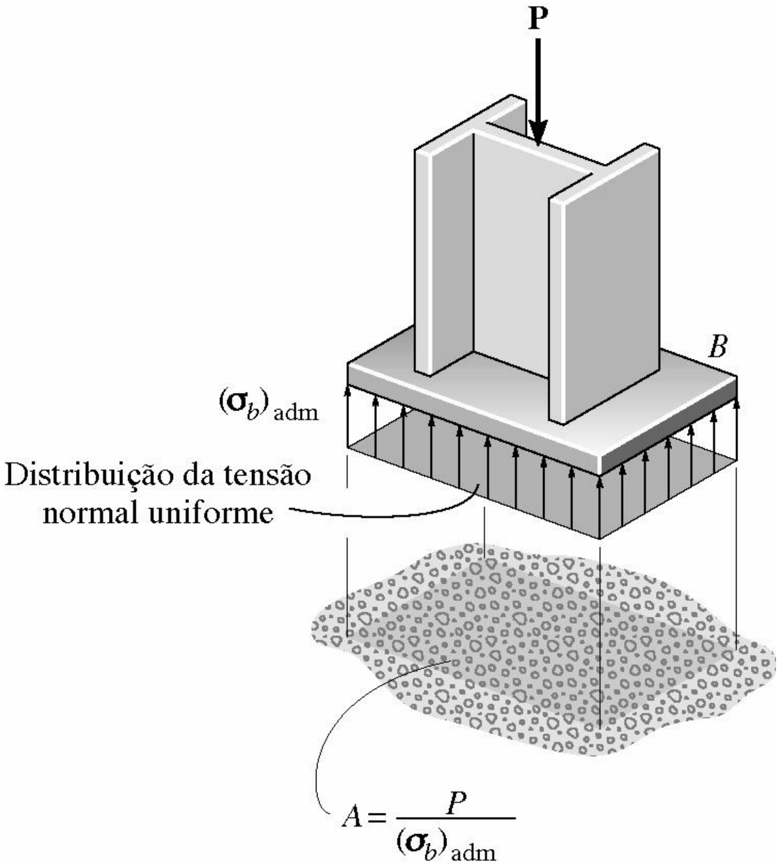


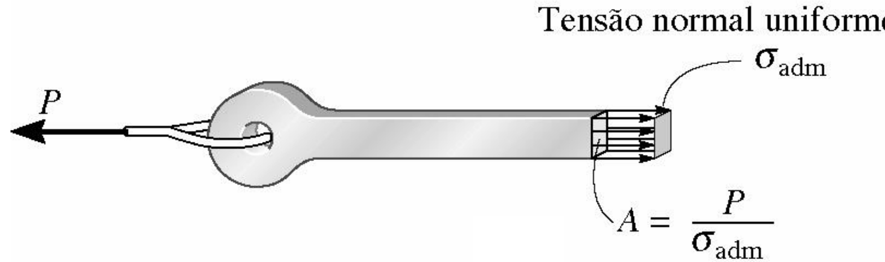
ρ – *tensão*

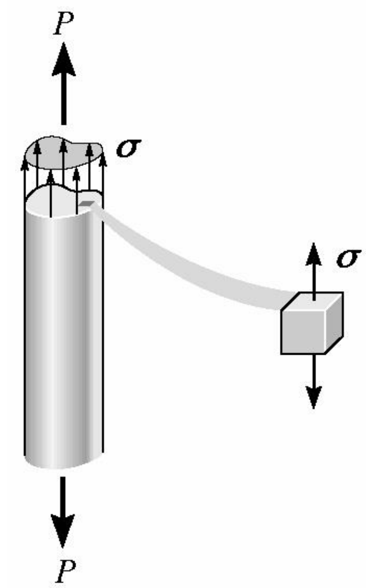
σ – *tensão normal*

τ – *tensão tangencial ou de cisalhamento*

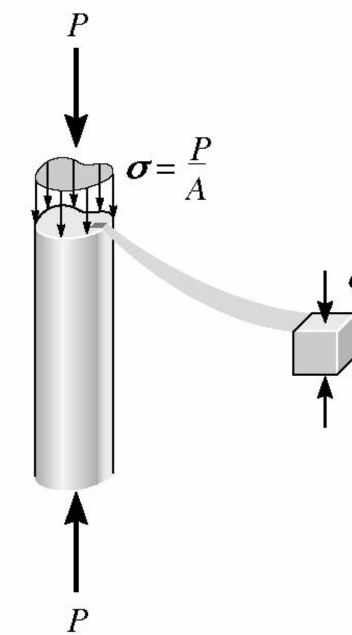
Conceito de tensão





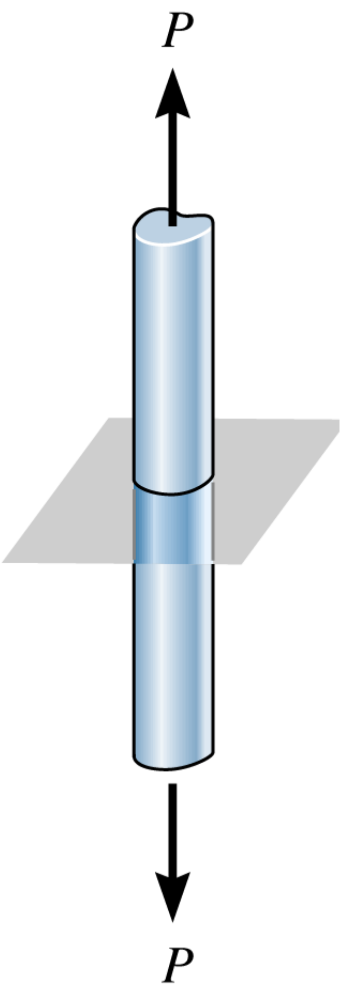


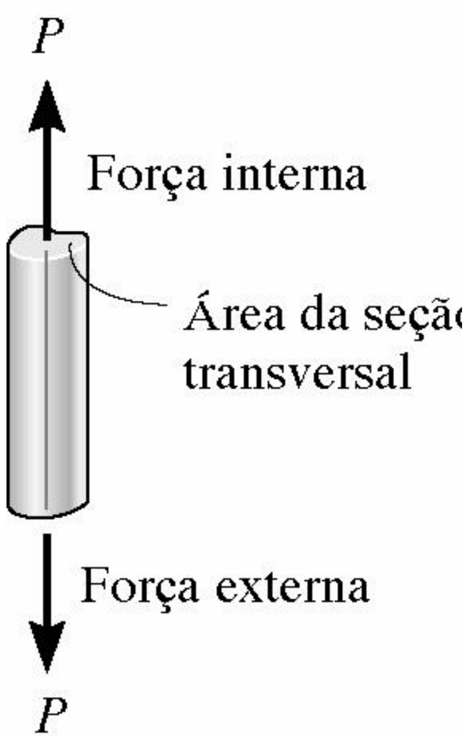
Tração

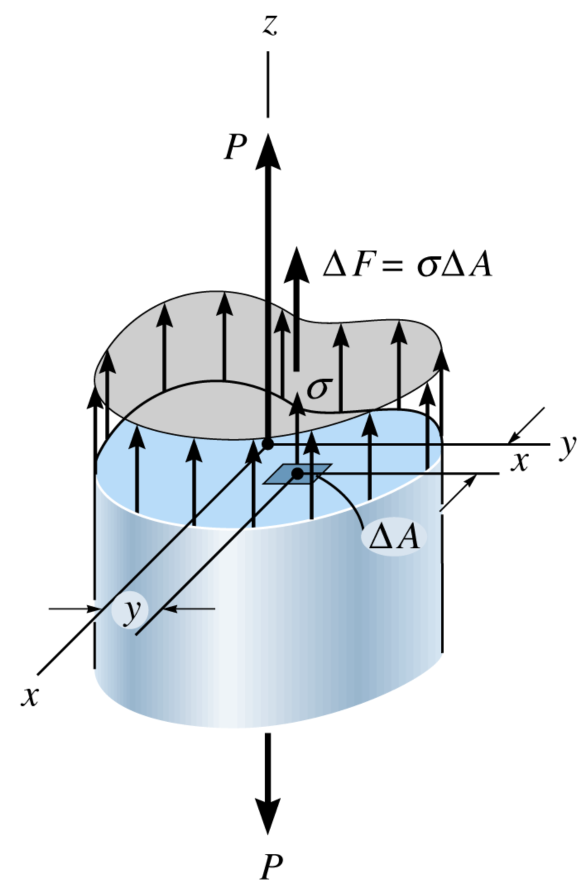


Compressão

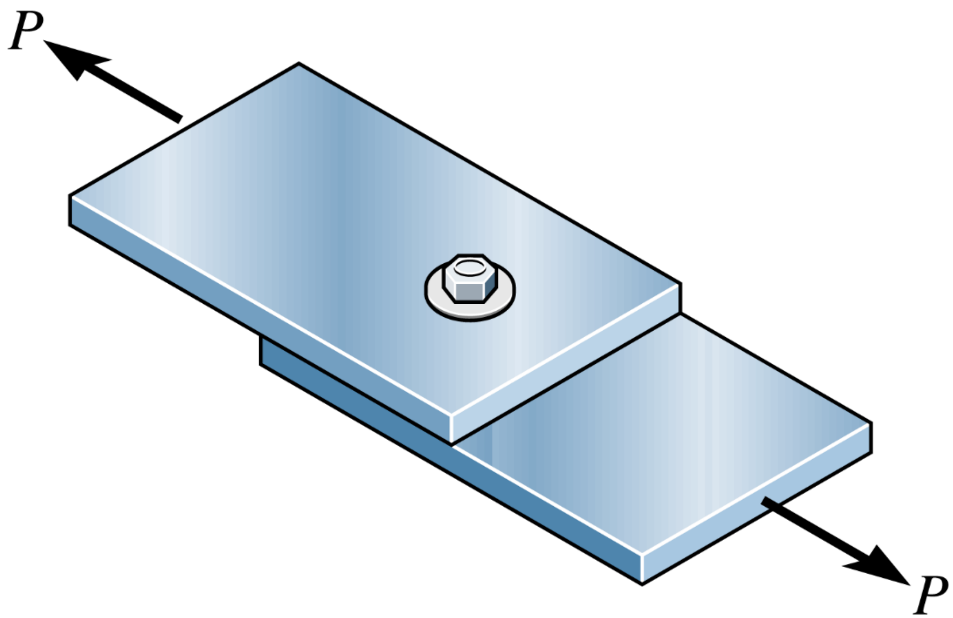
Conceito de tensão

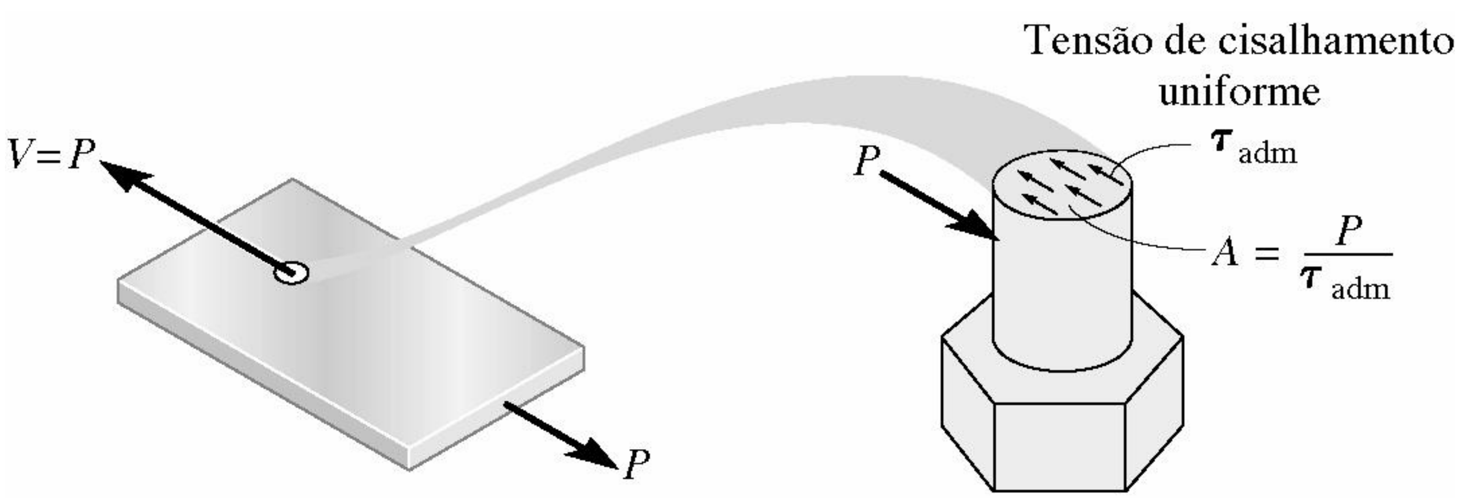






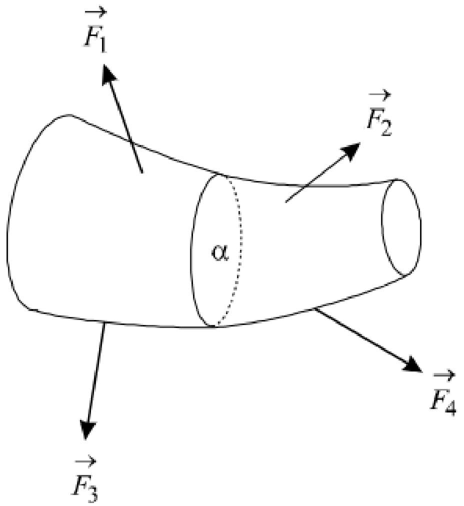
Conceito de tensão



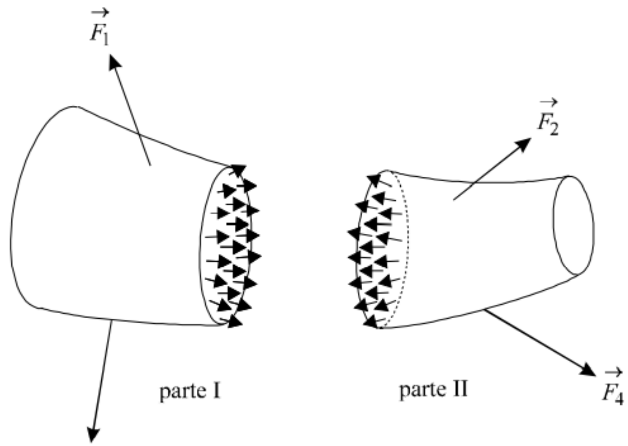


AULA 3
12 abr

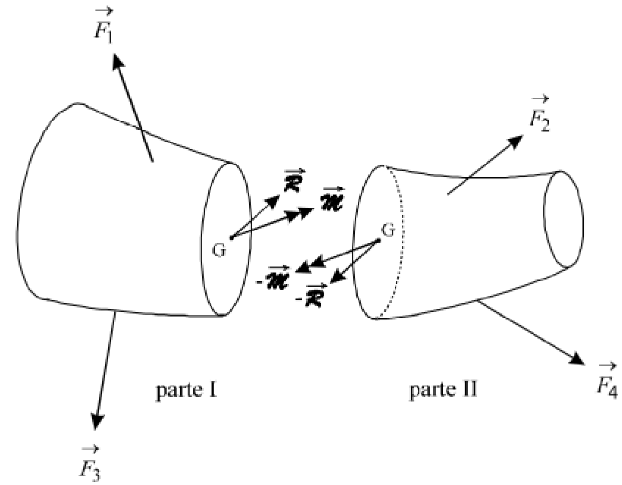
- O conceito de tensão.
- **Esforços solicitantes. Teorema fundamental.**
- Diagramas de esforços solicitantes de estruturas planas.



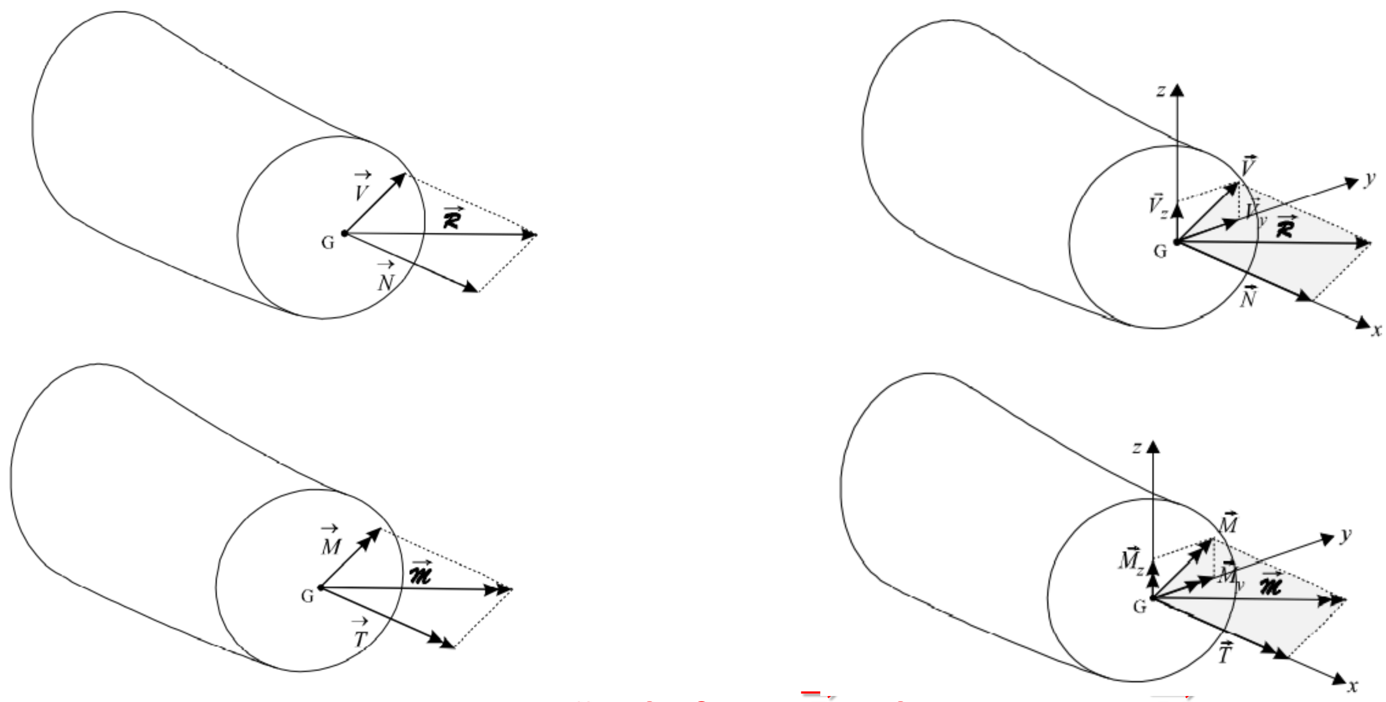
1. Seção transversal α



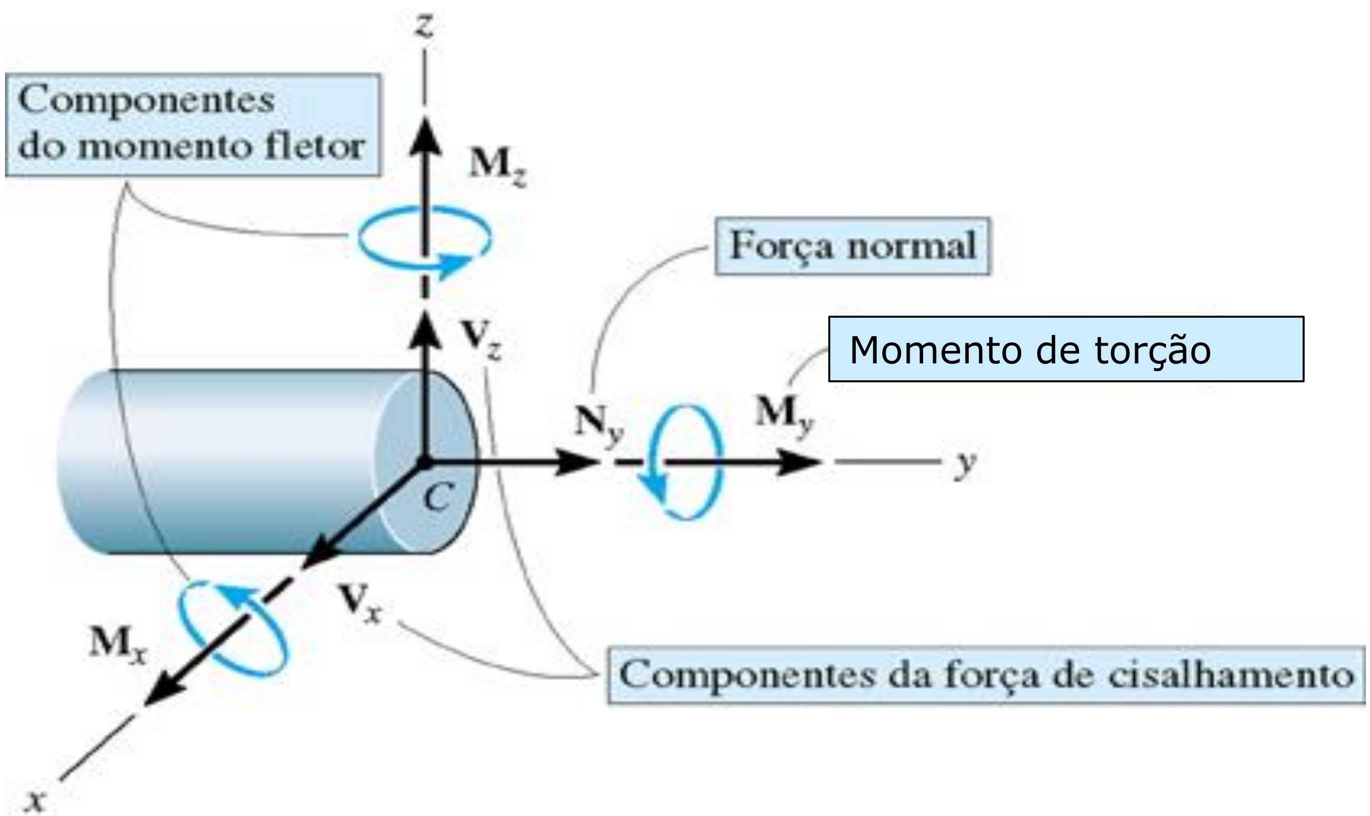
2. Tensões em α



3. Resultante das tensões: $\overrightarrow{R}$ e $\overrightarrow{M}$

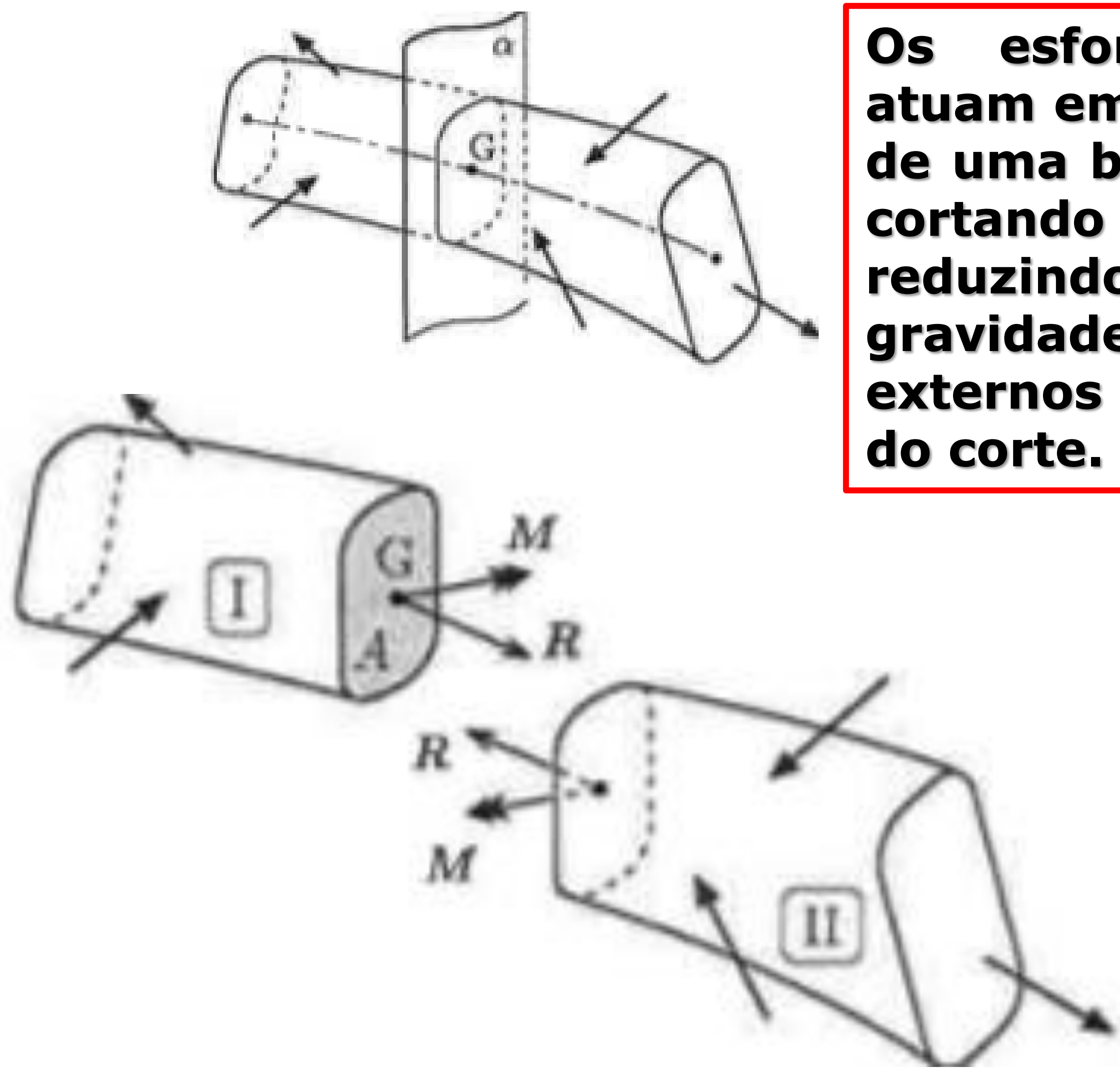


4. Decomposição da força $\overline{R}$ e do momento $\overline{M}$



ESFORÇOS SOLICITANTES: esforços internos, resultantes das tensões na seção transversal de uma barra (reduzindo as tensões ao centro de gravidade C da seção transversal). Na figura, ao decompor esses esforços internos, obtêm-se a **força normal (N_y)**, as **forças cortantes (V_x V_y)**, os **momentos fletores (M_x M_z)**, e o **momento de torção (M_y)**.

