

que me parecem poder ser aceitas sem recusa ou controvérsia.

Salviati - Contudo, elas são tão falsas e impossíveis, quanto o é que o movimento aconteça num instante; eis aqui uma clara demonstração. Quando as velocidades são proporcionais aos espaços percorridos ou a serem percorridos, estes espaços são percorridos em tempos iguais; se, portanto, as velocidades com as quais o móvel na queda percorreu o espaço de quatro braças forem o dobro das velocidades com as quais percorreu as duas primeiras braças (assim como o primeiro espaço é o dobro do segundo), então os tempos de tais percursos serão iguais. Mas que um mesmo móvel atravesse no mesmo tempo as quatro braças e as duas é algo que não pode acontecer, a não ser que o movimento seja instantâneo. Ora, vemos que o grave que cai realiza seu movimento no tempo, percorrendo as duas braças em menor tempo que as quatro, é falso, conseqüentemente, que sua velocidade aumente como o espaço. A falsidade da outra proposição é demonstrada com a mesma clareza. Com efeito, se o corpo que percute é o mesmo, a única forma de determinar a diferença e momento das percussões é através da diferença de velocidade. Quando, portanto, o corpo que vem de uma altura dupla percutisse com dupla intensidade, seria necessário que percutisse com o dobro da velocidade. Contudo, uma velocidade dupla percorre um espaço duplo ao mesmo tempo, e vemos que o tempo de queda para uma altura maior é mais longo.

Sagredo - V.Sa. nos revela conclusões ocultas com muita evidência e facilidade. Esta extrema facilidade faz que pareçam ter menor valor do que teriam, se fossem apresentadas de maneira mais complicada. Penso que os homens estimam menos um conhecimento alcançado com tão pouco esforço, que aquele obtido através de longas e incompreensíveis discussões.

Salviati - Para os que demonstram com brevidade e clareza os erros de proposições que foram tidas como verdadeiras por todo o mundo, seria um dano suportável serem tratados com desprezo, ao invés de agradecimento; contudo, é muito mais desagradável e perigoso verificar uma certa atitude que nasce em alguns que, pretendendo equiparar-se a outros no mesmo campo de estudos, têm como verdadeiras conclusões que, posteriormente, são descobertas e declaradas falsas por outro com um raciocínio simples e fácil. Não chamarei inveja a esta atitude que costuma converter-se, depois, em ódio e ira contra os descobridores de tais erros, mas a definirei como um desejo violento de querer manter erros inveterados, ao invés de aceitar as verdades que se descobrem. Este desejo leva-os, por vezes, a escrever contra as verdades, ainda que intimamente reconhecidas por eles mesmos, apenas com a finalidade de denegrir a reputação de outros aos olhos do vulgo numeroso e pouco instruído. A respeito dessas falsas conclusões, reputadas como verdadeiras, porém de fácil refutação, não poucas escutei de nosso Acadêmico, tendo inclusive anotado parte delas.

Sagredo - E V.Sa. não nos privará delas, comunicando-as no momento oportuno, ainda que fosse preciso para tal fim efetuar uma

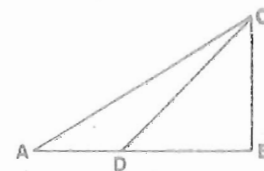
reunião especial. Por ora, retomando o fio de nossa conversação, parece-me que até o presente conseguimos estabelecer a definição do movimento uniformemente acelerado, do qual se trata a continuação. Tal definição é:

Chamamos movimento igualmente, ou seja, uniformemente acelerado, àquele que, partindo do repouso, adquire em tempos iguais momentos iguais de velocidade.

Salviati - Estabelecida tal definição, o autor supõe e postula como verdadeiro somente um princípio, a saber:

Os graus de velocidade alcançados por um mesmo móvel em planos diferentemente inclinados são iguais quando as alturas desses planos também são iguais.

