FUNÇÕES E SEUS GRÁFICOS

RICARDO BIANCONI

1. Introdução

Vamos tartar de funções. Para isso, precisaamos especificar alguns conceitos.

Intervalos de números reais: Intervalos são conjuntos de números reais de uma das seguintes formas, onde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$:

(a) intervalo fechado e limitado, $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$;
(b) intervalos fechados e ilimitados, $[a,\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$, $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$; $]-\infty,\infty[= \mathbb{R}$;
(c) intervalo aberto e limitado, $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$;
(d) intervalos abertos ilimitados, $]a,\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$, $]-\infty,a[= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$; $]-\infty,\infty[= \mathbb{R}$ (é, ele aparece de novo aqui!).

Coordenadas no plano: Escolhemos um ponto O do plano e duas retas x e y, perpendiculares entre si e concorrentes no ponto O. Fixamos uma unidade de medida e "graduamos" as retas x e y, de modo que o ponto O esteja no ponto 0 (zero) de ambas. Essas retas são os chamados *eixos* x e y, e O é a *origem*.

Pares ordenados: Cada ponto P do plano pode ser representado por um *par ordenado* de números reais (a,b), onde $a \in x$ e $b \in y$ são as coordenadas dos pés ds perpendiculares de P às retas x e y, respectivamente.

Geogebra: usamos o programa Geogebra para desenhos de gráficos e construç oes geométricas nesta disciplina.

2. Funções

Começamos com algumas generalidades sobre funções.

2.1. Funções: Domínio, Imagem e Gráfico.

Usamos a letra f (e outras, se necessário) para nomes genéricos de funções.

Date: 2023.

Definição 1. Uma função f é uma relação que associa a cada elemento x de um conjunto de números reais (o *domínio* de f, $\mathrm{Dom}(f)$) um único número real, $f(x)$. O *contradomínio* de f é o conjunto dentro do qual os valores de f vão estar; no caso em questão, tomamos o conjunto $\mathbb{R}$. Dentro do contradomínio de f fica a *imagem* de f, $\mathrm{Im}(f)$, que é o conjunto de valores $f(x)$, para todos $x \in \mathrm{Dom}(f)$. Representamos essa informação por $f : \mathrm{Dom}(f) \to \mathbb{R}$. Se hover uma expressão explícita para calcular f, escrevemos

$$\begin{aligned} f : \mathrm{Dom}(f) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Observação 1. O domínio de uma função f pode ser determinado pela prórpia função (por exemplo, não podemos dividir por zero, ou não podemos extrair a raiz quadrada de um número negativo), ou pode vir do problema a ser resiolvido (por exemplo, os elementos de $\mathrm{Dom}(f)$ são medidas de comprimento, restritas a algum lugar limitado).

Exemplo 1. O domínio da função $f(x) = \sqrt{x}$ é $\mathrm{Dom}(f) = [0, \infty[$.

Exemplo 2. Se a função f for a altura de um retângulo inscrito em uma circunferência de raio $R > 0$, em função da medida de sua base, então $\mathrm{Dom}(f) =]0, 2R[$ (excluímos os extremos do intervalo para descartar altura zero).

Definição 2. O *gráfico* de uma função $f : \mathrm{Dom}(f) \to \mathbb{R}$ é o conjunto $\mathrm{Graf}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathrm{Dom}(f),\ y = f(x)\}$.

Observação 2. O gráfico de f será uma curva no plano, cuja projeção no eixo x será $\mathrm{Dom}(f)$ e, para cada $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ existirá um único elemento $y_0 \in \mathbb{R}$, tal que a reta vertical $x = x_0$ corta $\mathrm{Graf}(f)$ no ponto (x_0, y_0).

2.2. **Funções Pares e Ímpares.**

Algumas simetrias das funções (ou de seus gráficos) podem ser exploradas para simplificar contas. Duas simetrias são úteis: uma em relação ao eixo y, e outra em rela cão à origem $(0, 0)$.

Definição 3. Sejam I, um intervalo em $\mathbb{R}$, simétrico em relação ao zero (por exemplo, $I = \mathbb{R}$, ou $I = [-a, a]$, $a > 0$), e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função.

(1) A função f é uma *função par* se $f(-x) = f(x)$, para todo $x \in I$.
(2) A função f é uma *função ímpar* se $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in I$.

Exemplo 3. A função $f(x) = x$ ($x \in \mathbb{R}$) é ímpar, e a função $f(x) = x^2$ é par.

Observação 3. O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo y, e o de uma função ímpar é simétrico em relação ´Ã origem.

Observação 4. Se $f, g : I \to \mathbb{R}$ forem duas funções, definidas no intervalo I como acima:

(i) se f e g forem funções ímpares, então seu produto fg será par.
(ii) se f for par e g ímpar, então fg será ímpar.

Observação 5. Dada uma função qualquer $f : I \to \mathbb{R}$, definida no intervalo I como acima, então:

(i) a função $g(x) = (f(x) + f(-x))/2$ é uma função par;
(ii) a função $g(x) = (f(x) - f(-x))/2$ é uma função ímpar;
(iii) $f(x) = g(x) + h(x)$.