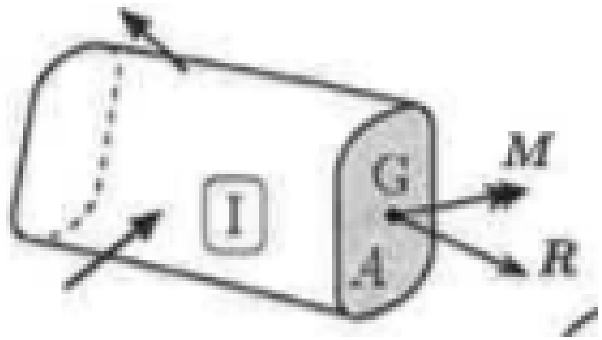
Teorema fundamental
Teorema do corte

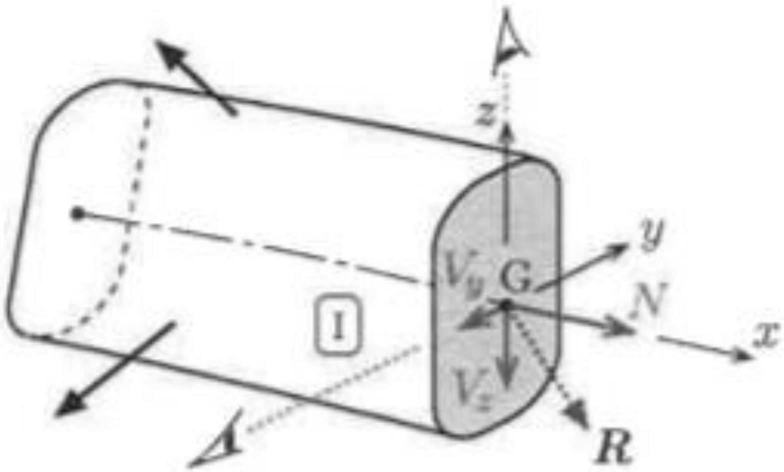


Os esforços solicitantes que atuam em uma seção transversal de uma barra podem ser obtidos cortando a barra nesta seção e reduzindo no seu centro de gravidade todos os esforços externos aplicados do outro lado do corte.

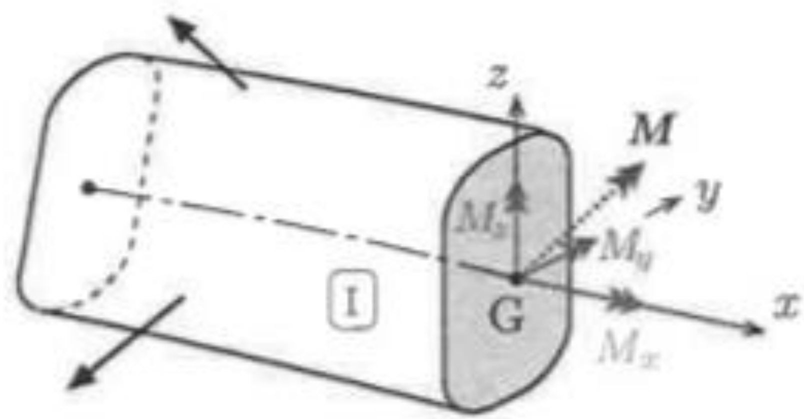
Fonte: Almeida Neto, E. S. Conceitos fundamentais de Resistência dos materiais, apostila Epusp, São Paulo, 2011

Teorema fundamental da Estática das construções
Teorema do corte



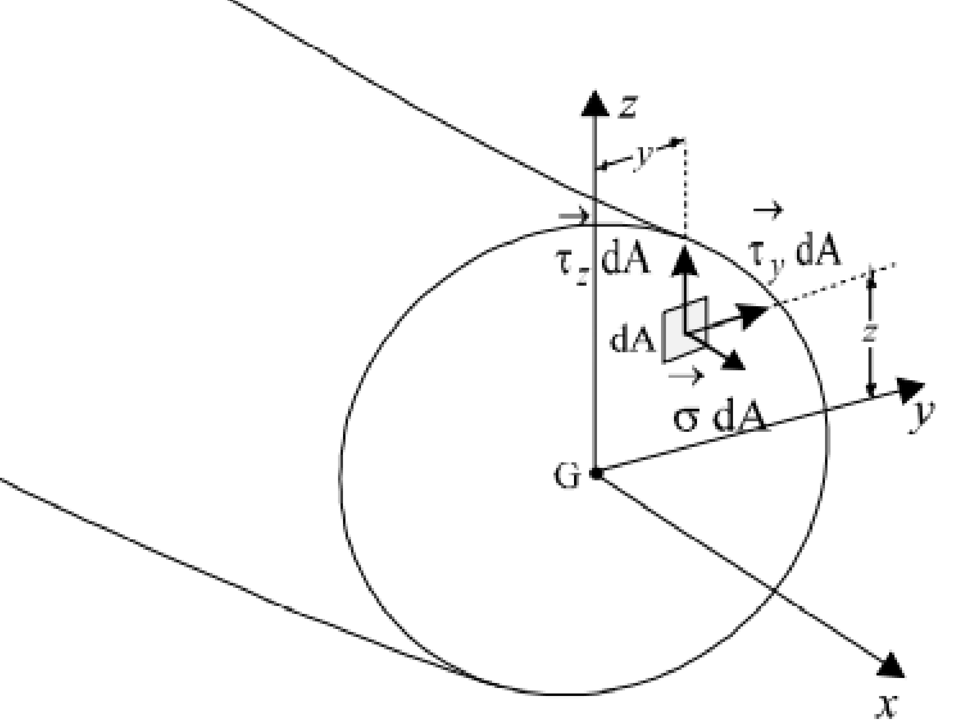


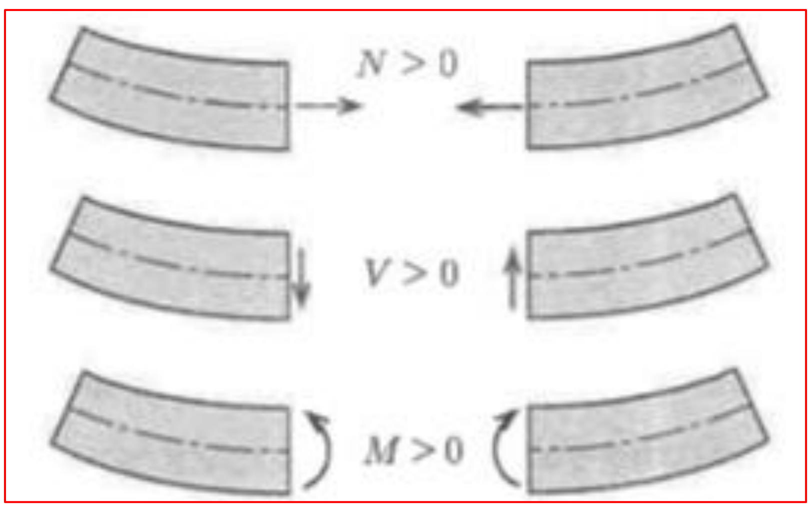
(a) Forças



(b) Momentos

Fonte: Almeida Neto, E. S. Conceitos fundamentais de Resistência dos materiais, apostila Epusp, São Paulo, 2011



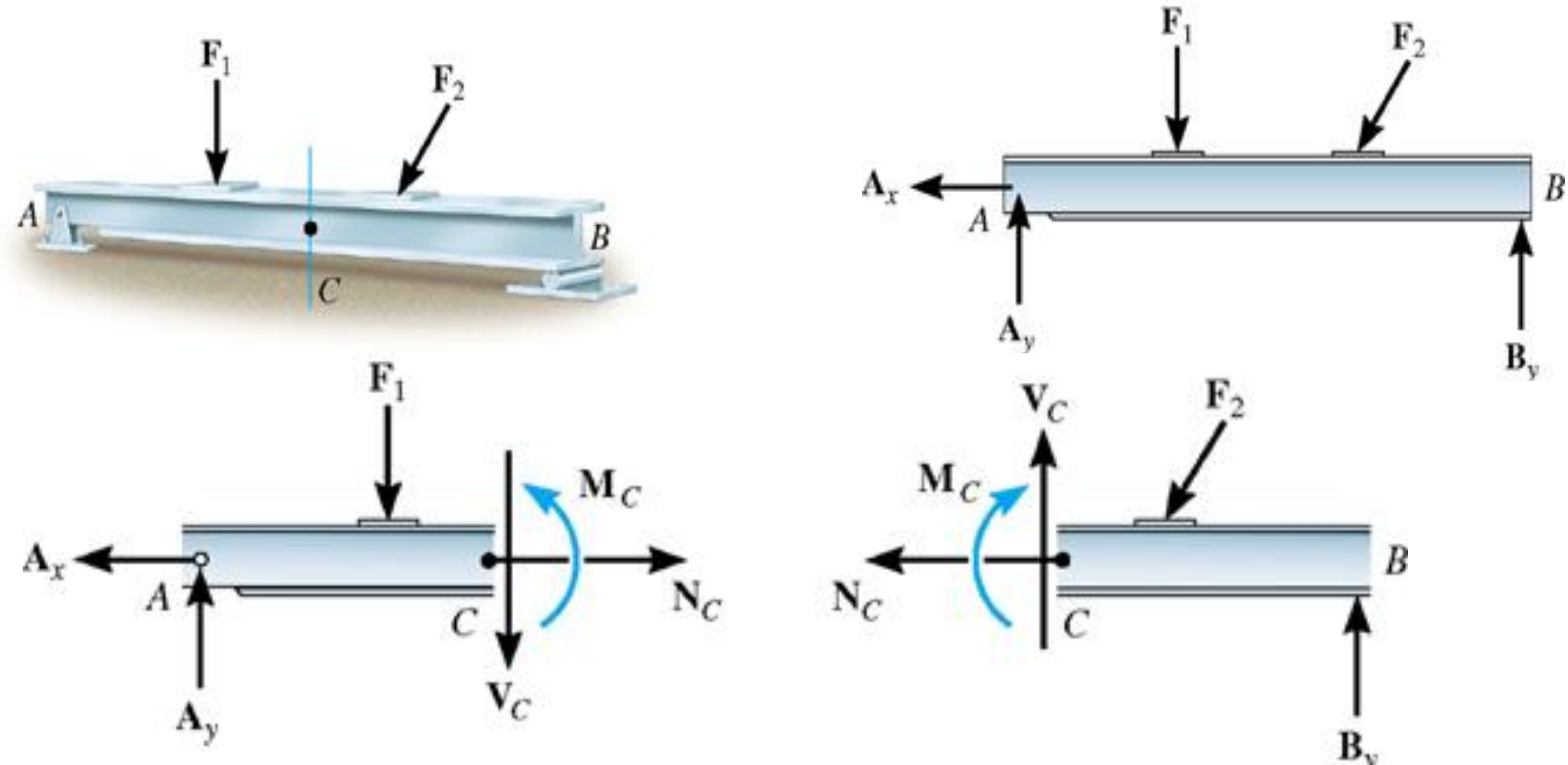


FORÇA NORMAL: $N = \int \sigma . dA$

FORÇAS CORTANTES: $\begin{cases} V_y = \int \tau_y . dA \\ V_z = \int \tau_z . dA \end{cases}$

MOMENTOS FLETORES: $\begin{cases} M_y = \int \sigma . z . dA \\ M_z = - \int \sigma . y . dA \end{cases}$

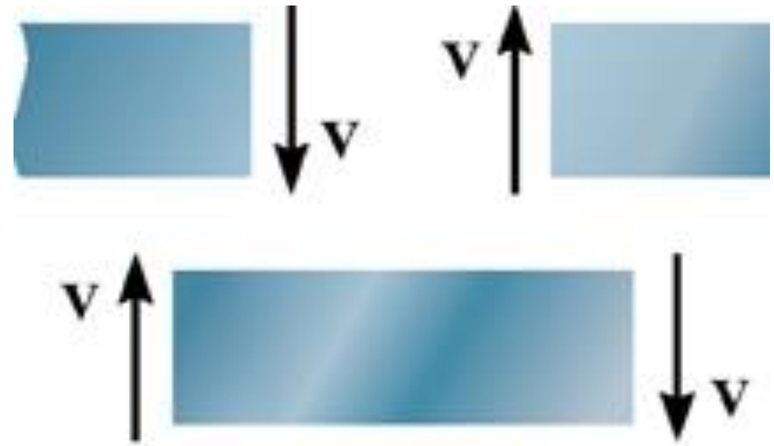
MOMENTO DE TORÇÃO: $T = \int \left(\tau_z . y . dA - \tau_y . z . dA \right) = M_x$



ESFORÇOS: forças (concentradas, distribuídas), momentos e tensões.
ESFORÇOS EXTERNOS: Aqueles que atuam nas estruturas e fazem surgir esforços internos que podem deformar estas estruturas levando ao rompimento em alguns casos são esforços externos **ativos (F_1 F_2)**. Aqueles que surgem nos apoios são esforços externos **reativos (A_x A_y B_y)**.
ESFORÇOS INTERNOS: tensões e suas resultantes.
ESFORÇOS SOLICITANTES: esforços internos, resultantes e momentos das tensões na seção transversal de uma barra. São as **forças normais (N_c)**, as **forças cortantes (V_c)**, os **momentos fletores (M_c)**, e os **momentos de torção**.

Convenção de sinais
Estruturas planas

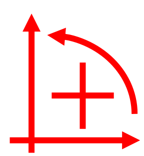
Força cortante V
Momento fletor M



Força de cisalhamento positiva

Momento fletor positivo

No equilíbrio, adote a convenção de GRINTER



Convenção de sinais para esforço solicitante

Esforço solicitante	Sinal positivo (+)	Sinal negativo (-)
Força normal	Tração	Compressão
Força cortante	Gira o trecho de barra em que atua no sentido horário	Gira o trecho de barra em que atua no sentido anti-horário
Momento fletor	Traciona as fibras inferiores da barra	Traciona as fibras superiores da barra
Momento de torção[2]	O vetor momento tem o sentido da normal externa à seção transversal em que atua	O vetor momento tem sentido contrário ao da normal externa à seção tranversal em que atua

Fonte: Lindenberg Neto, H. Introdução à Mecânica das estruturas, apostila Epusp, São Paulo, 1997

AULA 3
12 abr

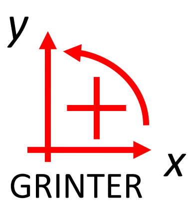
- O conceito de tensão.

- Esforços solicitantes. Teorema fundamental.

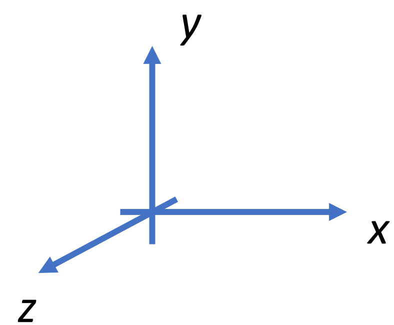
- **Diagramas de esforços solicitantes de estruturas planas.**

Lembretes para a convenção de sinais:

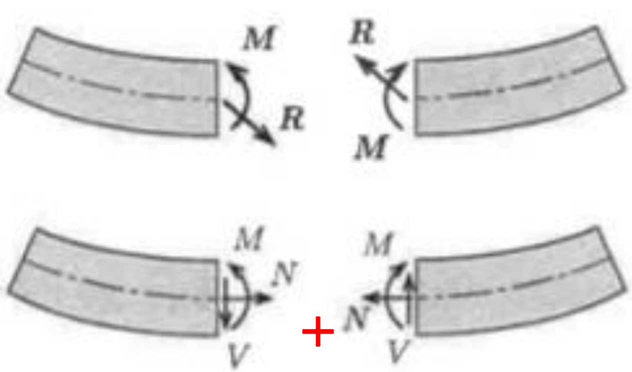
1. No equilíbrio, utilizar a convenção de Grinter

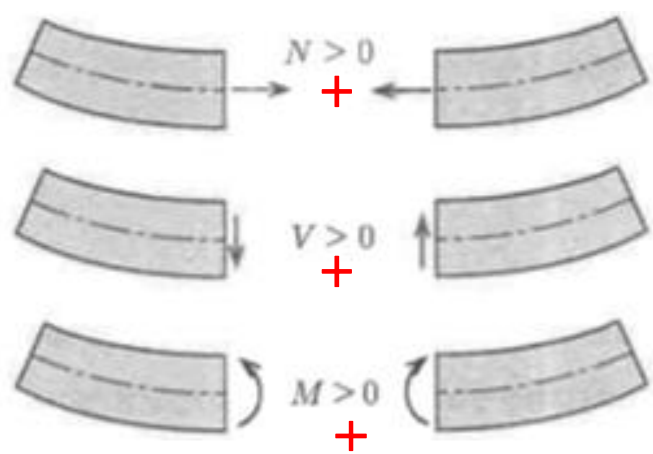


$$\sum F_x = 0, \qquad \sum M_{Oz} = 0.$$
$$\sum F_y = 0,$$



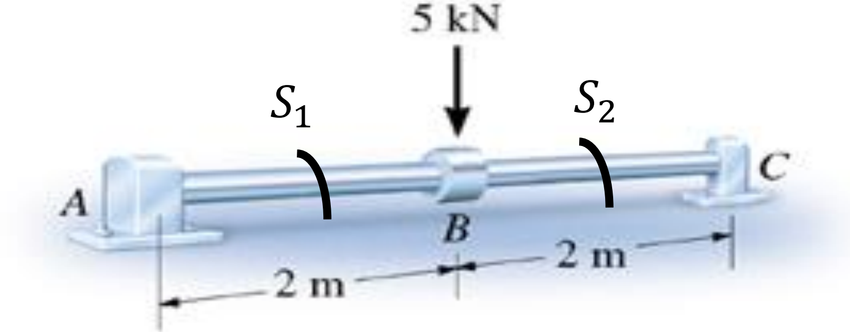
2. Ao aplicar o teorema do corte, utilizar a convenção dos esforços solicitantes





Exercício 1.

ESBOCE OS DIAGRAMAS DOS ESFORÇOS SOLICITANTES DA VIGA DA FIGURA



ESTÁTICA

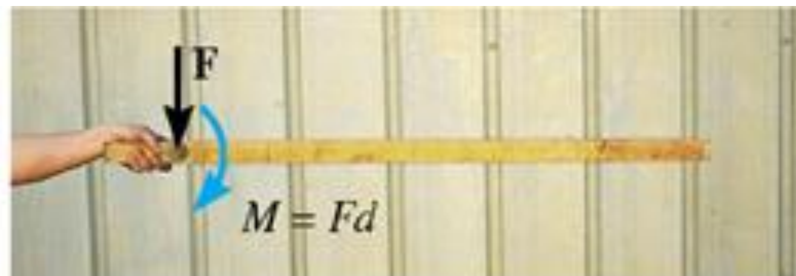

F

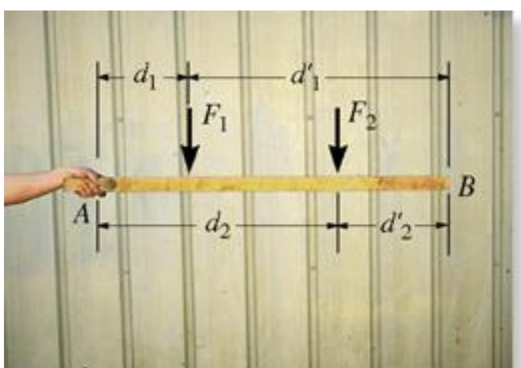
=


F

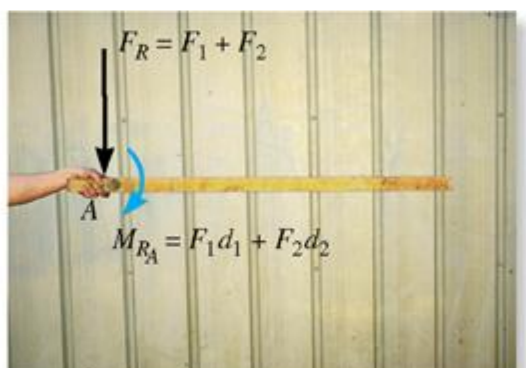

F
d

=

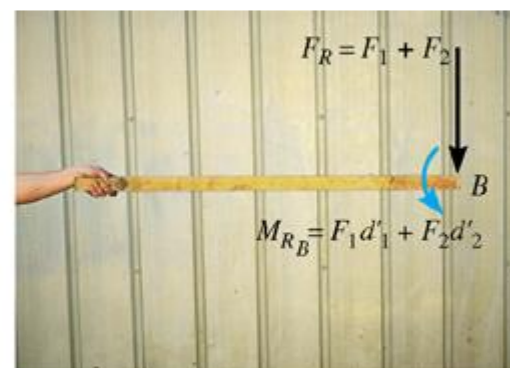

F
$M = Fd$


d_1
d'_1
F_1
F_2
A
B
d_2
d'_2

=

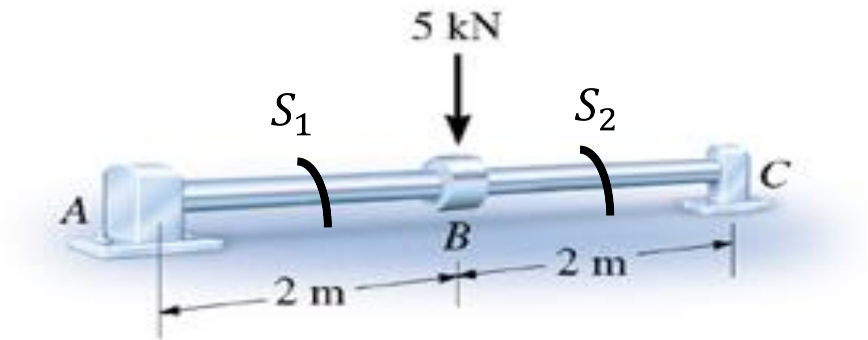

$F_R = F_1 + F_2$
A
$M_{R_A} = F_1 d_1 + F_2 d_2$

=


$F_R = F_1 + F_2$
B
$M_{R_B} = F_1 d'_1 + F_2 d'_2$

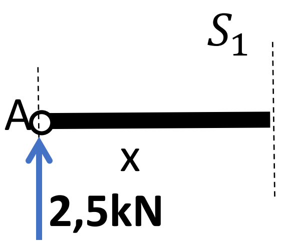
Exercício 1.

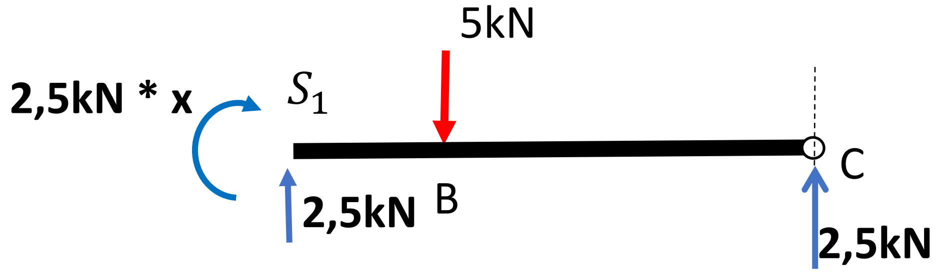
ESBOCE OS DIAGRAMAS DOS ESFORÇOS SOLICITANTES DA VIGA DA FIGURA



PELO TEOREMA DO CORTE

$SEÇÃO\ S_1$: Pode-se obter os esforços solicitantes em S_1, reduzindo/transferindo as forças ativas da parte da esquerda para a seção da parte da direita.





$SEÇÃO\ S_1$: Pela convenção dos esforços solicitantes, sabe-se que

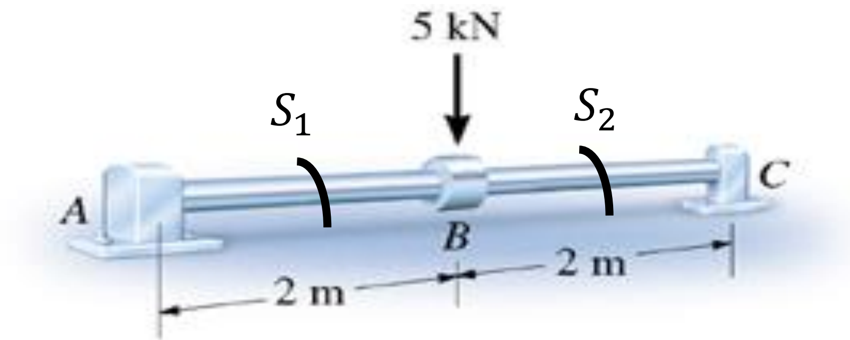
$V(x) = +2{,}5\ \ (kN)$

$\mathrm{M}(x) = +2{,}5\ * x\ \ (kNm)$

Pelo Teorema do corte, divide-se a estrutura apenas em duas partes na seção de interesse

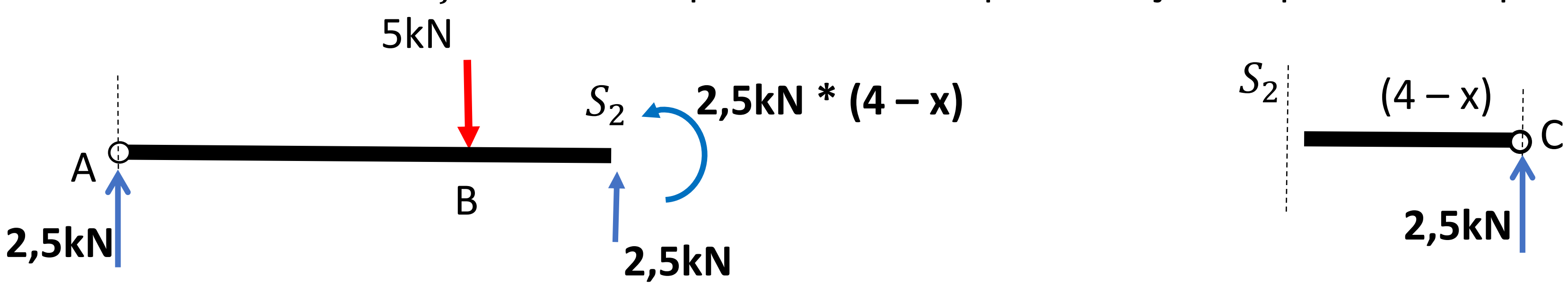
Exercício 1.

ESBOCE OS DIAGRAMAS DOS ESFORÇOS SOLICITANTES DA VIGA DA FIGURA



PELO TEOREMA DO CORTE

$SEÇÃO\ S_2$: Pode-se obter os esforços solicitantes em S_2, reduzindo/ transferindo as forças ativas da parte da direita para a seção da parte da esquerda.



$SEÇÃO\ S_2$: Pela convenção dos esforços solicitantes, sabe-se que

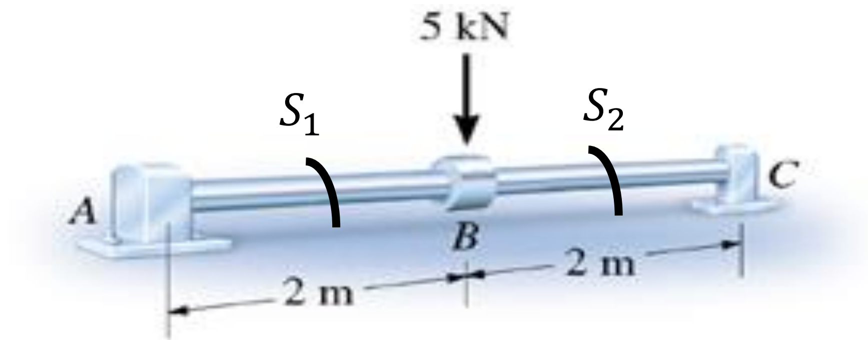
$V(x) = -2{,}5\ (kN)$

$\text{M}(x) = +2{,}5 * (4 - x) = 10 - 2{,}5 * x\ \ (kNm)$

Pelo Teorema do corte, divide-se a estrutura apenas em duas partes na seção de interesse

Exercício 1.

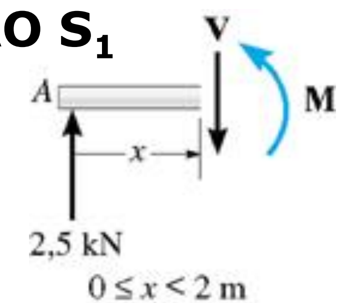
ESBOCE OS DIAGRAMAS DOS ESFORÇOS SOLICITANTES DA VIGA DA FIGURA



POR EQUILÍBRIO

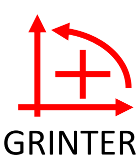
Seccionando em S_1 e S_2 , supondo a existência de V(x) e M(x) tem-se:

SEÇÃO S_1

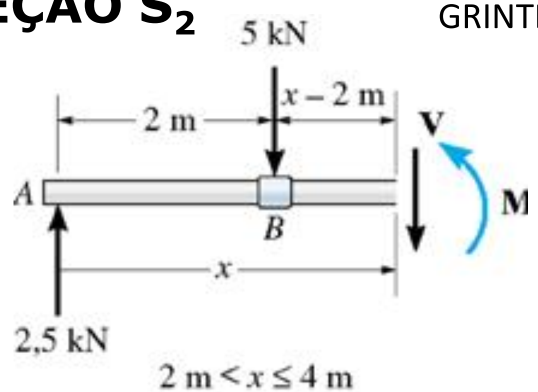


$$\sum Y = 0 = 2{,}5 - V(x) \Longrightarrow \boldsymbol{V(x) = +2,5}$$

$$\sum M(S_1) = 0 = -2{,}5 * x + M(x) \Longrightarrow \boldsymbol{M(x) = 2,5x}$$



SEÇÃO S_2

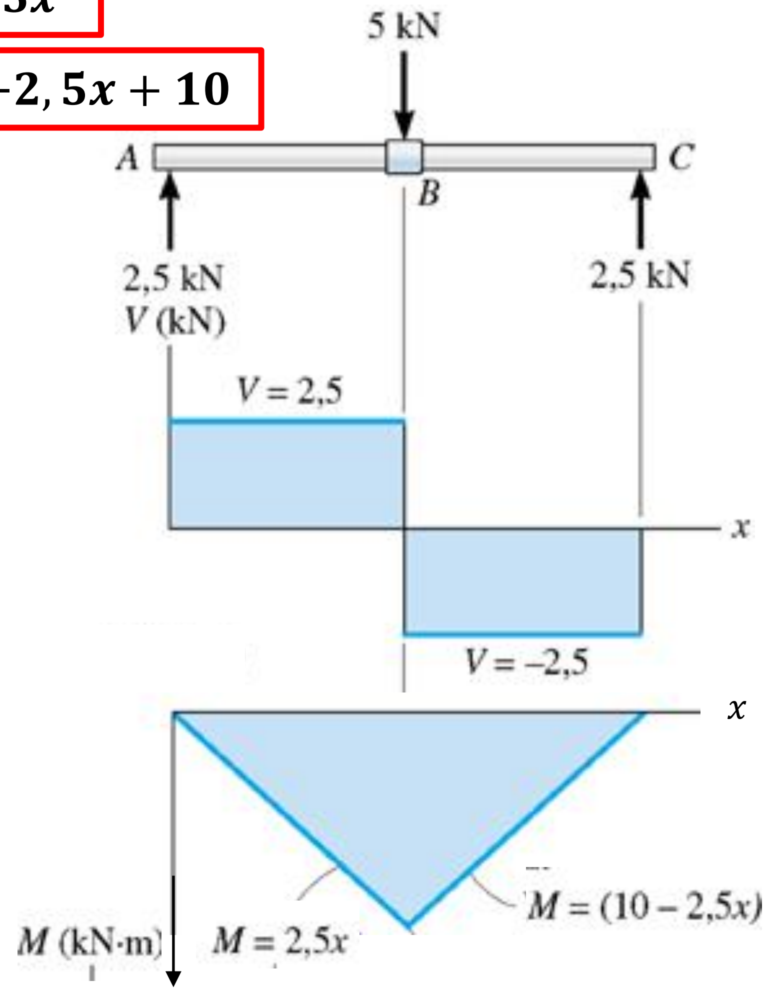


$$\sum Y = 0 = 2{,}5 - 5 - V(x) \Longrightarrow \boldsymbol{V(x) = -2,5}$$

$$\sum M(S_2) = 0 = -2{,}5 * x + 5 * (x - 2) + M(x)$$
$$\Longrightarrow \boldsymbol{M(x) = -2,5x + 10}$$

$$\boxed{\boldsymbol{Em\ S_1(0 < x < 2): V(x) = 2,5; M(x) = 2,5x}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{Em\ S_2(2 < x < 4): V(x) = -2,5; M(x) = -2,5x + 10}}$$



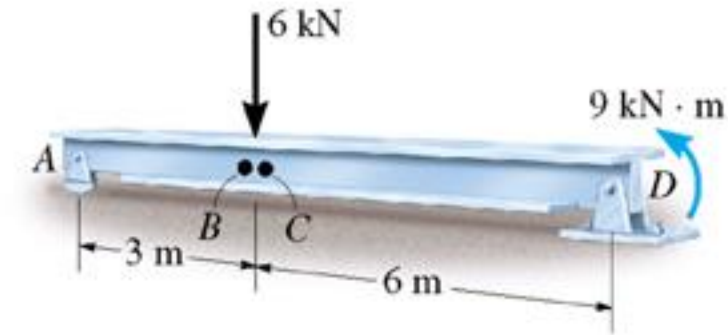
$V_A = V(0) = 2{,}5$
$V_{B-} = V(2_-) = 2{,}5$
$V_{B+} = V(2_+) = -2{,}5$
$V_C = V(4) = -2{,}5$

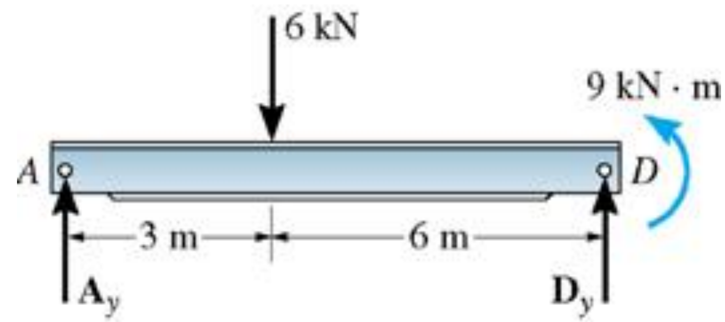
$M_A = M(0) = 2{,}5.(0) = 0$
$M_{B-} = M(2_-) = 2{,}5.(2) = 5$
$M_{B+} = M(2_+) = -2{,}5.(2) + 10 = 5$
$M_C = M(4) = -2{,}5.(4) + 10 = 0$

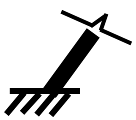
$V(x)$é $uma\ função\ constante\ em\ cada\ trecho$;
$M(x)$é $uma\ função\ polinomial\ do\ 1o.\ grau\ e\ o gráfico$ é $reta\ em\ cada\ trecho.$

Exercício 2.

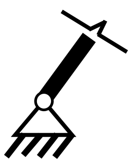
Na viga da figura, obtenha os esforços solicitantes em B e C, na vizinhança do ponto de aplicação da força de 6 kN, e esboce os diagramas dos esforços solicitantes



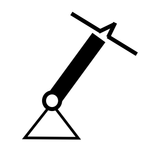




engastamento



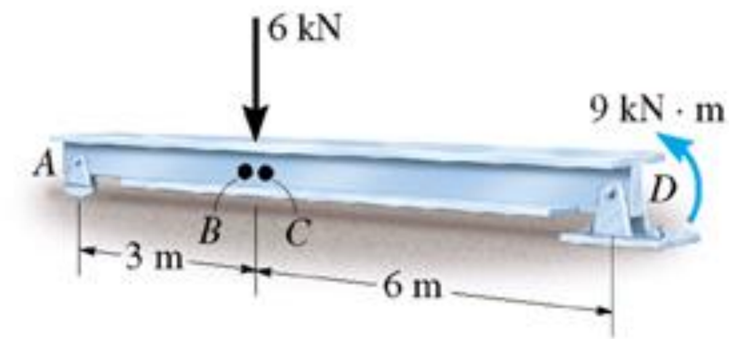
articulação fixa

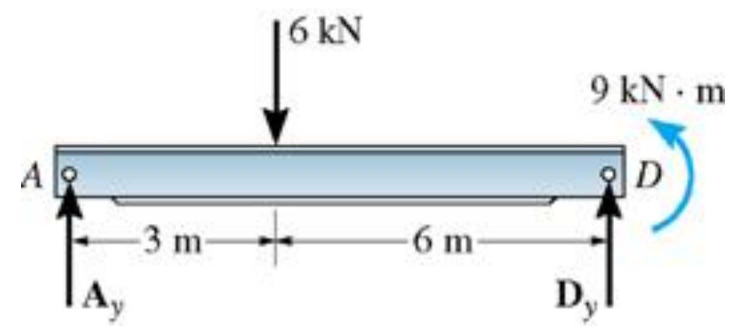


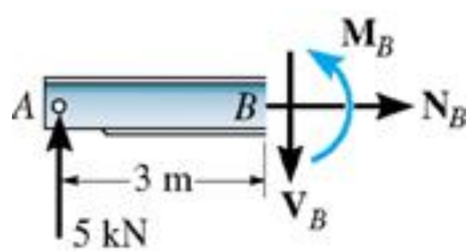
articulação móvel

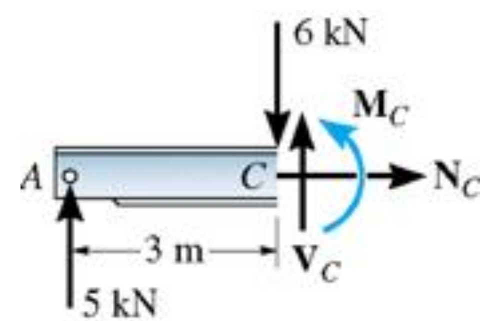
Exercício 2.

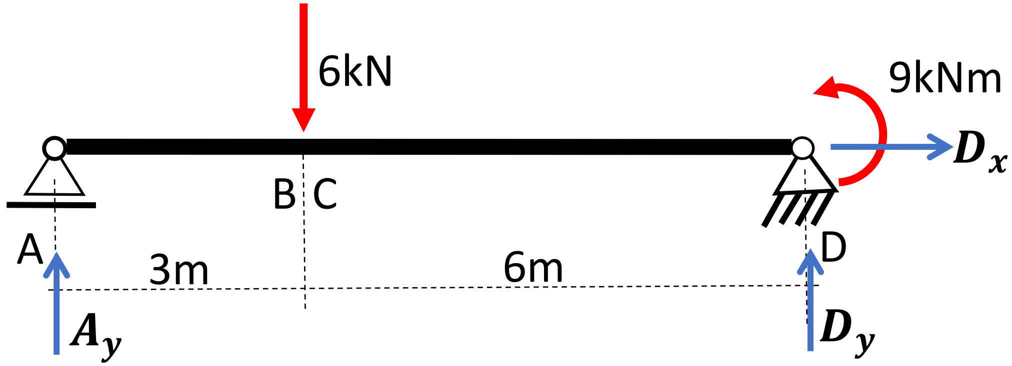
Na viga da figura, obtenha os esforços solicitantes em B e C, na vizinhança do ponto de aplicação da força de 6 kN, e esboce os diagramas dos esforços solicitantes

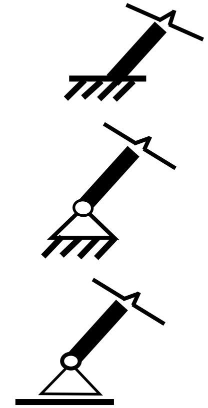












engastamento

articulação fixa

articulação móvel

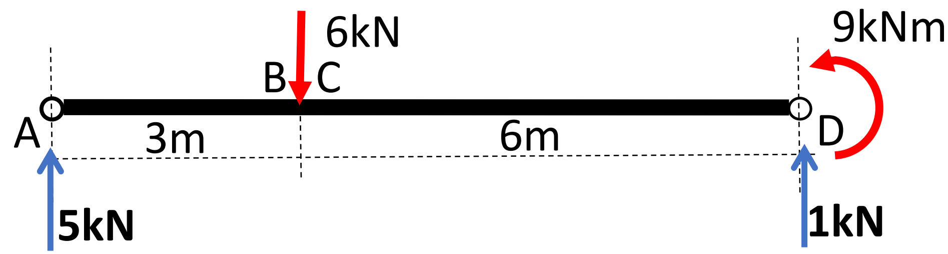
1. *Reações nos apoios*

$\sum X = 0 = D_x \Longrightarrow \boldsymbol{D_x = 0}$

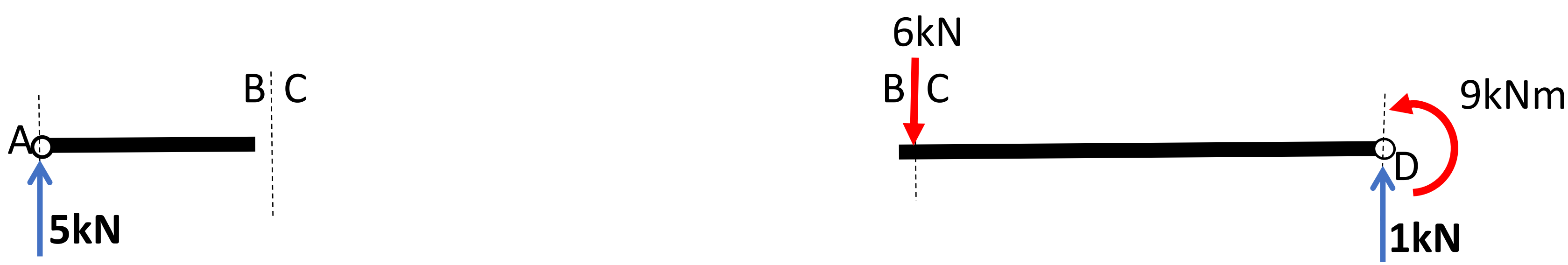
$\sum M_D = 0 = -A_y * 9 + 6 * 6 + 9 \Longrightarrow \boldsymbol{A_y = 5\ kN}$

$\sum Y = 0 = A_y - 6 + D_y \Longrightarrow 5 - 6 + D_y = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{D_y = 1\ kN}$

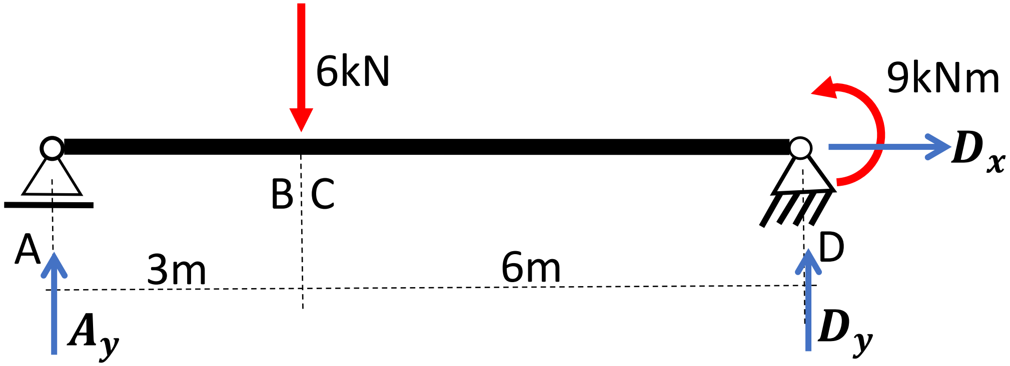
2. *Diagrama do corpo livre* (***DCL***)