2.3. **Deslocamentos horizontais e verticais de um gráfico.**

3. Exemplos Diversos

3.1. **Funções Lineares.**

3.2. **A Função Módulo, ou Valor Absoluto.**

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x, & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

3.3. **Funções Polinomiais.** As funções polinomiais são da forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Seu domínio é $\mathbb{R}$.

Polinômios quadráticos (de grau 2): estes são polinômios $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Seu gráfico é uma parábola (veja o texto sobre seções cônicas). Seja $\Delta = b^2 - 4ac$. Se $\Delta > 0$, $f(x) = 0$ tem duas soluções distintas,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; \; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a};$$

se $\Delta = 0$, $f(x) = 0$ tem uma única solução $x = -b/2a$. Se $\Delta < 0$, não existe solução em $\mathbb{R}$.

Isso, porque podemos escrever $f(x) = ax^2 + bx + c = a[(x + b/2a)^2 + (4ac - b^2)/(2a)^2]$ e, daí, $f(x) = 0$ fica

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{(2a)^2},$$

e,se $\Delta \geq 0$, podemos extrais a raiz quadrada dos dois lados e obtemos

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ e } x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a},$$

3.4. **Funções Trigonométricas.** Começamos com a noção de **medida de ângulo em radianos**. Considere uma circunferência de raio 1, e centrada na origem O. Associamos ao ponto $(1,0)$ (um doa pontos da circunferência no eixo x) o ângulo 0 (zero). Percorremos essa circunferência no sentido anti-horário, e medimos o comprimento percorrido. Se for no sentido horário, medimos o comprimento percorrido e mudamos o sinal (de positivo para negativo). Essa é a medida θ de ângulo em radianos.

Para cada $\theta \in \mathbb{R}$, existe um único ponto $P = (x,y)$ nessa circunferência. Definimos $\cos\theta = x$ e $\operatorname{sen}\theta = y$.

Observe que $\operatorname{Dom}(\operatorname{sen}) = \operatorname{Dom}(\cos) = \mathbb{R}$ e $\operatorname{Im}(\operatorname{sen}) = \operatorname{Im}(\cos) = [-1,1]$; sen é função ímpar, e cos é função par.

Observação 6. Ressaltamos algumas propriedades do seno e do cosseno:

(a) $\cos(\theta + 2n\pi) = \cos\theta$; $\operatorname{sen}(\theta + 2n\pi) = \operatorname{sen}\theta$, $n \in \mathbb{Z}$;
(b) $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$;
(c) $\operatorname{sen}(A+B) = \operatorname{sen}A\cos B + \operatorname{sen}B\cos A$;
(d) $\operatorname{sen}(A-B) = \operatorname{sen}A\cos B - \operatorname{sen}B\cos A$;
(e) $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \operatorname{sen}A\operatorname{sen}B$;
(f) $\cos(A-B) = \cos A\cos B + \operatorname{sen}A\operatorname{sen}B$;

A partir dessas funções, podemos definir as funções tangente, secante e cossecante

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}, \operatorname{Dom}(\operatorname{tg}) = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\right\}, \operatorname{Im}(\operatorname{tg}) = \mathbb{R};$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}; \operatorname{Dom}(\sec) = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\right\},$$
$$\operatorname{Im}(\sec) =]-\infty,-1] \cup [1,\infty[$$

$$\operatorname{cossec}\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}, \operatorname{Dom}(\operatorname{cossec}) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}\},$$
$$\operatorname{Im}(\sec) =]-\infty,-1] \cup [1,\infty[$$

O número $\boldsymbol{\pi = 3,14159265358979323846264338327 95\ldots}$ (com imprecisão na última casa decimal) ‘e um número irracional. A aproximação $\pi \simeq 3,1416$ (ou mesmo, $3,14$) pode ser razoável para várias aplicações.

3.5. **Funções Potências.** Dado $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, definimos a função $f(x) = x^a$, definida para todo $x > 0$.

Por exemplo, $f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$

3.6. **Funções Exponenciais e Logarítmicas.**

3.6.1. *Funções exponenciais.* Seja $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$. A função exponencial de base a é a função $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$. Observe que sua imagem, $\mathrm{Im}(f) =]0, \infty[$.

3.6.2. *O número e.* O número real denotado pela letra e tem um papel especial nas funç oes exponenciais e logarítmicas:

O número $\boldsymbol{e = 2,71828182845904523536028747135 3\ldots}$ (com arredondamento para mais na última casa decimal apresentada) é irracional. Ele pode ser definido de diversas maneiras. Por enquanto, apenas destacamos sua existência. Ao tratarmos de limites e derivadas, ele vai reaparecer.

3.6.3. *Funções logarítmicas.* As funções *logaritmo* são as respostas ao seguinte problema: Dados dois números reais $x \in \mathbb{R}$ e $a > 0$, $a \neq 1$, pede-se o expoente y, tal que $a^y = x$. Tal y é o *logaritmo* de x na base a, denotado $\log_a x$.

Observe que para existir y, o número x tem que ser positivo, $x > 0$. Assim, $\mathrm{Dom}(\log_a) =]0, \infty[$.

A imagem será $\mathrm{Im}(\log_a) = \mathbb{R}$.

Quando a base do logaritmo for o número e, denotamos $\log_e x$ por $\ln x$ (de logaritmo natural, ou Neperiano, de x), ou, em alguns livros mais antigos, por $\log x$ (sem escrever a base).

Nova versão, com gráficos, em breve.