3. *Seção B* (*aplicação do Teorema do corte*)



Pelo Teorema do corte, divide-se a estrutura apenas em duas partes na seção de interesse



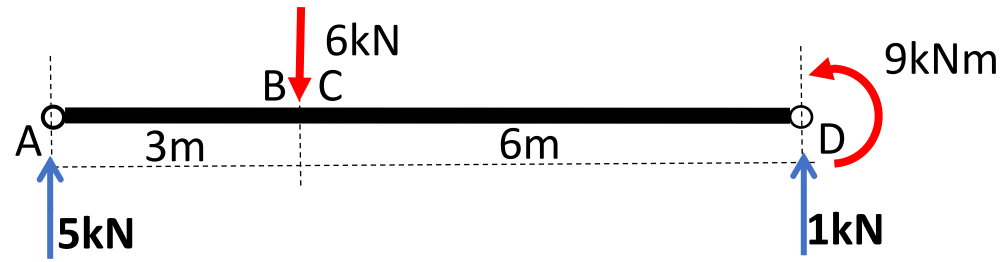
1. *Reações nos apoios*

$$\sum X = 0 = D_x \Longrightarrow \boldsymbol{D_x = 0}$$

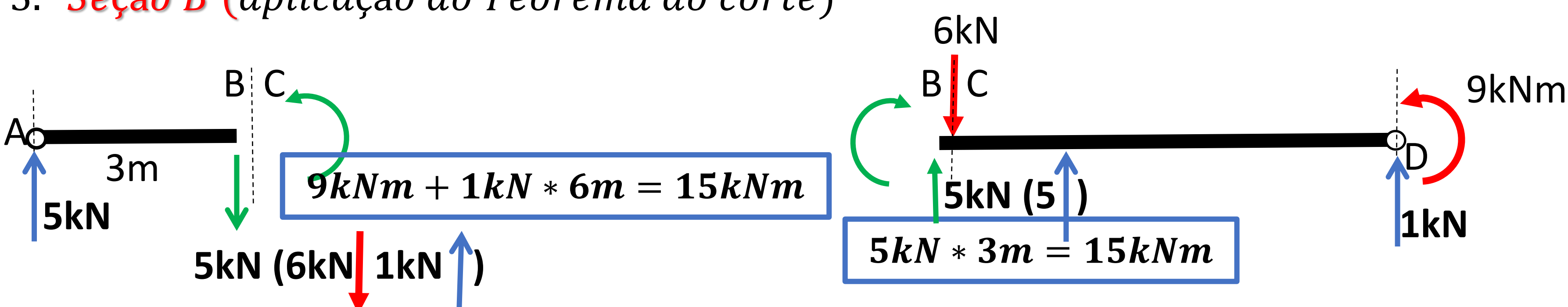
$$\sum M_D = 0 = -A_y * 9 + 6 * 6 + 9 \Longrightarrow \boldsymbol{A_y = 5\ kN}$$

$$\sum Y = 0 = A_y - 6 + D_y \Longrightarrow 5 - 6 + D_y = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{D_y = 1\ kN}$$

2. *Diagrama do corpo livre* ***DCL***

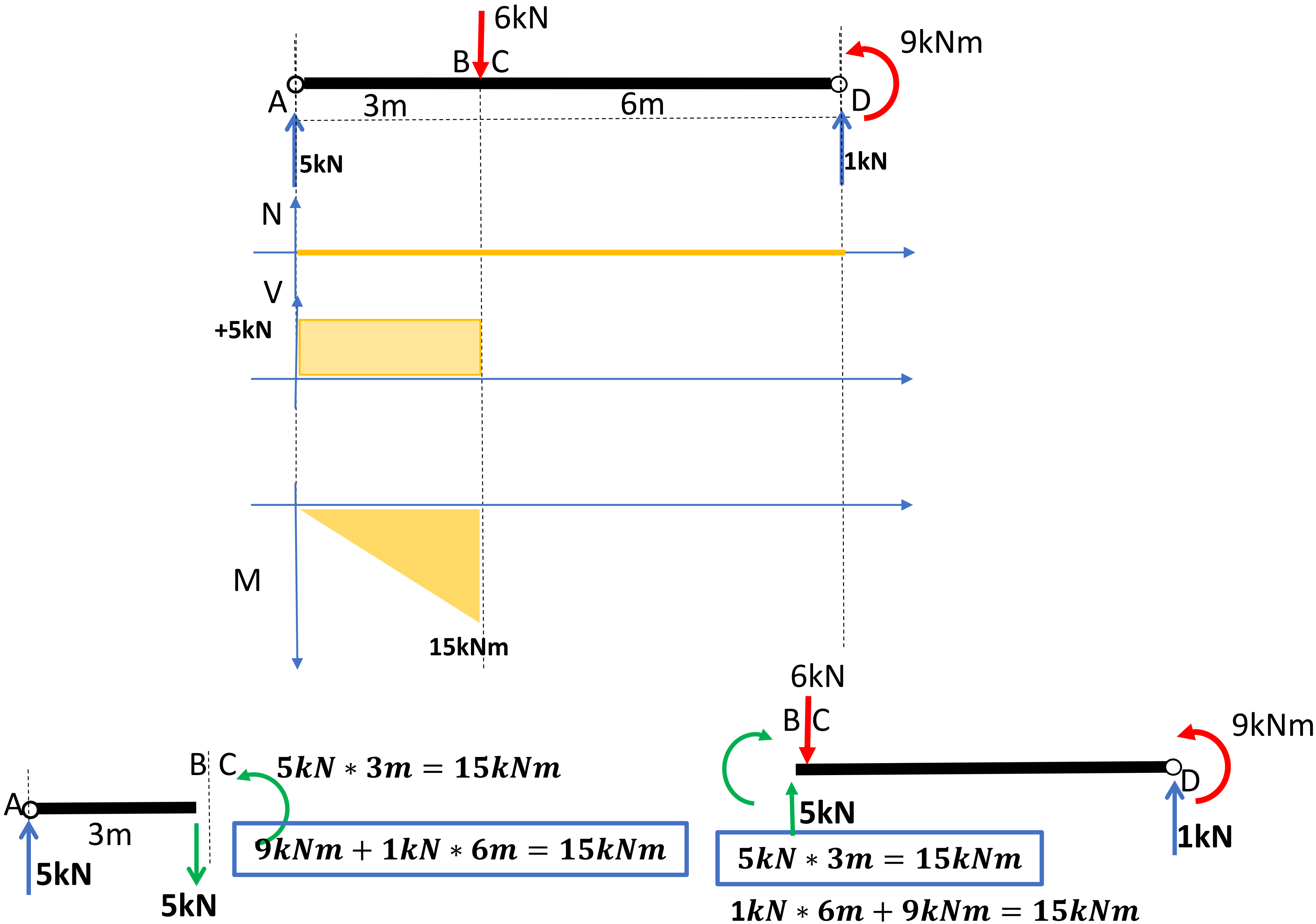


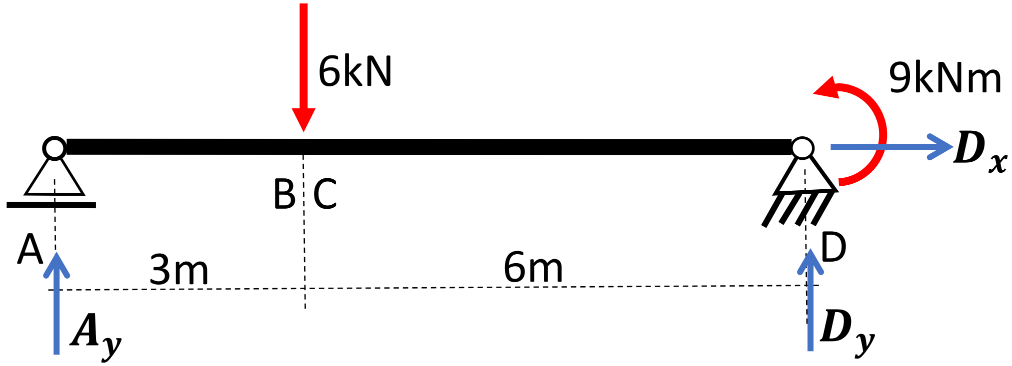
3. *Seção B (aplicação do Teorema do corte)*



Pelo Teorema do corte, divide-se a estrutura apenas em duas partes na seção de interesse

4. *Diagramas dos esforços solicitantes*





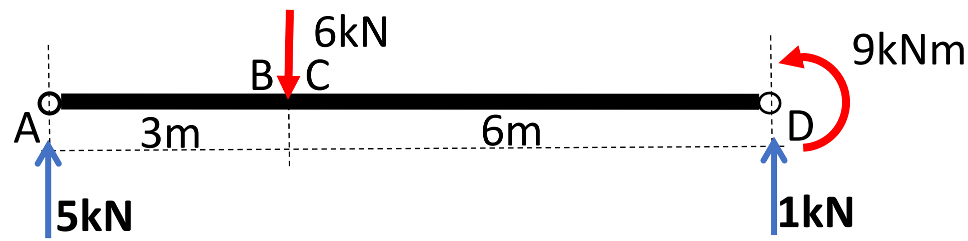
1. *Reações nos apoios*

$$\sum X = 0 = D_x \Longrightarrow \boldsymbol{D_x = 0}$$

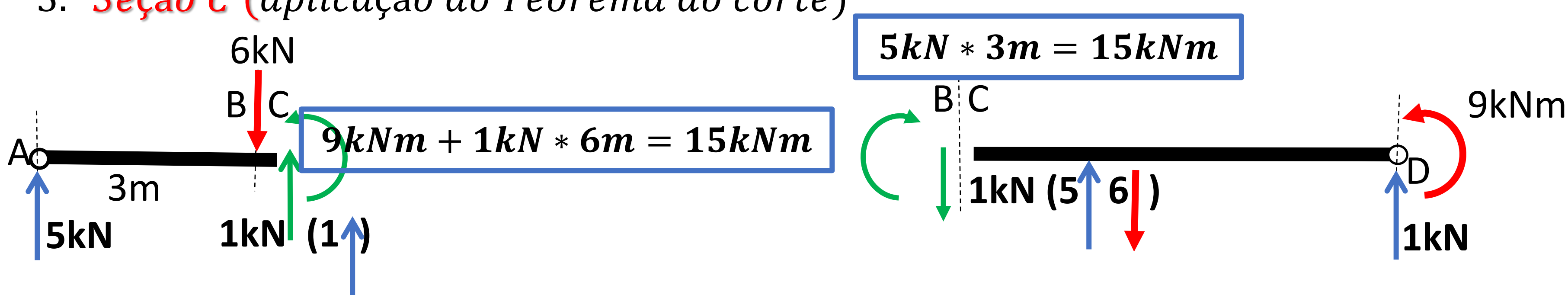
$$\sum M(D) = 0 = -A_y * 9 + 6 * 6 + 9 \Longrightarrow \boldsymbol{A_y = 5\ kN}$$

$$\sum Y = 0 = A_y - 6 + D_y \Longrightarrow 5 - 6 + D_y = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{D_y = 1\ kN}$$

2. *Diagrama do corpo livre* ***DCL***

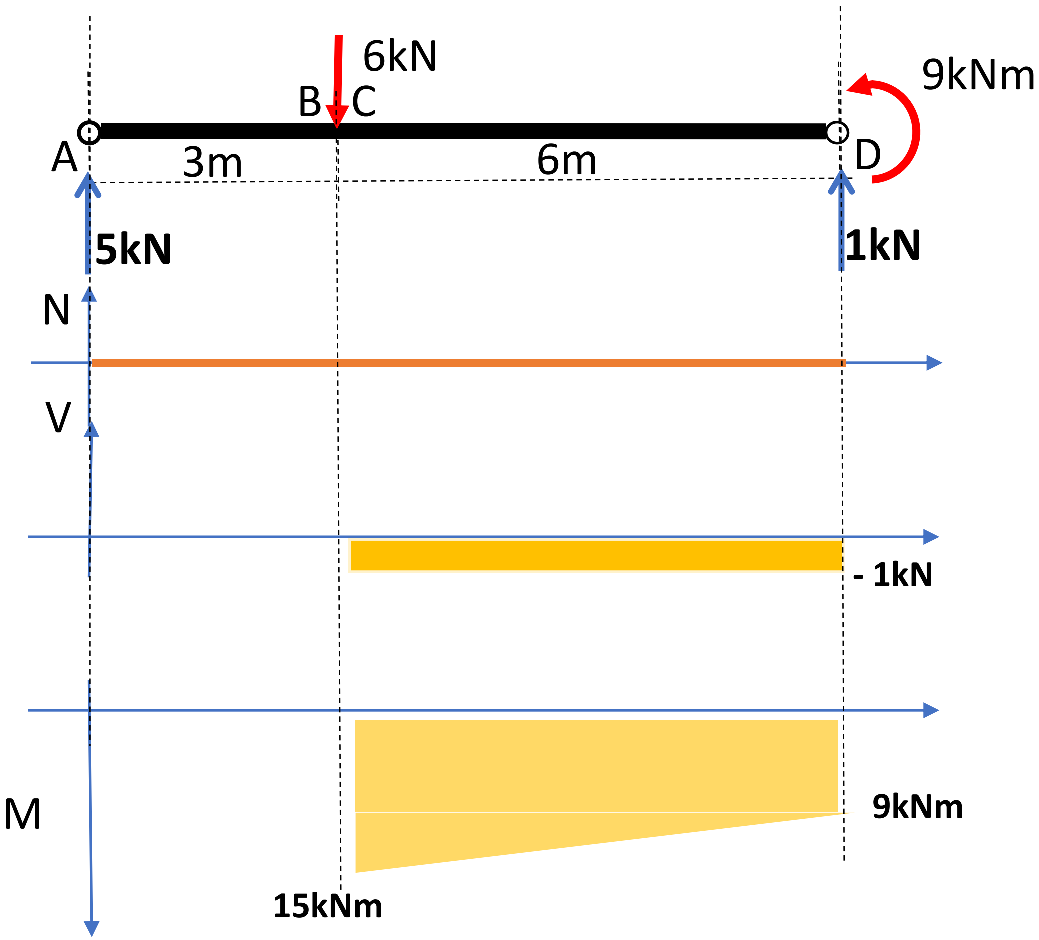


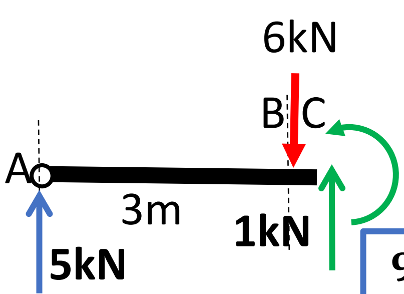
3. *Seção C (aplicação do Teorema do corte)*



Pelo Teorema do corte, divide-se a estrutura apenas em duas partes na seção de interesse

4. *Diagramas dos esforços solicitantes*





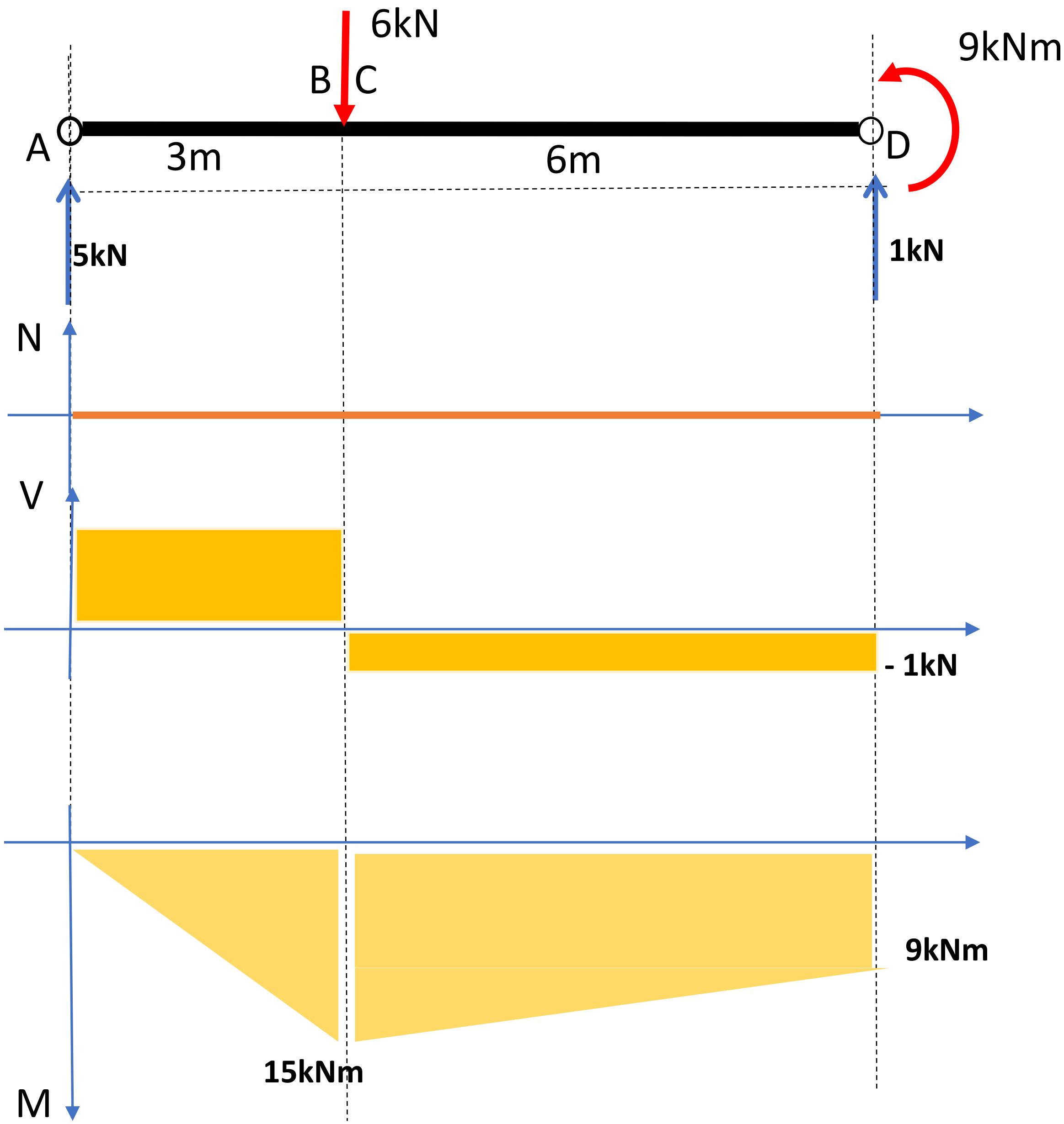
$$5kN * 3m = 15kNm$$

$$\boxed{9kNm + 1kN * 6m = 15kNm}$$

$$\boxed{5kN * 3m = 15kNm}$$

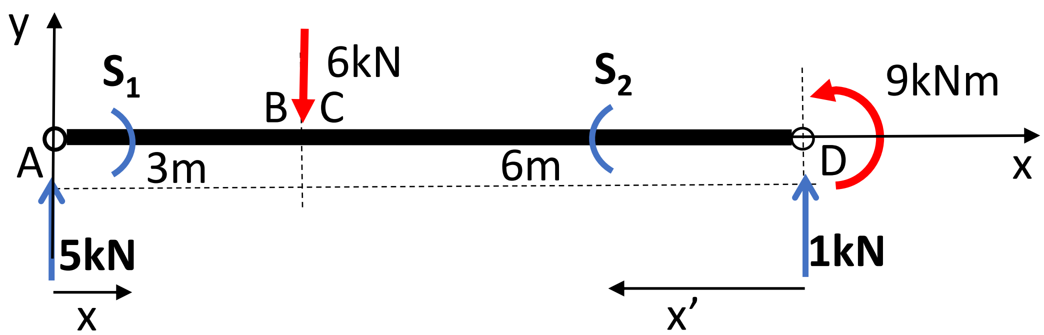
$$1kN * 6m + 9kNm = 15kNm$$

5. *Diagramas dos esforços solicitantes*



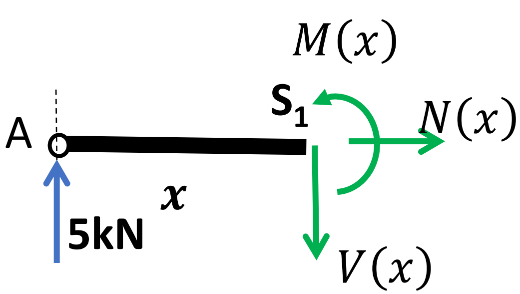
Exercício 3.

Na viga da figura, com os esforços externos ativos de 6kN e 9kNm e esforços externos reativos de 5kN e 1kN, determine as funções dos esforços solicitantes e esboce os seus diagramas



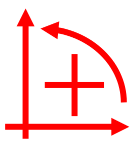
SEÇÃO S_1

1. *Seccionando a viga em* $\boldsymbol{S_1}$, *supondo a existência de* $N(x), V(x), M(x)$ *e impondo o equilíbrio da parte da esquerda tem − se*



$(0 < x < 3)$

$$\sum X = 0 = \boldsymbol{N(x)} \Rightarrow \boldsymbol{N(x)} = \boldsymbol{0}$$

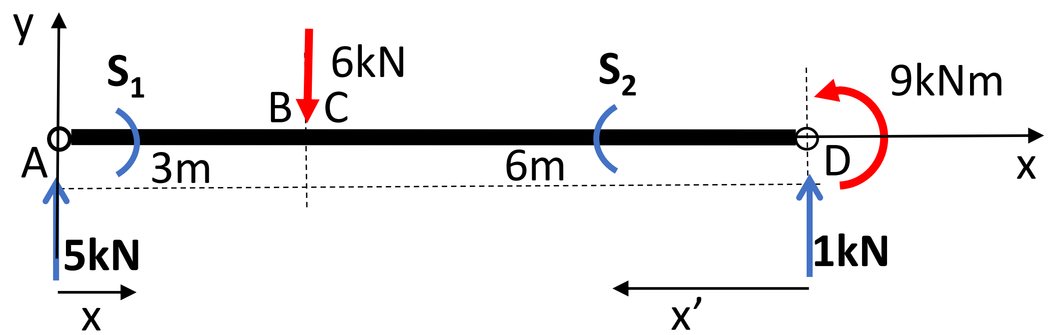


$$\sum M(S_1) = 0 = -5 * x + M(x) \Rightarrow \boldsymbol{M(x) = 5x}$$

$$\sum Y = 0 = 5 - V(x) \Rightarrow \boldsymbol{V(x) = 5}$$

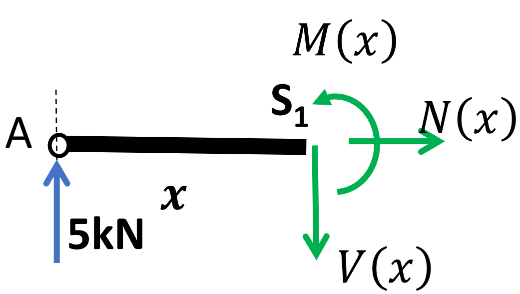
Exercício 3.

Na viga da figura, com os esforços externos ativos de 6kN e 9kNm e esforços externos reativos de 5kN e 1kN, determine as funções dos esforços solicitantes e esboce os seus diagramas



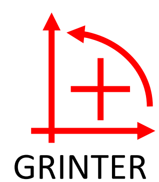
SEÇÃO S_1

1. Seccionando a viga em $\boldsymbol{S_1}$*, supondo a existência de* $N(x), V(x), M(x)$ *e impondo o equilíbrio da parte da esquerda tem − se*



$(0 < x < 3)$

$$\sum X = 0 = N(x) \Rightarrow \boldsymbol{N(x) = 0}$$

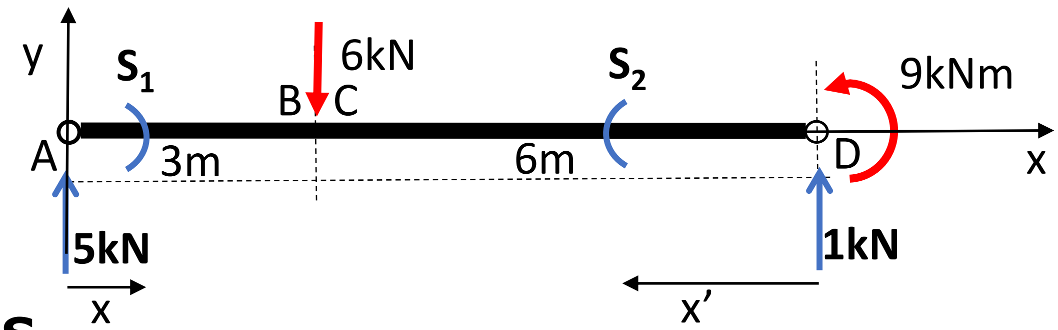


$$\sum M(S_1) = 0 = -5 * x + M(x) \Rightarrow \boldsymbol{M(x) = 5x}$$

$$\sum Y = 0 = 5 - V(x) \Rightarrow \boldsymbol{V(x) = 5}$$

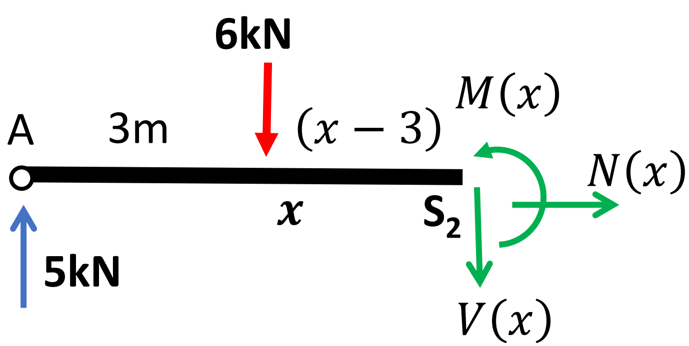
Exercício 3.

Na viga da figura, com os esforços externos ativos de 6kN e 9kNm e esforços externos reativos de 5kN e 1kN, determine as funções dos esforços solicitantes e esboce os seus diagramas

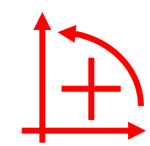


SEÇÃO S_2

2. *Seccionando a viga em* $\boldsymbol{S_2}$, *supondo a existência de* $N(x), V(x), M(x)$ *e impondo o equilíbrio da parte da esquerda tem − se*



$$\sum X = 0 = N(x) \Rightarrow \boldsymbol{N(x) = 0}$$



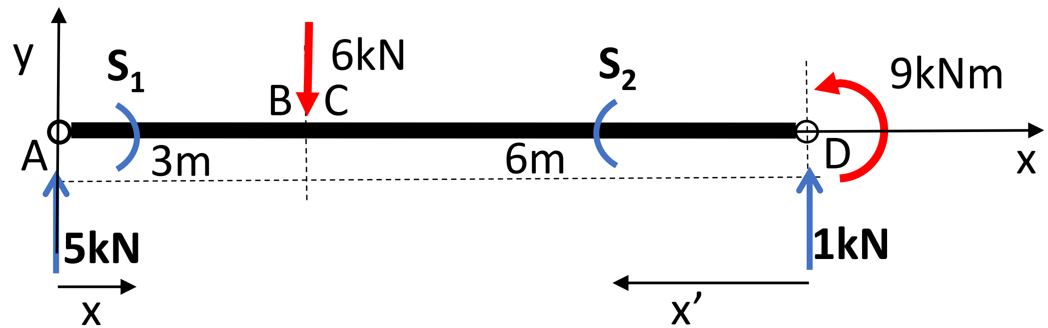
$$\sum Y = 0 = 5 - 6 - V(x) \Rightarrow \boldsymbol{V(x) = -1\ kN}$$

$(3 < x < 9)$

$$\sum M(S_2) = 0 = -5 * x + 6 * (x - 3) + M(x) \Rightarrow \boldsymbol{M(x) = -x + 18}$$

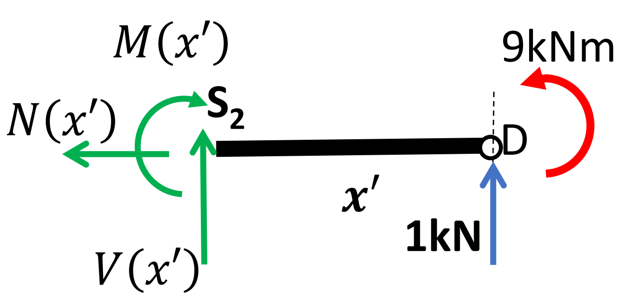
Exercício 3.

Na viga da figura, com os esforços externos ativos de 6kN e 9kNm e esforços externos reativos de 5kN e 1kN, determine as funções dos esforços solicitantes e esboce os seus diagramas



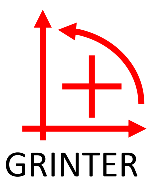
SEÇÃO S_2

3. *Seccionando a viga em* $\boldsymbol{S_2}$ *, supondo a existência de* $N(x'), V(x'), M(x')$ *e impondo o equilíbrio da parte da direita tem − se*



$(0 < x' < 6)$

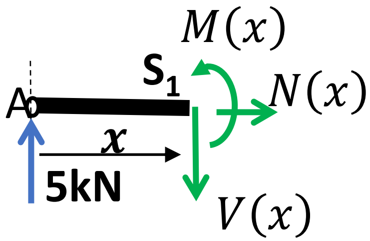
$$\sum X = 0 = -N(x') \Rightarrow \boldsymbol{N(x')} = \boldsymbol{0}$$



$$\sum M(S_2) = 0 = 1 * x' + 9 - M(x') \Rightarrow \boldsymbol{M(x')} = \boldsymbol{x'} + \boldsymbol{9}$$

$$\sum Y = 0 = 1 + V(x') \Rightarrow \boldsymbol{V(x')} = \boldsymbol{-1}$$

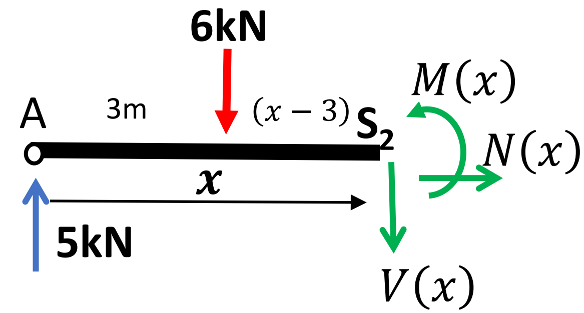
Considerando a variável x com origem em A.



$$N(x) = 0$$

$$V(x) = 5$$

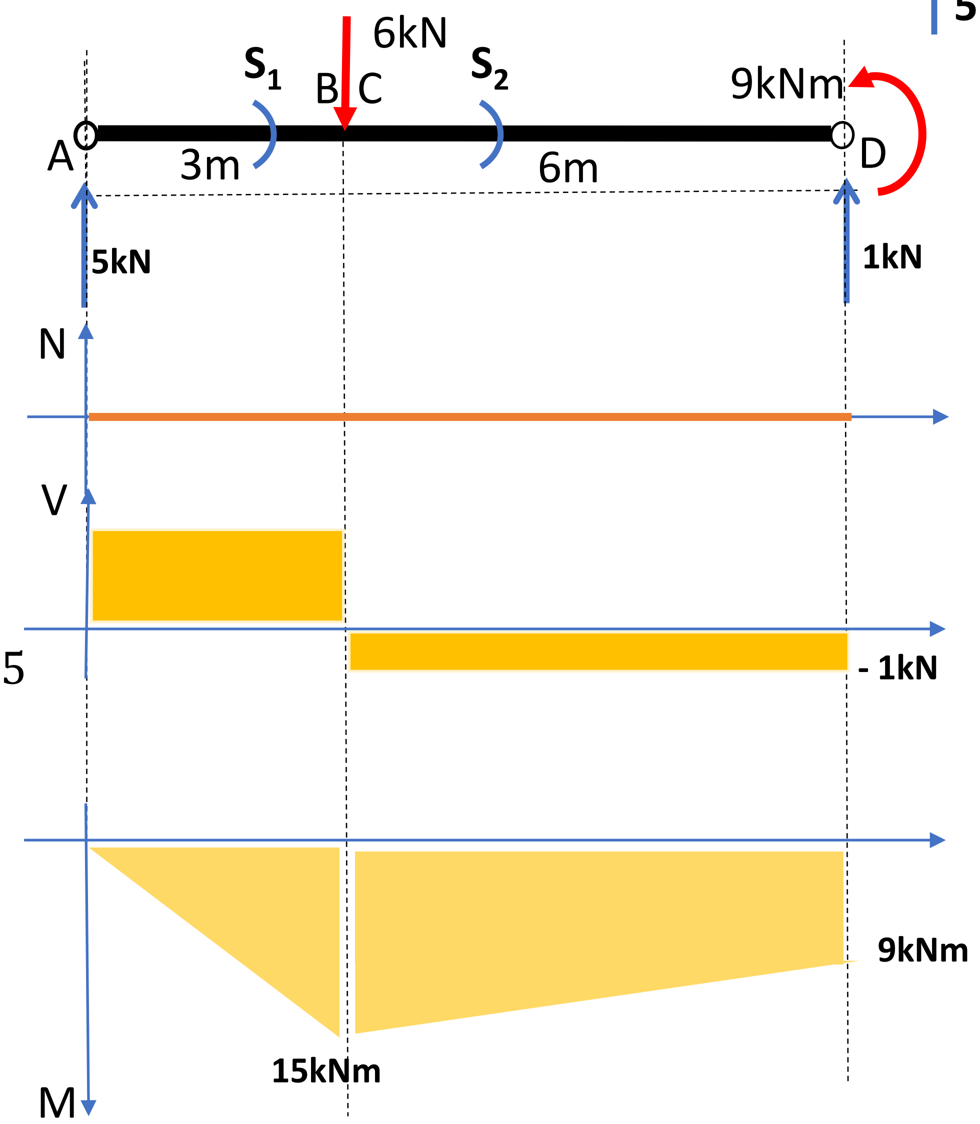
$$M(x) = 5x$$



$$N(x) = 0$$

$$V(x) = -1$$

$$M(x) = -x + 18$$



$$V_B = V(3_-) = 5$$

$$V_A = V(0) = 5$$

$$M_B = M(3_-) = +15$$

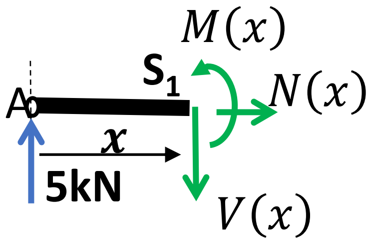
$$M_A = M(0) = 0$$

$$V_C = V(3_+) = -1$$

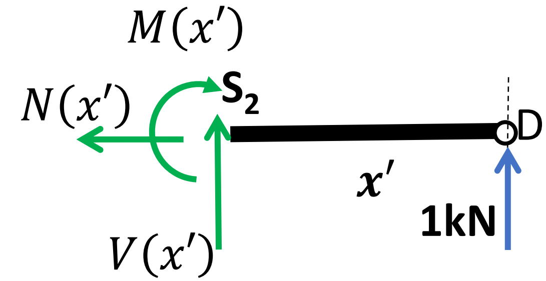
$$V_D = V(9) = -1$$

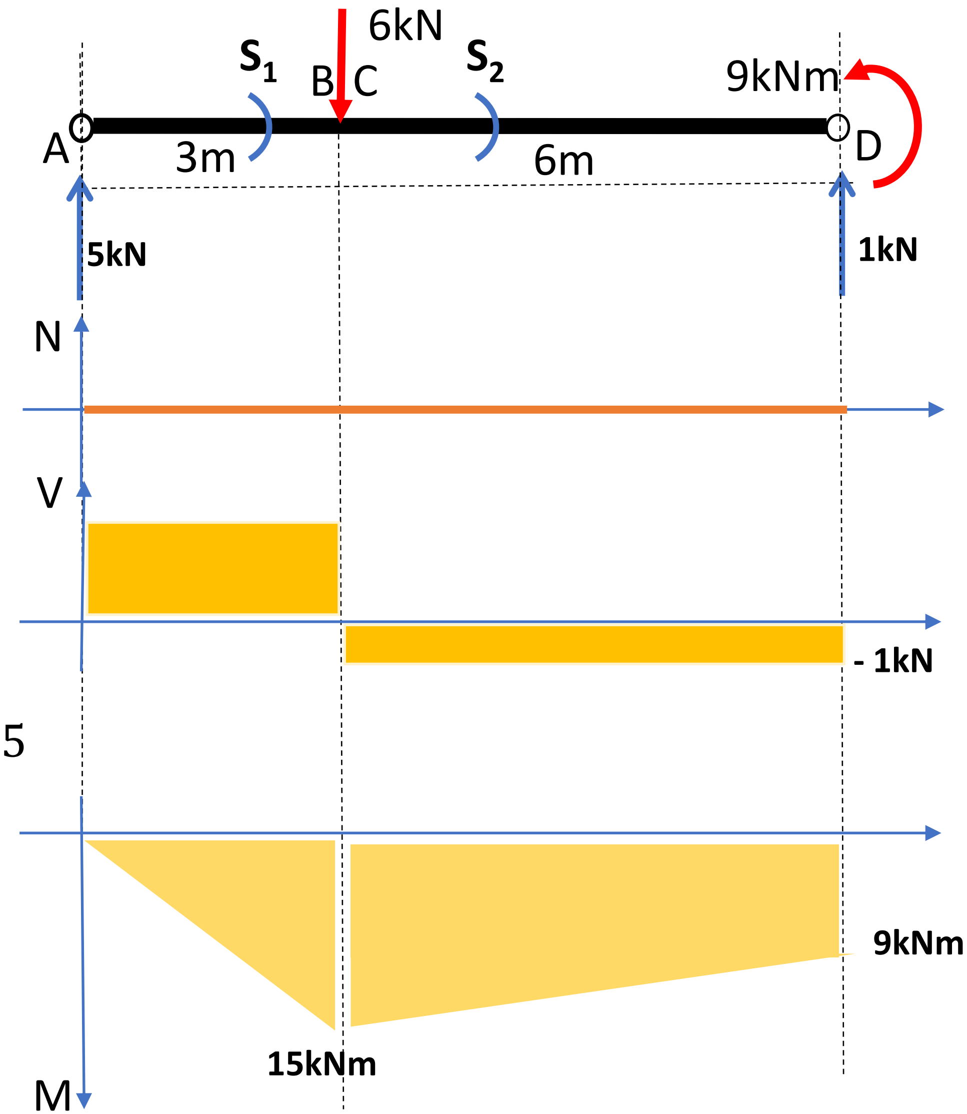
$$M_C = M(3_+) = +15$$

$$M_D = M(9) = +9$$



Considerando a variável x' com origem em D para a seção S_2.





$$\boldsymbol{N(x) = 0}$$

$$\boldsymbol{V(x) = 5}$$

$$\boldsymbol{M(x) = 5x}$$

$$\boldsymbol{N(x') = 0}$$

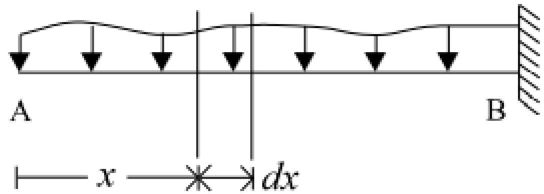
$$\boldsymbol{V(x') = -1}$$

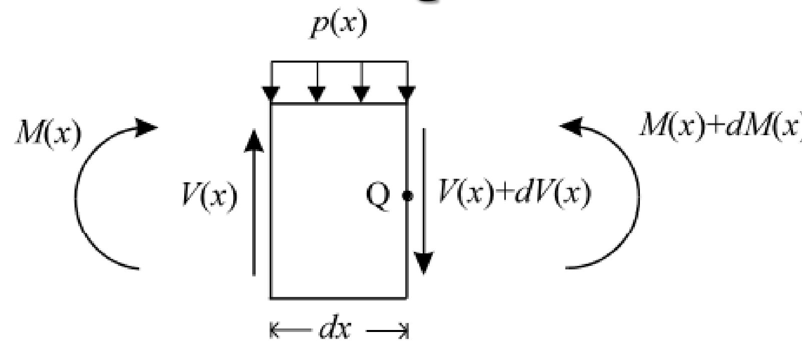
$$\boldsymbol{M(x') = x + 9}$$

$$V_B = V(3_-) = 5$$
$$V_A = V(0) = 5$$
$$M_B = M(3_-) = +15$$
$$M_A = M(0) = 0$$

$$V_D = V(0) = -1$$
$$V_C = V(6_-) = -1$$
$$M_D = M(0) = +9$$
$$M_C = M(6_-) = +15$$

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE EQUILÍBRIO





1. $\sum Y = 0 = V(x) - p(x) * dx - (V(x) + dV(x)) \Longrightarrow \boldsymbol{\frac{dV(x)}{dx} = -p(x)}$
2. $M(S_Q) = 0 = -M(x) - V(x) * dx + p(x) * dx * \frac{dx}{2} + \left(M(x) + dM(x)\right)$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\frac{dM(x)}{dx} = V(x)}$$

GRINTER

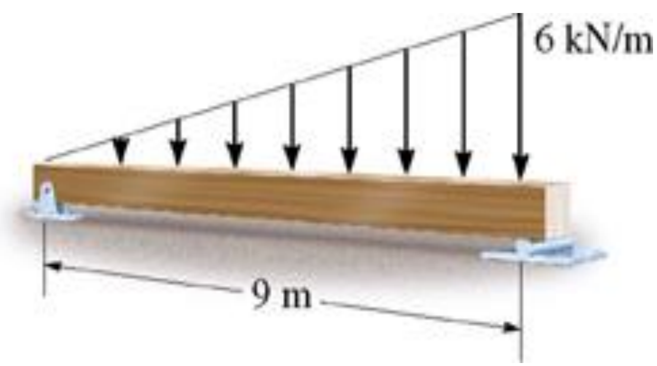
$$\boldsymbol{\frac{dV(x)}{dx} = -p(x)}$$

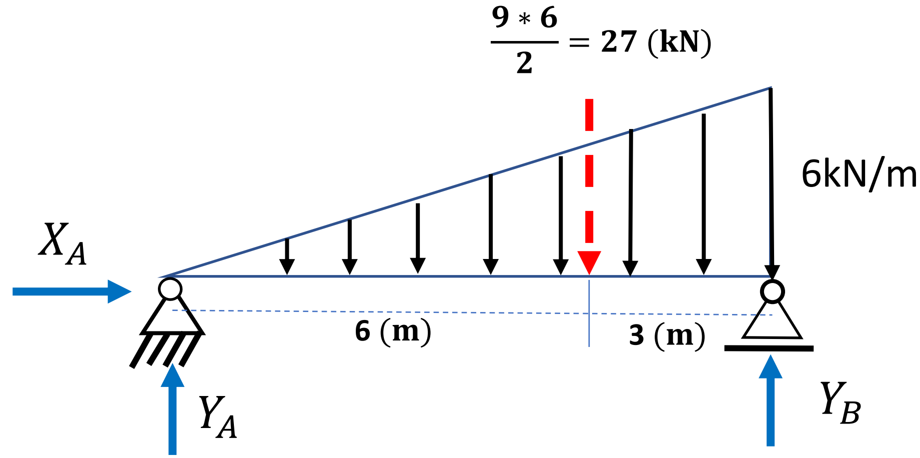
$$\boldsymbol{\frac{dM(x)}{dx} = V(x)}$$

***V* – força cortante**
***M* – momento fletor**
***p* – força distribuída**
x* – origem em *A

Exercício 4.

TRACE OS DIAGRAMAS DOS ESFORÇOS SOLICITANTES DA VIGA DA FIGURA



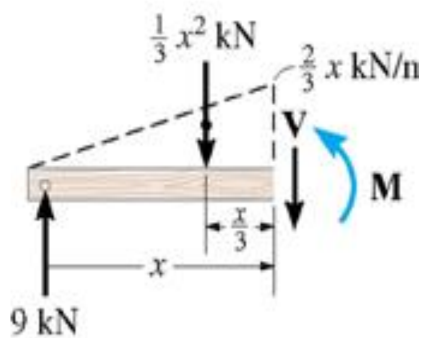


1. *Reações nos apoios*

$\sum X = 0 = X_A \Longrightarrow \boldsymbol{X_A = 0}$

$\sum M(A) = 0 = +Y_B * 9 - 27 * 6 \Longrightarrow \boldsymbol{Y_B = 18\ kN}$

$\sum Y = 0 = Y_A - 27 + Y_B \Longrightarrow Y_A - 27 + 18 = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{Y_A = 9\ kN}$



Ao seccionar a viga e considerando a parte da esquerda, a resultante da força distribuída é $\frac{1}{3}x^2$ *pois*

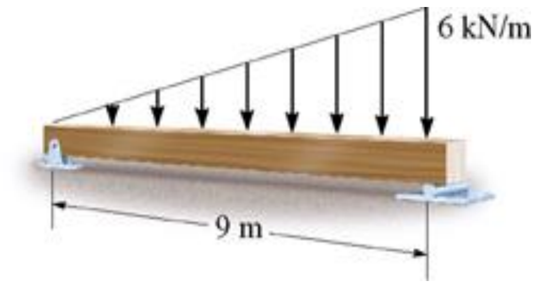
a) $\frac{p(x)}{x} = \frac{6}{9} \Longrightarrow p(x) = \frac{2}{3}x$

b) $R(x) = \int_0^x p(x)d(x) = \int_0^x \frac{2}{3}xd(x) = \frac{2}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right] = \frac{x^2}{3}$

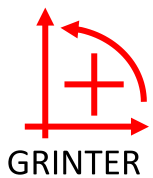
c) *A resultante total é* $R(9) = 27$

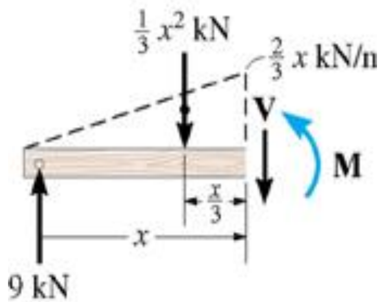
Exercício 4.

TRACE OS DIAGRAMAS DOS ESFORÇOS SOLICITANTES DA VIGA DA FIGURA



$Seccionando\ a\ viga\ a\ x\ m\ da\ articulação\ fixa\ , supondo\ a\ existência\ de\ N(x), V(x),$
$M(x)\ e\ impondo\ o\ equilíbrio\ da\ parte\ da\ esquerda\ tem-se$



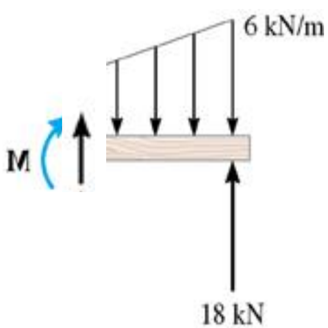


$$\sum X = 0 = N(x) \Rightarrow \boldsymbol{N(x)\ = 0}$$

$$\sum Y = 0 = 9 - \frac{1}{3}x^2 - V(x) \Rightarrow \boldsymbol{V(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 9\ (kN)}$$

$$\sum M(ST) = 0 = -9 * x + \frac{1}{3}x^2 * \frac{x}{3} + M(x) \Rightarrow \boldsymbol{M(x) = -\frac{1}{9}x^3 + 9x}$$

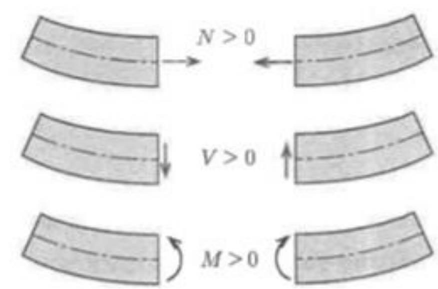
$Seccionando\ a\ viga\ a\ x\ m\ da\ articulação\ fixa\ , e\ reduzindo\ as\ forças\ da\ parte\ da$
$esquerda\ para\ a\ seção\ tem-se$



$$N = 0 \Rightarrow \boldsymbol{N(x)\ = 0}$$

$$V = 9 - \frac{1}{3}x^2 \Rightarrow \boldsymbol{V(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 9}$$

$$M = 9 * x - \frac{1}{3}x^2 * \frac{x}{3} \Rightarrow \boldsymbol{M(x) = -\frac{1}{9}x^3 + 9x}$$

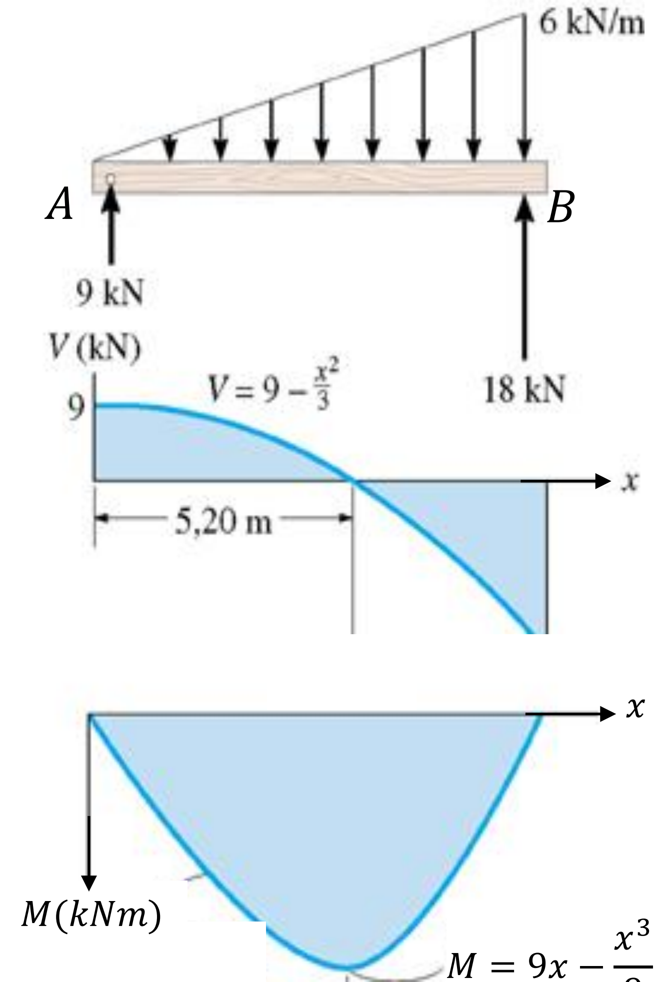


$$\boldsymbol{N(x) = 0}$$
$$\boldsymbol{V(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 9}$$
$$\boldsymbol{M(x) = -\frac{1}{9}x^3 + 9x}$$

$$V_A = V(0) = -\frac{1}{3}.0^2 + 9 = 9$$
$$V_B = V(9) = -\frac{1}{3}.9^2 + 9 = -18$$
$$V(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 9 = 0 \Longrightarrow x = 5{,}2$$

O momento fletor é máximo onde a força cortante é zero porque $\frac{dM(x)}{dx} = V(x)$.

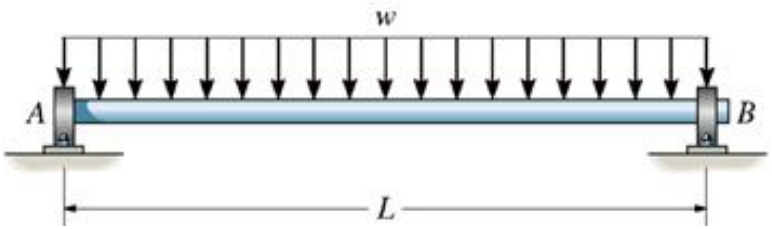
$$M_A = M(0) = -\frac{1}{9}.0^3 + 9.0 = 0$$
$$M_B = M(9) = -\frac{1}{9}.9^3 + 9.9 = 0$$
$$M(5{,}2) = -\frac{1}{9}.(5{,}2)^3 + 9.(5{,}2) = 31{,}2$$

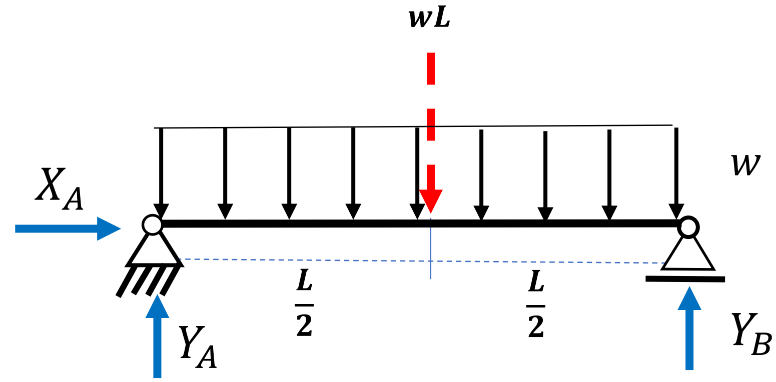


Considerando a variável x com origem em A.

Exercício 5.

TRACE OS DIAGRAMAS DOS ESFORÇOS SOLICITANTES DA VIGA SIMPLESMENTE APOIADA DA FIGURA





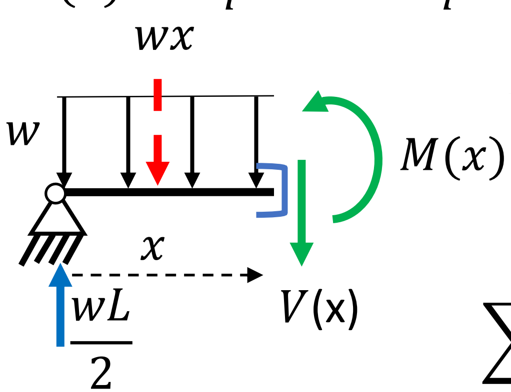
1. *Reações nos apoios*

$$\sum X = 0 = X_A \Longrightarrow \boldsymbol{X_A = 0}$$

$$\sum M(A) = 0 = +Y_B * L - wL * \frac{L}{2} \Longrightarrow \boldsymbol{Y_B = \frac{wL}{2}}$$

$$\sum Y = 0 = Y_A - wL + Y_B \Longrightarrow Y_A - wL + \frac{wL}{2} = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{Y_A = \frac{wL}{2}}$$

Seccionando a viga a x m da articulação fixa, supondo a existência de $N(x), V(x)$, $M(x)$ *e impondo o equilíbrio da parte da esquerda tem − se*



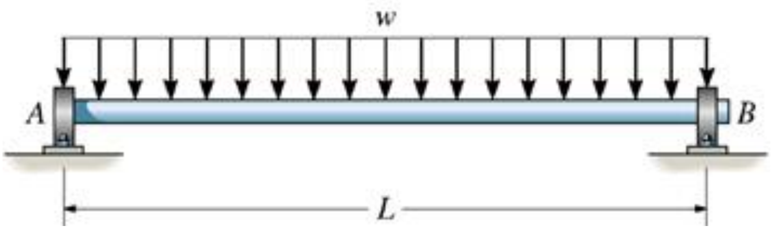
$$\sum X = 0 = N(x) \Longrightarrow \boldsymbol{N(x) = 0}$$

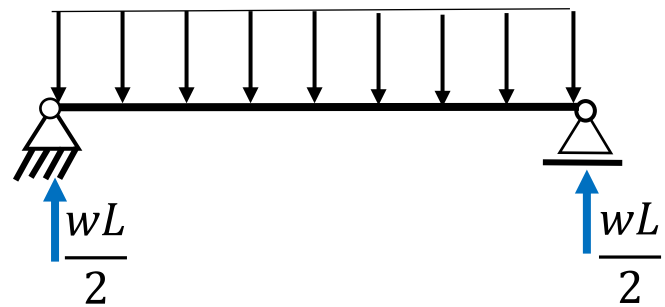
$$\sum Y = 0 = \frac{wL}{2} - wx - V(x) \Longrightarrow \boldsymbol{V(x) = -wx + \frac{wL}{2}}$$

$$\sum M(ST) = 0 = -\frac{wL}{2} * x + wx * \frac{x}{2} + M(x) \Longrightarrow \boldsymbol{M(x) = -\frac{w}{2}x^2 + \frac{wL}{2}x}$$

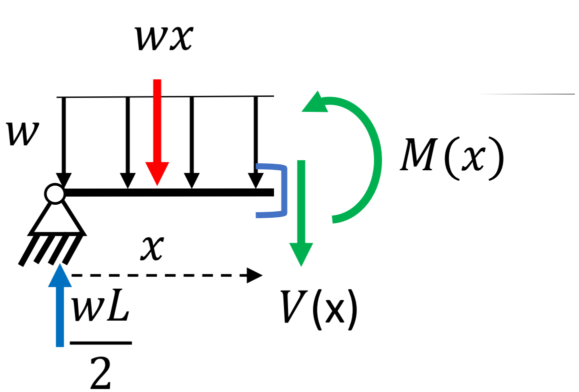
Exercício 5.

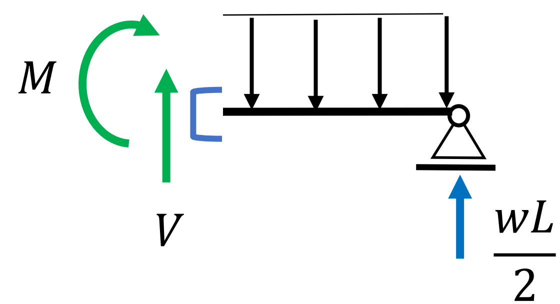
TRACE OS DIAGRAMAS DOS ESFORÇOS SOLICITANTES DA VIGA SIMPLESMENTE APOIADA DA FIGURA





Seccionando a viga a x m da articulação fixa , e reduzindo as forças da parte da esquerda para a seção tem − se

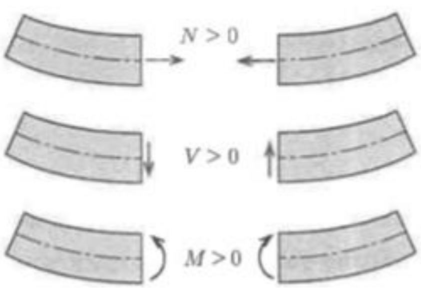




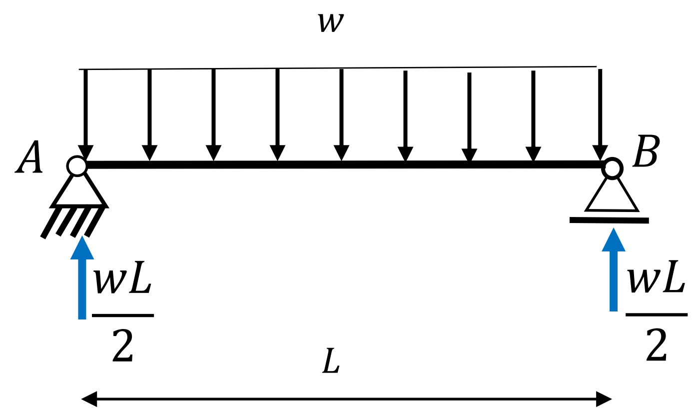
$$N = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{N(x)\ = 0}$$

$$V = \frac{wL}{2} - wx \Longrightarrow \boldsymbol{V(x) = -wx + \frac{wL}{2}}$$

$$M = \frac{wL}{2} * x - wx * \frac{x}{2} \Longrightarrow \boldsymbol{M(x) = -\frac{w}{2}x^2 + \frac{wL}{2}x}$$



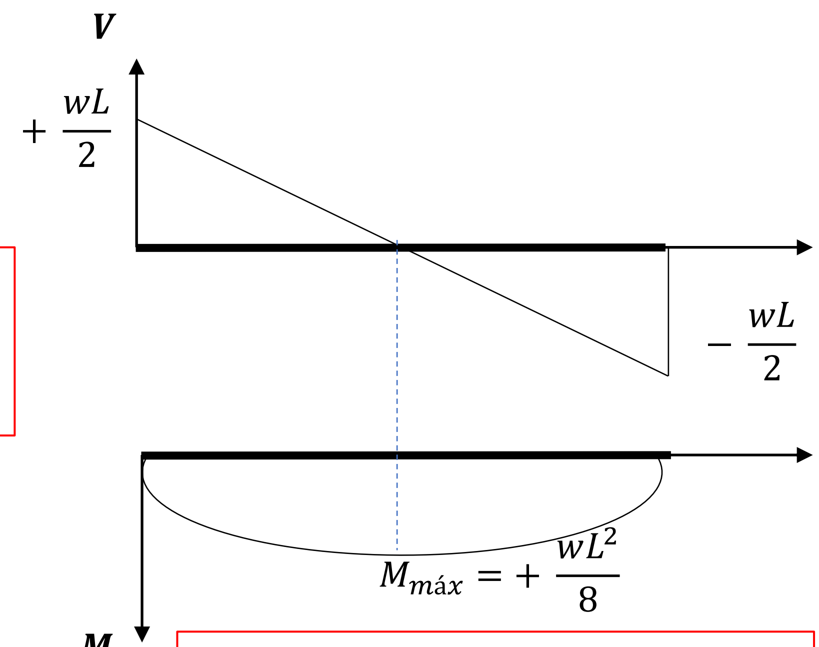
$$\boldsymbol{N(x) = 0}$$
$$\boldsymbol{V(x) = -wx + \frac{wL}{2}}$$
$$\boldsymbol{M(x) = -\frac{w}{2}x^2 + \frac{wL}{2}x}$$



$$V_A = V(0) = -w.0 + \frac{wL}{2} \Longrightarrow \boldsymbol{V(0) = +\frac{wL}{2}}$$
$$V_B = V(L) = -w.L + \frac{wL}{2} \Longrightarrow \boldsymbol{V(0) = -\frac{wL}{2}}$$
$$V(x) = -wx + \frac{wL}{2} = 0 \Longrightarrow x = \frac{L}{2}$$

O momento fletor é máximo onde a força cortante é zero porque $\frac{dM(x)}{dx} = V(x)$.

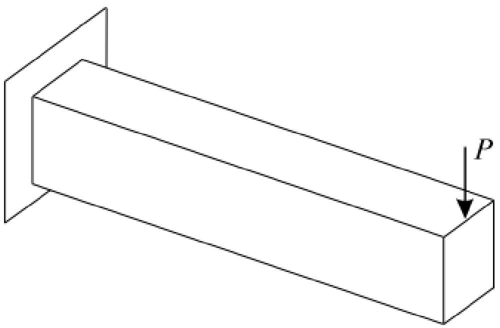
$$M_A = M(0) = -\frac{w}{2}.0^2 + \frac{wL}{2}.0 \Longrightarrow \boldsymbol{M(0) = 0}$$
$$M_B = M(L) = -\frac{w}{2}.L^2 + \frac{wL}{2}L \Longrightarrow \boldsymbol{M(L) = 0}$$
$$M\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{w}{2}.\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{wL}{2}.\left(\frac{L}{2}\right) \Longrightarrow \boldsymbol{M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{wL^2}{8}}$$



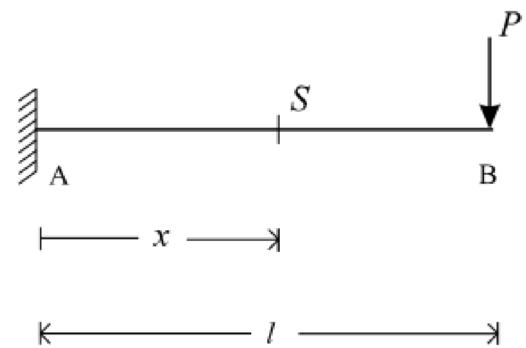
Considerando a variável x com origem em A.

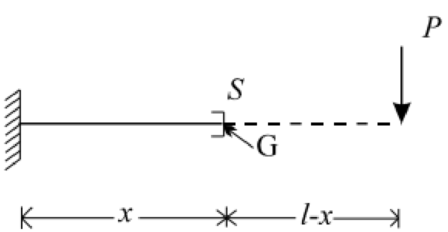
Exercício 6.

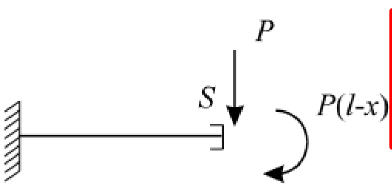
Esboce os diagramas dos esforços solicitantes da viga em balanço da figura



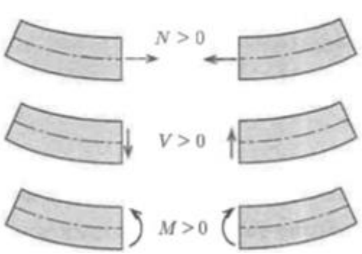
$$V_A = V(0) = P$$
$$V_B = V(l) = P$$
$$M_A = M(0) = -Pl$$
$$M_B = M(l) = 0$$

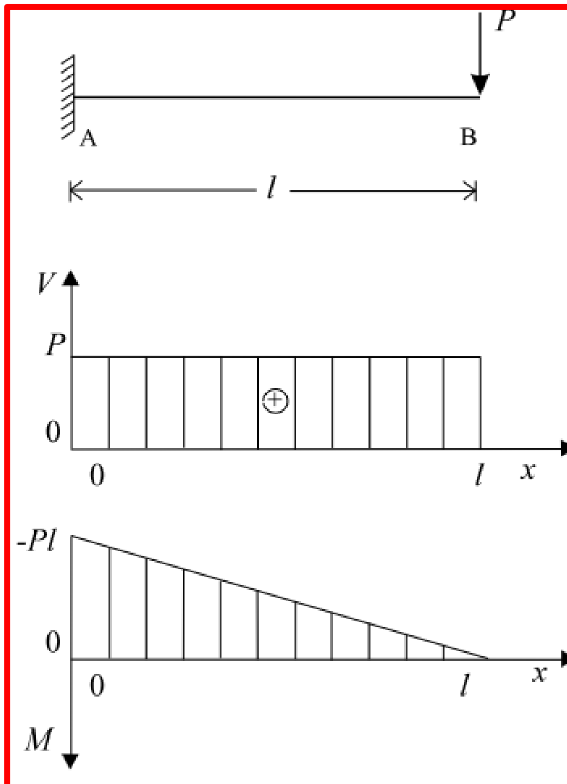






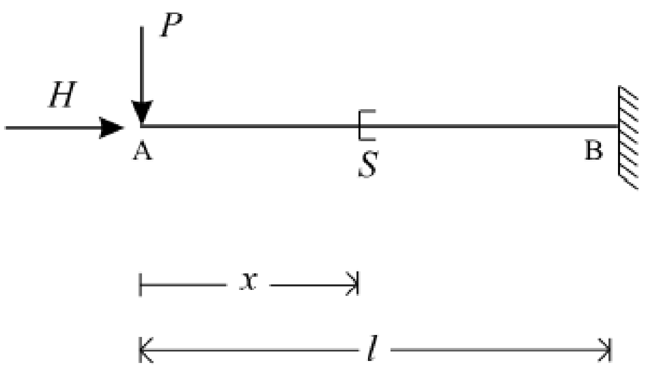
$$\boldsymbol{V(x) = P}$$
$$\boldsymbol{M(x) = -P(l - x)}$$



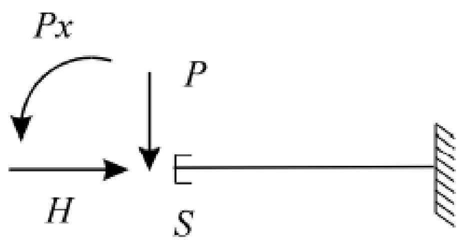


Exercício 7.

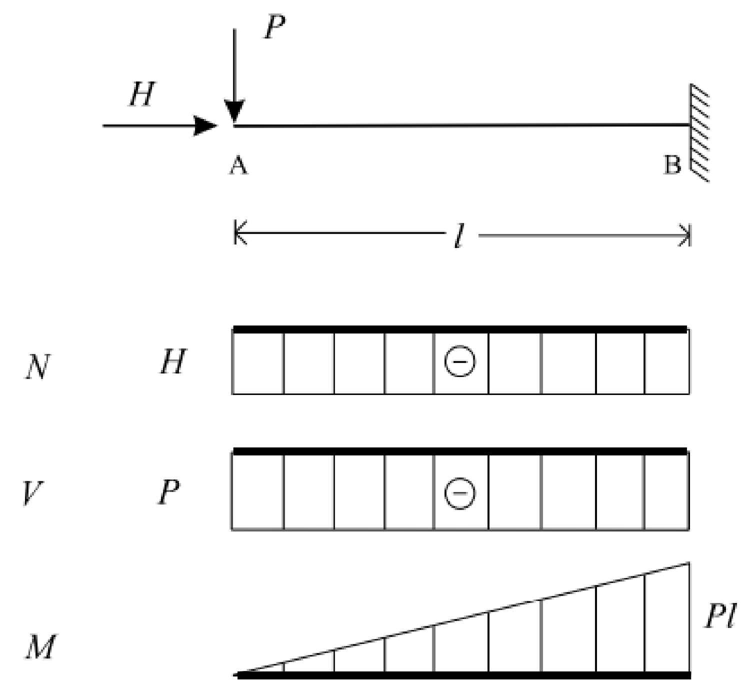
ESBOCE OS DIAGRAMAS DOS ESFORÇOS SOLICITANTES DA VIGA EM BALANÇO DA FIGURA

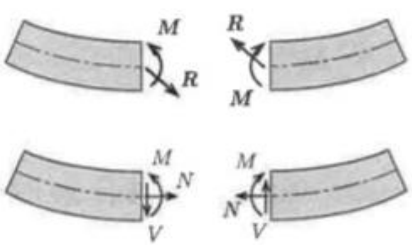


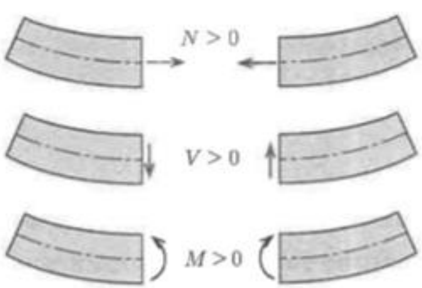
$$N(0) = -H$$
$$N(l) = -H$$
$$V(0) = -P$$
$$V(l) = -P$$
$$M(0) = 0$$
$$M(l) = -Pl$$



$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{N(x)} &= \boldsymbol{-H} \\ \boldsymbol{V(x)} &= \boldsymbol{-P} \\ \boldsymbol{M(x)} &= \boldsymbol{-Px} \end{aligned}}$$

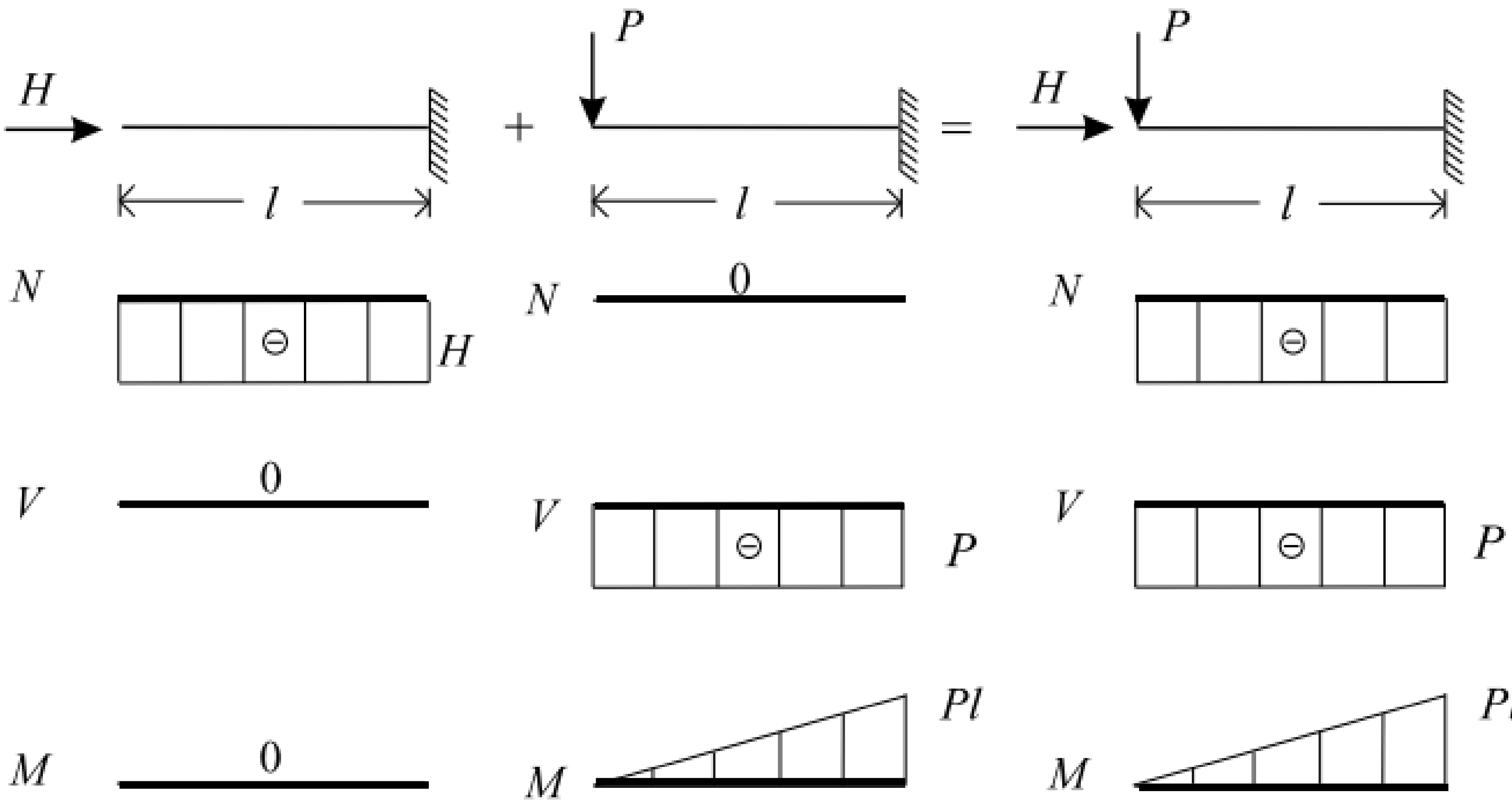






Fonte: Lindenberg Neto, H. Introdução à Mecânica das estruturas, apostila Epusp, São Paulo, 1997

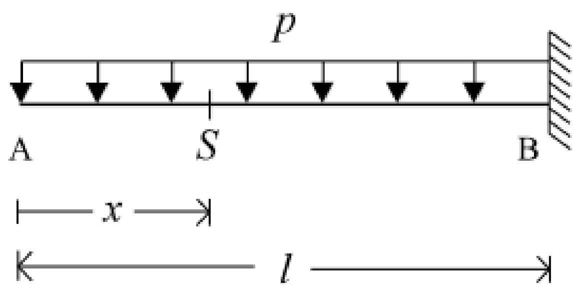
PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO DE EFEITOS

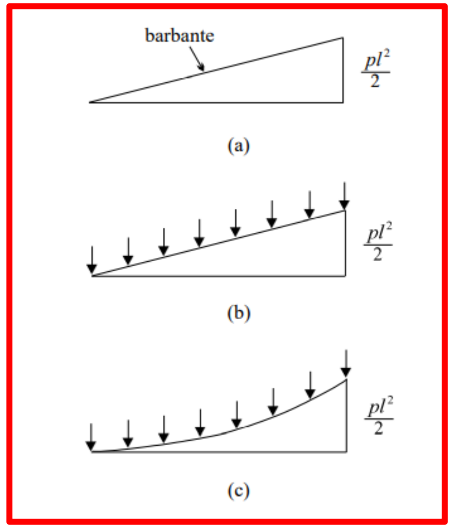


Fonte: Lindenberg Neto, H. Introdução à Mecânica das estruturas, apostila Epusp, São Paulo, 1997

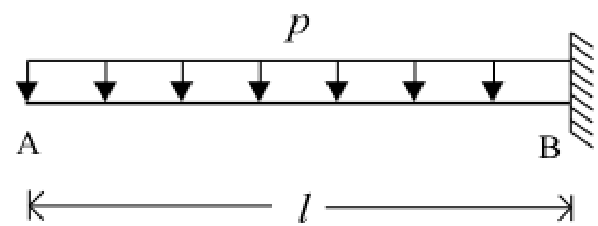
Exercício 8.

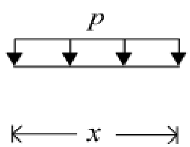
TRACE OS DIAGRAMAS DOS ESFORÇOS SOLICITANTES DA VIGA EM BALANÇO DA FIGURA



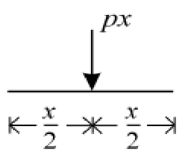


$$V(0) = 0$$
$$V(l) = -p.l$$
$$M(0) = 0$$
$$M(l) = -\frac{p.l^2}{2}$$

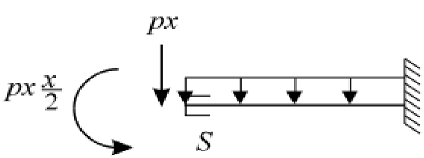




(a)



(b)

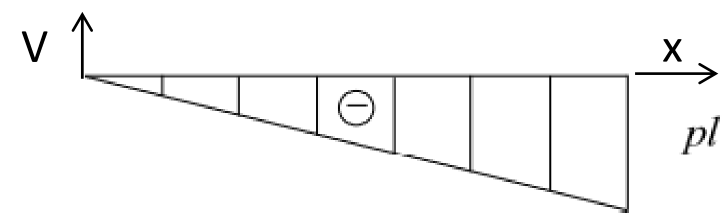


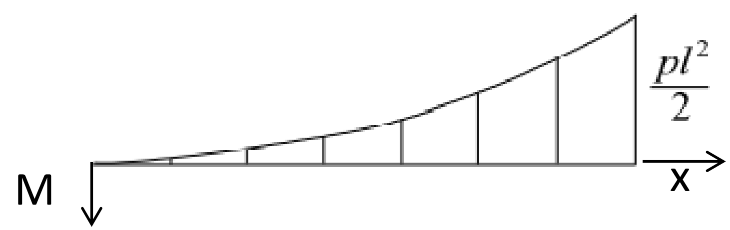
(c)

$$\frac{dV(x)}{dx} = -p(x)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x)$$

$$N(x) = 0$$
$$V(x) = -px$$
$$M(x) = \frac{-px^2}{2}$$





Fonte: Lindenberg Neto, H. Introdução à Mecânica das estruturas, apostila Epusp, São Paulo, 1997

Exercício 9.

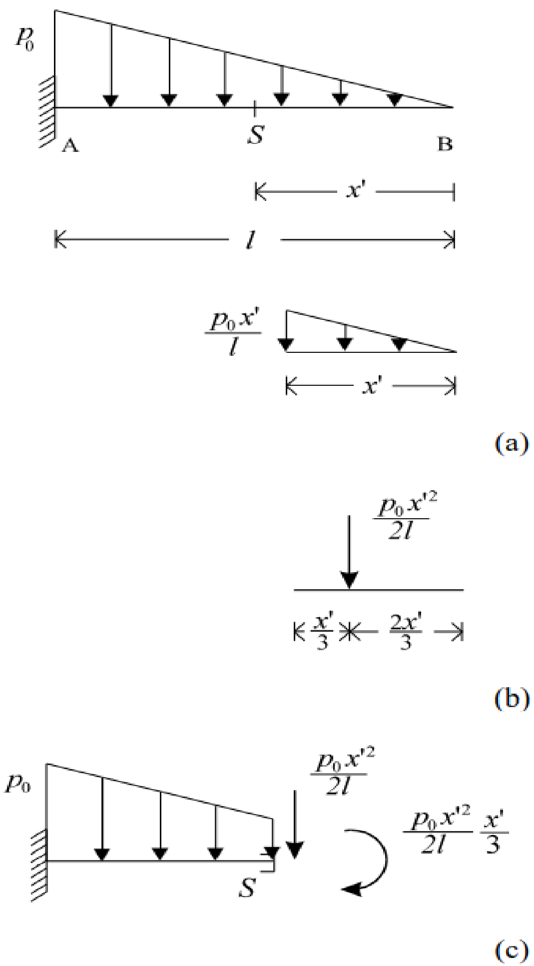
TRACE OS DIAGRAMAS DOS ESFORÇOS SOLICITANTES DA VIGA EM BALANÇO DA FIGURA

$$V(0) = 0$$

$$V(l) = \frac{p_0 l}{2}$$

$$M(0) = 0$$

$$M(l) = -\frac{p_0 . l^2}{6}$$

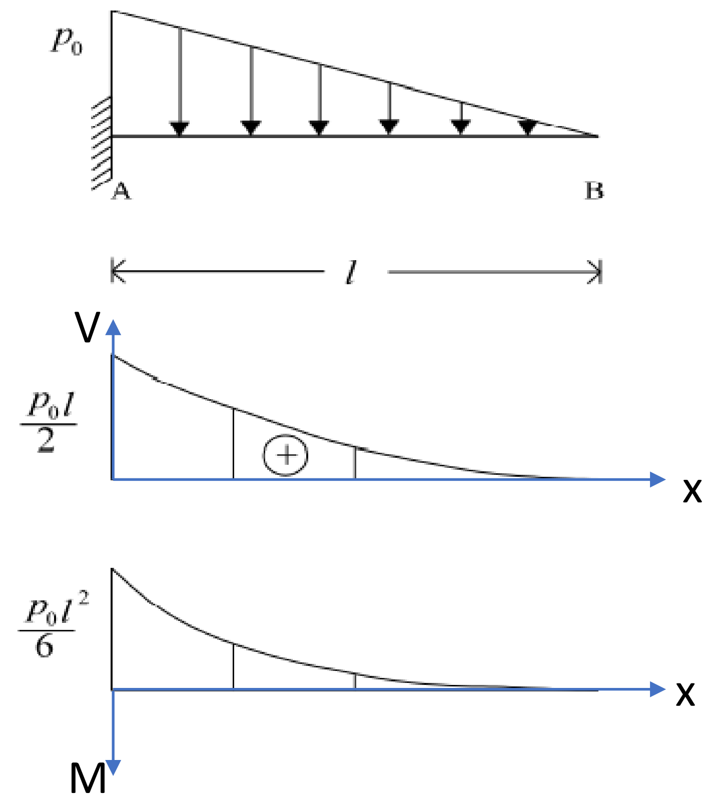


$$\boxed{\frac{dV(x)}{dx} = -p(x)}$$

$$\boxed{\frac{dM(x)}{dx} = V(x)}$$

$$V(x') = \frac{p_0 (x')^2}{2l}$$

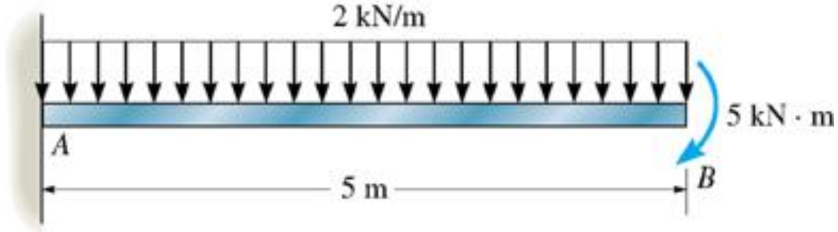
$$M(x') = \frac{-p_0 (x')^3}{6l}$$

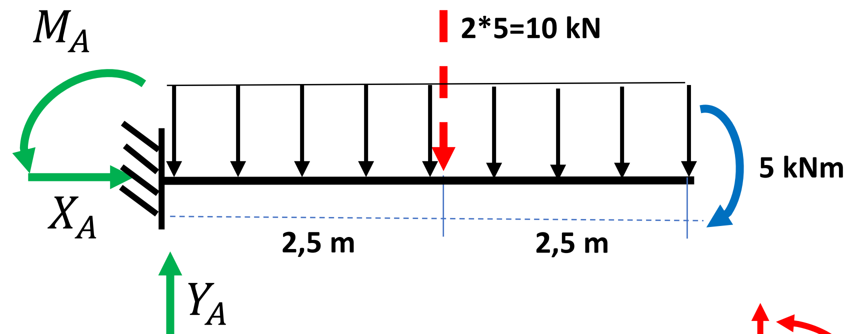


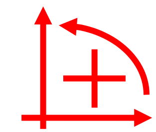
Fonte: Lindenberg Neto, H. Introdução à Mecânica das estruturas, apostila Epusp, São Paulo, 1997

Exercício 10.

Trace os diagramas dos esforços solicitantes da viga em balanço da figura







1. *Reações nos apoios*

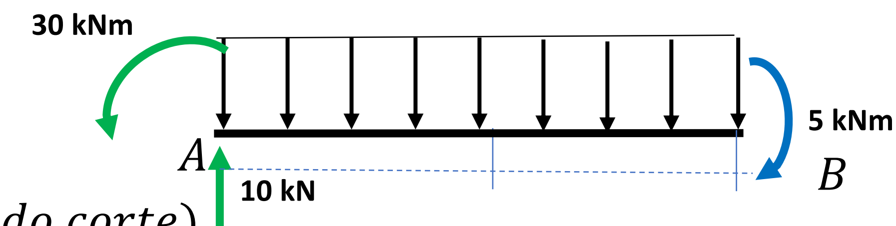
$\sum X = 0 = X_A \Longrightarrow \boldsymbol{X_A = 0}$

$\sum M_{(A)} = 0 = M_A - 10 * 2{,}5 - 5 \Longrightarrow \boldsymbol{M_A = 30\ kNm}$

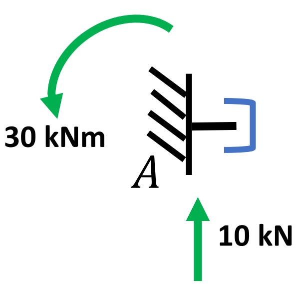
$\sum Y = 0 = Y_A - 10 \Longrightarrow \boldsymbol{Y_A = 10\ kN}$

No equilíbrio, convenção de GRINTER

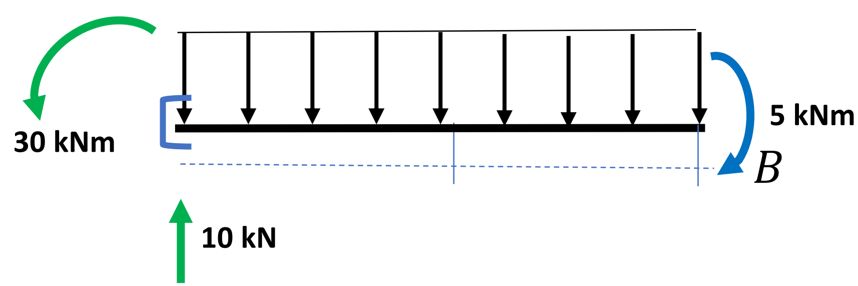
2. *Diagrama do corpo livre* ($\boldsymbol{DCL}$)



3. *Seção* A_+ *(aplicação do Teorema do corte)*

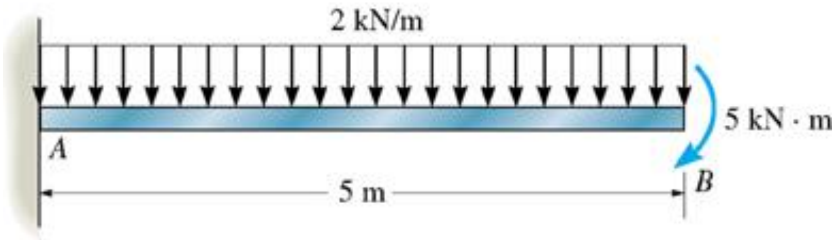


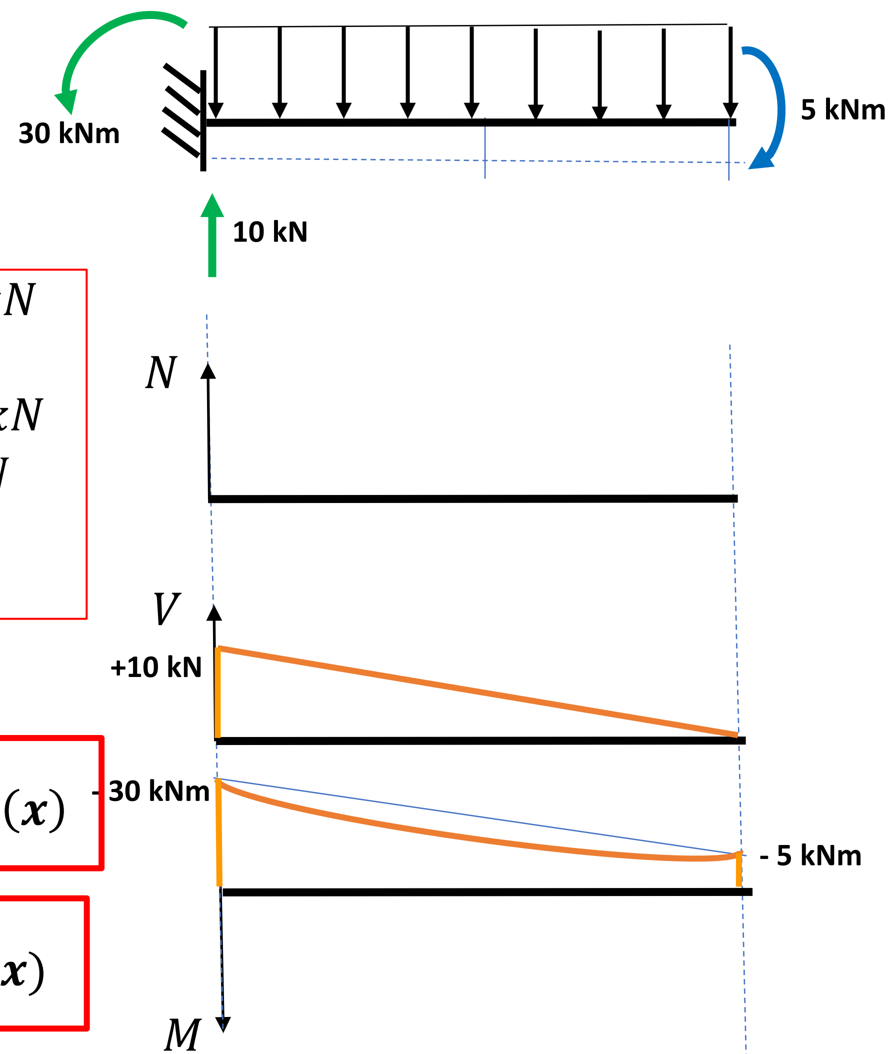
$V_A = +10\ kN$
$V_B = 0\ kN$
$M_A = -30\ kN$
$M_B = -5\ kN$
$N_A = 0\ kN$
$N_B = 0\ kN$



Exercício 10.

TRACE OS DIAGRAMAS DOS ESFORÇOS SOLICITANTES DA VIGA EM BALANÇO DA FIGURA





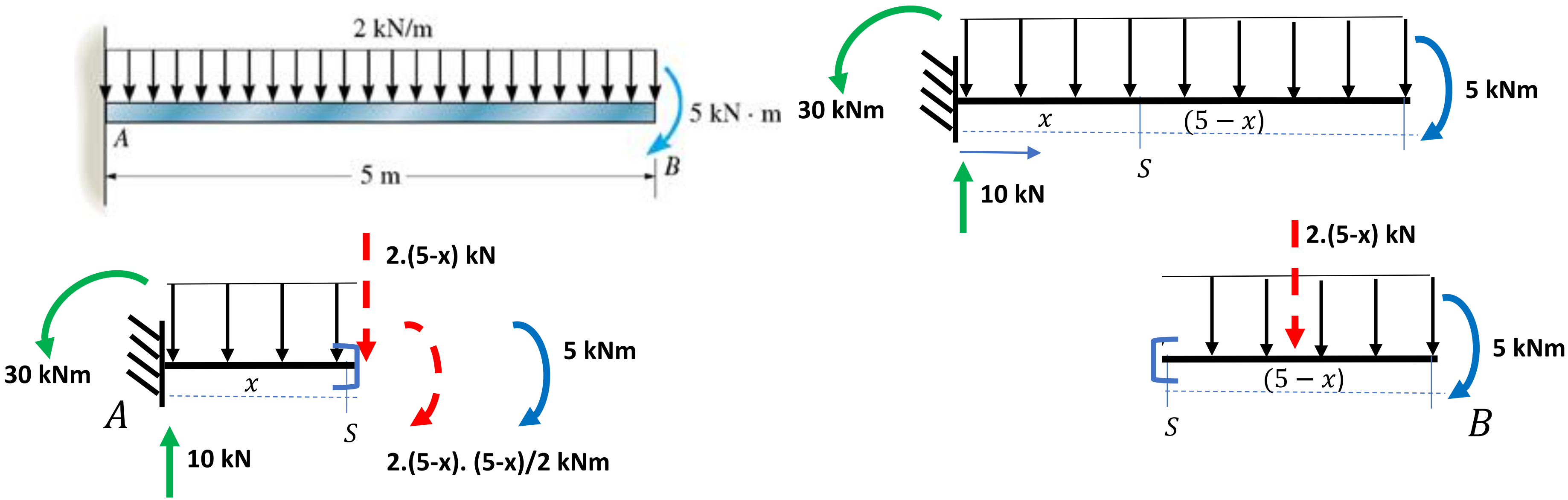
$$V_A = +10\ kN$$
$$V_B = 0\ kN$$
$$M_A = -30\ kN$$
$$M_B = -5\ kN$$
$$N_A = 0\ kN$$
$$N_B = 0\ kN$$

$$\boxed{\frac{dV(x)}{dx} = -p(x)}$$

$$\boxed{\frac{dM(x)}{dx} = V(x)}$$

Exercício 11.

Trace os diagramas dos esforços solicitantes da viga em balanço da figura a partir das funções que os caracterizem



$$V(x) = 2 * (5 - x)\ kN$$

$$\boxed{V(x) = (10 - 2x)\ kN}$$

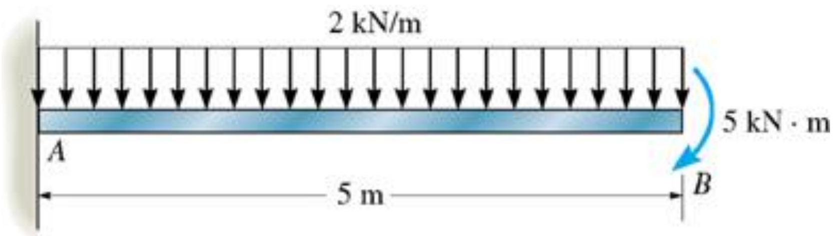
$$M(x) = \left[-2 * (5 - x) * \frac{(5 - x)}{2} - 5\right] kNm$$

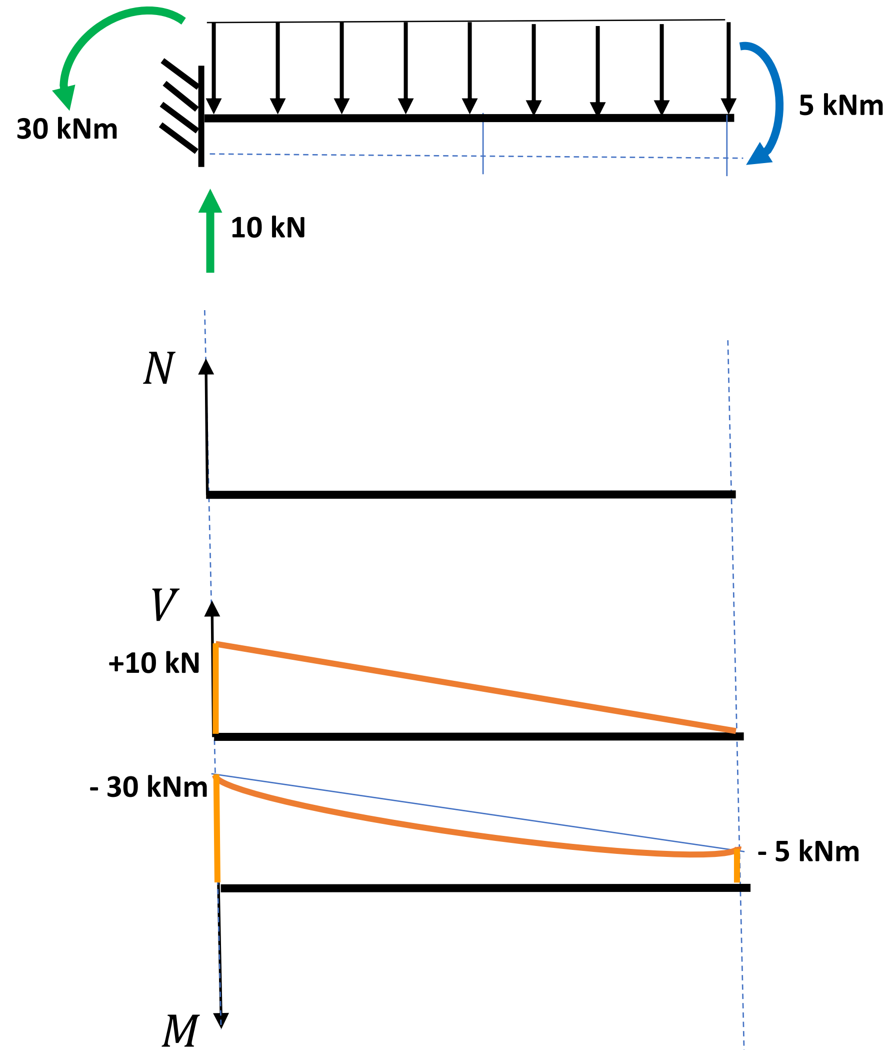
$$\boxed{M(x) = (-x^2 + 10x - 30)\ \ kNm}$$

$$\boxed{\begin{aligned} V_A &= V(0) = +10\ kN \\ V_B &= V(5) = 0\ kN \\ M_A &= M(0) = -30\ kN \\ M_B &= M(5) = -5\ kN \\ N_A &= 0\ kN \\ N_B &= 0\ kN \end{aligned}}$$

Exercício 11.

Trace os diagramas dos esforços solicitantes da viga em balanço da figura





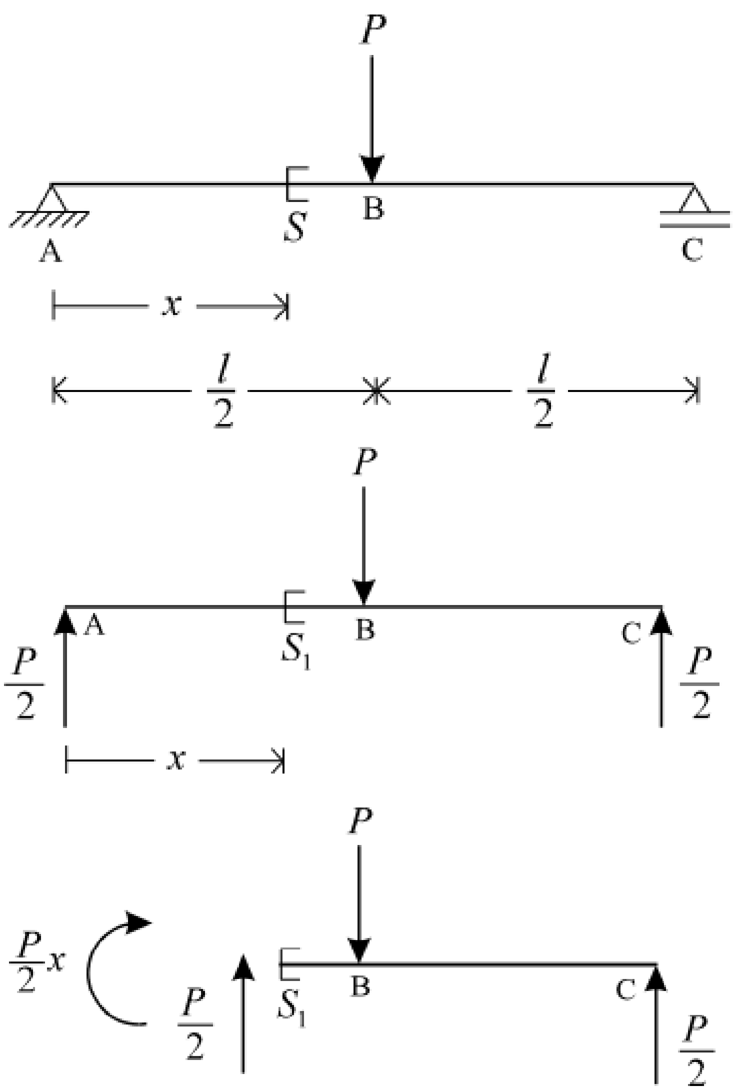
$$V_A = V(0) = +10\ kN$$
$$V_B = V(5) = 0\ kN$$
$$M_A = M(0) = -30\ kN$$
$$M_B = M(5) = -5\ kN$$
$$N_A = 0\ kN$$
$$N_B = 0\ kN$$

$$V(x) = (10 - 2x)\ kN$$

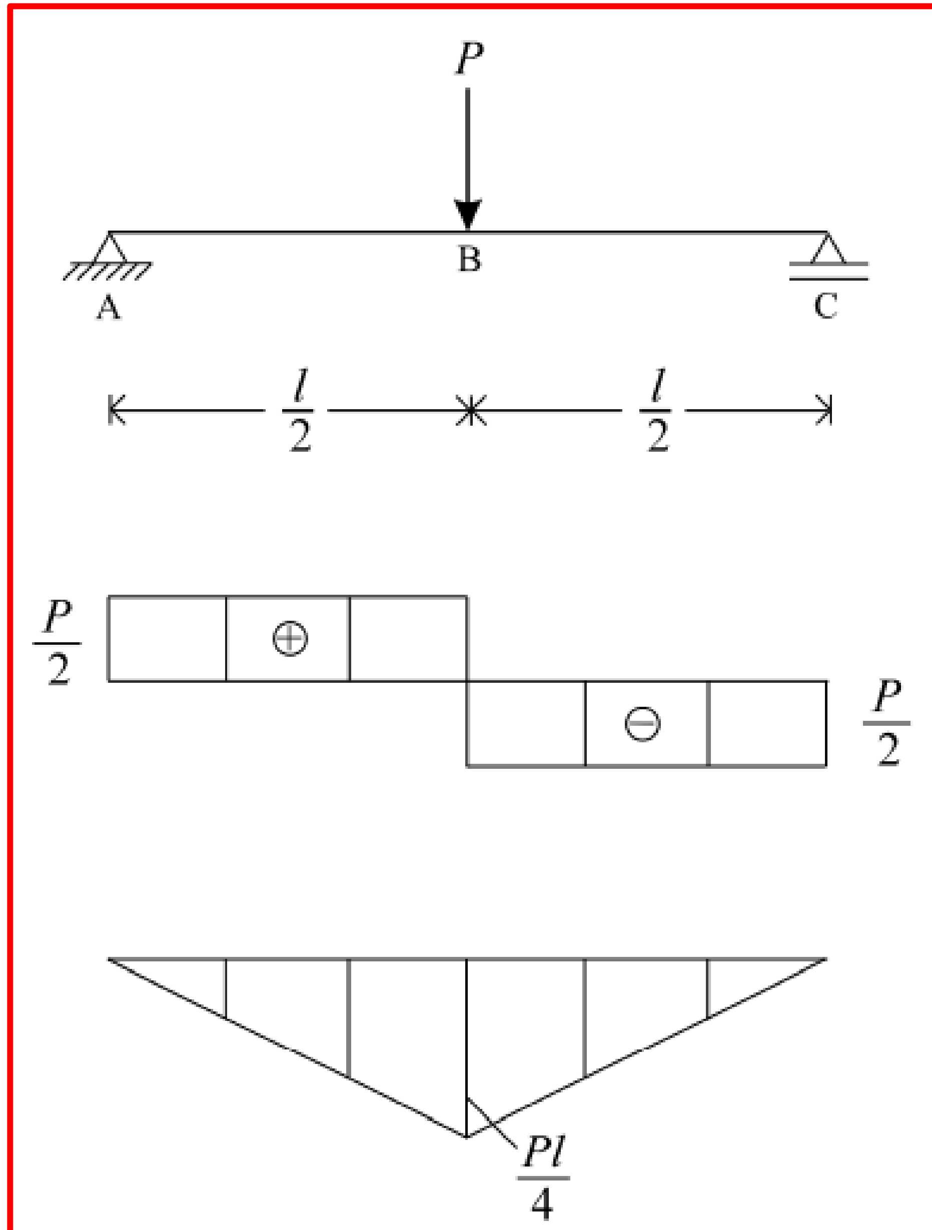
$$M(x) = (-x^2 + 10x - 30)\ \ kNm$$

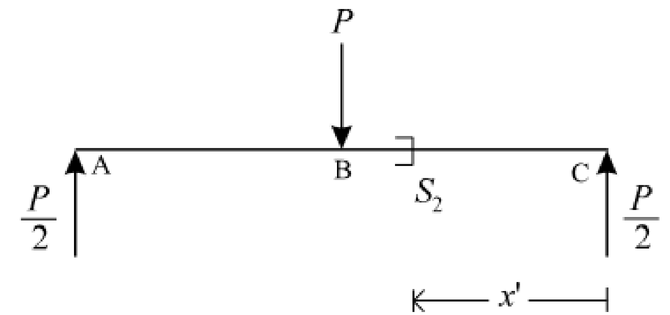
Exercício 12.

Trace os diagramas dos esforços solicitantes

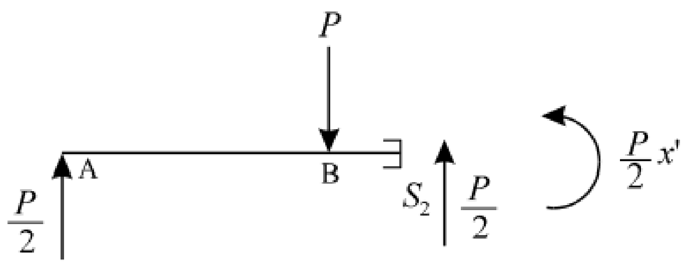


$$V_{S1}(x) = \frac{P}{2}; M_{S1}(x) = \frac{P}{2}x$$





(a)

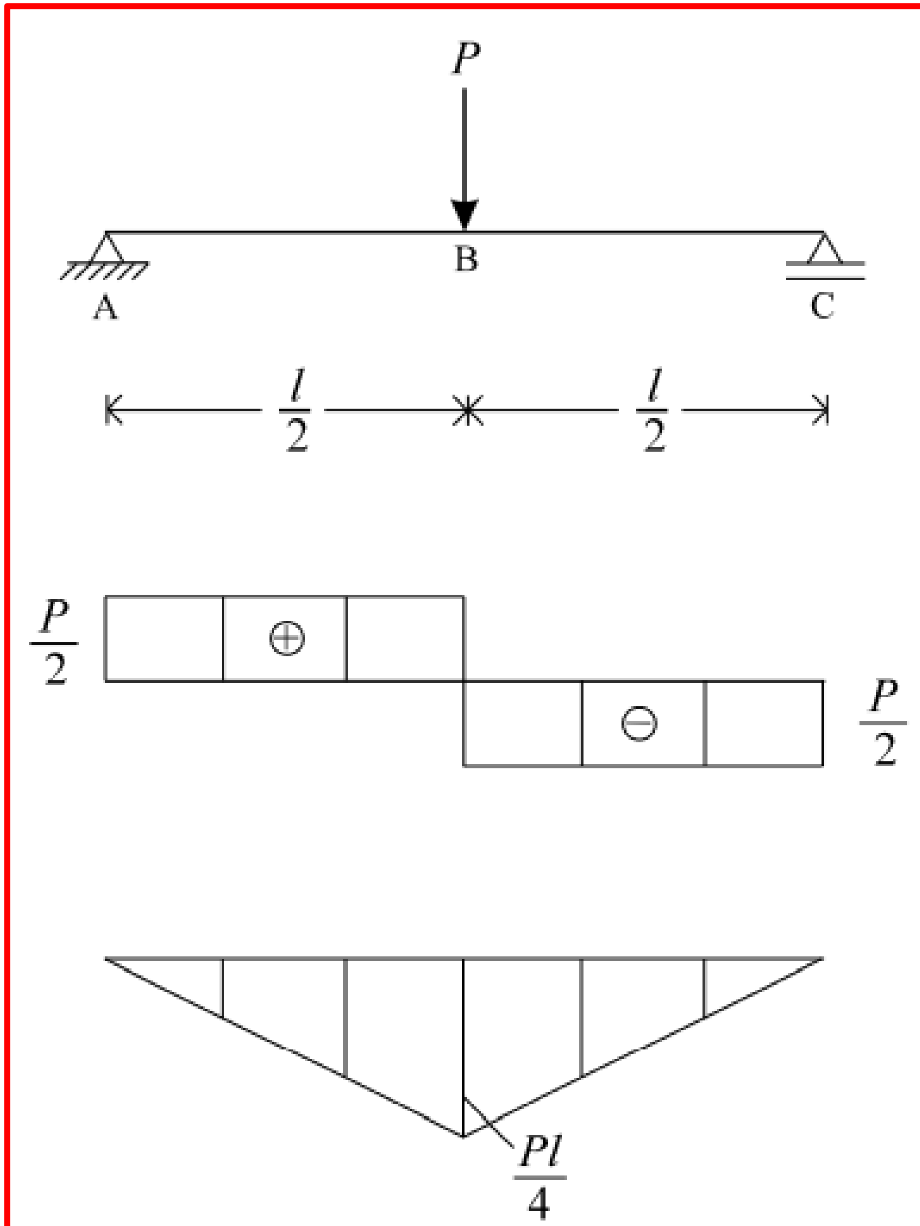


$$V_{S2}(x') = -\frac{P}{2}$$

$$M_{S2}(x') = \frac{P}{2}x'$$

$$V_C = -\frac{P}{2}; V_B = -\frac{P}{2}$$

$$M_C = \frac{P}{2}.0 = 0; M_B = \frac{P}{2}.\frac{l}{2} = \frac{Pl}{4}$$



GLOSSÁRIO (provisório)

APOIO: sistema imposto pelo meio exterior restringindo a liberdade de deslocamento de uma estrutura. Apoios são dispositivos que ligam a estrutura a outros sistemas e impedem determinados movimentos do ponto vinculado.

ARTICULAÇÃO FIXA (no plano): apoio que impede a translação horizontal e vertical (ao plano de apoio) e permite a rotação em torno do ponto vinculado.

ARTICULAÇÃO MÓVEL (no plano): apoio que impede a translação vertical (ao plano de apoio) e permite translação horizontal e a rotação em torno do ponto vinculado.

ARTICULAÇÃO ou RÓTULA: sistema que permite o deslocamento angular, sem esforços.

ARTICULAÇÃO SIMPLES (no plano): articulação que permite a rotação em torno do ponto vinculado.

BARRA: corpo gerado por uma figura plana cujo centro de gravidade se desloca sobre uma linha, perpendicular a essa figura, chamada eixo.

DEFORMAÇÃO: transformação em que ocorrem variações das distâncias entre os pontos de um corpo. Aparece quando as estruturas são submetidas a esforços. As estruturas só se deformam onde há o caminhamento dos esforços. Todo material é deformável, mas deforma desde que haja passagem de esforços.

DEFORMADA: forma que a estrutura adquire após a aplicação dos esforços externos. É a forma assumida por uma linha ou superfície de um corpo após a deformação. Geralmente é a deformação da linha elástica. É a configuração da curvatura do eixo ocasionada pelo momento fletor.

DESLOCAMENTO: transformação em que ocorrem mudanças de posição de um conjunto de pontos relativamente a um sistema de referência fixo no espaço.

ENGASTAMENTO (no plano): apoio que impede a translação horizontal e vertical (ao plano de apoio) e a rotação em torno do ponto vinculado. A seção transversal permanece perpendicular ao eixo.

ESFORÇOS: são forças (concentradas, distribuídas), momentos e tensões. Caminham para os apoios.

ESFORÇOS EXTERNOS: atuam nas estruturas e fazem surgir esforços internos que podem deformar estas estruturas levando ao rompimento em alguns casos. As reações de apoio são chamadas de esforços reativos.

ESFORÇOS INTERNOS: são as tensões e suas resultantes.

ESFORÇOS SOLICITANTES: são esforços internos, resultantes ou momentos de tensões na seção transversal de uma barra. São as forças normais, as forças cortantes, os momentos fletores e os momentos de torção.

ESTRUTURA: conjunto das partes resistentes de alguma coisa construída pela natureza ou pelo homem. A estrutura transfere esforços permitindo que os esforços aplicados a um certo ponto caminhem e cheguem a um outro ponto.

FLECHA: deslocamento transversal máximo de uma barra reta ou placa. Refere-se à deformada.

FORÇA NORMAL: resultante das tensões normais na seção transversal de uma barra. Convenciona-se a força normal de tração (que tende a afastar a seção transversal do restante da barra) como sendo positiva e a força normal de compressão (que tende a aproximar a seção transversal do restante da barra) como sendo negativa. Para o traçado dos diagramas pode ser desenhado de qualquer lado, mas com sinal.

FORÇA CORTANTE: resultante das tensões tangenciais na seção transversal de uma barra. Convenciona-se a força cortante que tende a girar a seção transversal no sentido horário como sendo positiva e a força cortante que tende a girar a seção transversal no sentido anti-horário como sendo negativa. Para o traçado dos diagramas pode ser desenhado de qualquer lado, mas com sinal.

LINHA ELÁSTICA: deformada de uma barra de material elástico.

MECÂNICA DAS ESTRUTURAS: constituída por Resistência dos Materiais, Estática das Construções, Teoria da Elasticidade e Teoria da Plasticidade. Estudam-se os esforços e as deformações dos corpos elásticos e plásticos, sendo que as duas primeiras se distinguem das duas últimas por introduzirem um maior número de hipóteses simplificadoras para a obtenção das soluções dos seus problemas. Na Resistência dos Materiais estudam-se sistemas constituídos de peças lineares.

MODELO: é uma simplificação da situação real para que se possa estudar os fenômenos que ocorrem na estrutura. O ideal é que o modelo seja simples e dê o comportamento da estrutura com uma precisão bastante boa. Formulam-se hipóteses simplificadoras.

MOMENTO FLETOR ou DE FLEXÃO: ocasiona uma curvatura da linha elástica, eventualmente comprimindo e/ou tracionando partes da seção transversal. É o momento das tensões normais da seção transversal em relação ao seu centro de gravidade. Convenciona-se o momento fletor que provoca tração na fibra inferior como sendo o positivo. Para o traçado dos diagramas não se coloca sinal e desenha-se sempre sobre o lado tracionado da barra.

MOMENTO DE TORÇÃO (ou TORÇOR): É o momento das tensões tangenciais na seção transversal em relação ao seu centro de gravidade. Convenciona-se o momento de torção que provoca rotação da seção transversal no sentido horário como sendo o positivo e no sentido anti-horário como o negativo. Para o traçado dos diagramas pode ser desenhado de qualquer lado, mas com sinal.

PÓRTICO: estrutura constituída por mais de uma barra, organizados em planos que contém também as solicitações (esforços externos, variações de temperatura, recalques de apoio).

PROJETO: tem duas fases, uma de concepção e outra, de cálculos. Deve-se ouvir a intuição e tentar responder às perguntas "Como a estrutura vai se comportar? Como as forças vão caminhar?"

REAÇÕES DE APOIO: sistema de esforços de reação do meio exterior à ação transmitida por um corpo num apoio. Um deslocamento linear é impedido por uma força e um deslocamento angular é impedido por um momento.

SEÇÃO TRANSVERSAL: seção da barra obtida pela interseção por um plano normal ao eixo.

TENSÃO: quociente da força atuante numa superfície pela sua área.

TRELIÇA: estrutura constituída por uma ou mais barras retas ligadas por articulações.

VIGA: estrutura constituída por uma ou mais barras dispostas horizontalmente com um ou mais apoios.

VIGA ENGASTADA: tem uma extremidade engastada e a outra livre.

VIGA SIMPLESMENTE APOIADA COM UM BALANÇO: tem articulação fixa numa extremidade e uma articulação móvel no meio da viga e a outra extremidade livre.

VIGA SIMPLESMENTE APOIADA: tem articulação fixa numa extremidade e articulação móvel na outra.