Ele chama altura de um plano inclinado à perpendicular que, traçada do ponto superior desse plano, cai sobre a linha horizontal que é traçada pelo ponto inferior desse mesmo plano inclinado; para melhor entendimento, seja a linha AB paralela ao horizonte, sobre a qual estão inclinados os dois planos CA e CD; a perpendicular CB que cai sobre a horizontal BA é chamada pelo autor de altura dos planos CA e CD. Ele supõe que os graus de

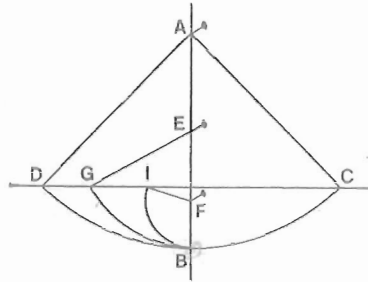


velocidade de um mesmo móvel que desce pelos planos inclinados CA e CD, adquiridos nos pontos finais A e D, são iguais, por ser sua altura CB a mesma; e o mesmo é o grau de velocidade que alcançaria o mesmo móvel, se caísse do ponto C ao ponto B.

Sagredo - Na verdade parece-me que esta suposição é tão provável que merece ser aceita sem controvérsia, entendendo sempre que se removam todos os obstáculos acidentais e externos e que os planos sejam suficientemente sólidos e lisos e o móvel tenha uma forma perfeitamente esférica, de modo que tanto o móvel como o plano não possuam asperezas. Suprimidos todos os obstáculos e impedimentos, a luz natural mostra-me sem dificuldade, que uma bola pesada e perfeitamente redonda, descendo ao longo das linhas CA, CD, CB, chegaria aos pontos A, D, B, com ímpetus iguais.

Salviati - Seu raciocínio é muito plausível; mas, além do verossímil, quero por meio de uma experiência aumentar tanto sua probabilidade que pouco lhe faltará para ser uma demonstração necessária. Imaginem que esta folha de papel é um muro vertical e que de um prego fixado nele pende uma bola de chumbo de uma ou duas onças, suspensa de um fio muito fino AB, com duas ou três braças de comprimento, perpendicular ao horizonte, e desenhem na parede uma linha horizontal DC que corta em ângulo reto a perpendicular AB, que estará separada da parede aproximadamente

dois dedos. Conduzindo posteriormente o fio AB com a bola até AC, soltem essa bola: num primeiro momento veremos que ela desce descrevendo o arco CBD e ultrapassa o ponto B tanto que, percorrendo o arco BD, chegará quase à paralela traçada CD, não che-



gando a tocá-la por um pequeno intervalo, o que é causado pela resistência que opõem o ar e o fio. Disto podemos perfeitamente concluir que o ímpeto adquirido pela bola no ponto B, ao transpor o arco CB, foi suficiente para elevá-la segundo um arco similar BD à mesma altura. Após efetuar e repetir muitas vezes esta experiência, fixemos no muro, próximo à perpendicular AB, como por exemplo em E ou F, um prego que sobressai da parede cinco ou seis dedos, a fim de que o fio AC, voltando a conduzir como antes a bola C pelo arco CB, encontre, quando chegar a B, o prego E, sendo a bola obrigada a descrever a circunferência BC com centro em E. Constataremos assim o que pode fazer o mesmo ímpeto que, engendrado no ponto B, faz subir o móvel pelo arco BD até a altura da linha horizontal CD. Constataremos então com prazer que a bola chega até a linha horizontal no ponto G, e o mesmo aconteceria, se o prego estivesse fixado mais abaixo, por exemplo, no ponto F, caso em que a bola descreveria o arco BI, terminando sempre sua subida precisamente na linha CD. Se, enfim, o prego fosse fixado tão baixo, que a parte do fio que ultrapassa o prego não chegasse a alcançar a linha CD (o que aconteceria se o prego estivesse mais perto do ponto B que da intersecção de AB com a horizontal CD), então o fio se chocaria com o prego, enrolando-se neste. Esta experiência não deixa lugar para duvidar da verdade da suposição: com efeito, sendo os dois arcos CB e DB iguais e simétricos, o momento adquirido durante a descida pelo arco CB é o mesmo que aquele adquirido pela descida segundo o arco DB; mas o momento adquirido em B segundo o arco CB é suficiente para erguer o mesmo móvel segundo o arco BD, portanto, também o momento adquirido durante a descida DB é igual àquele que ergue o móvel pelo mesmo arco de B até D. Assim, de modo geral, todo momento adquirido durante a descida por um arco é igual àquele que pode fazer subir o mesmo móvel pelo mesmo arco. Ora, todos os momentos que provocam uma subida através dos arcos

BD, BC, BI são iguais, visto que são produzidos pelo mesmo momento adquirido durante a descida CB, como mostra a experiência; logo, todos os momentos que são adquiridos durante as descidas pelos arcos DB, CB, IB são iguais. (5)

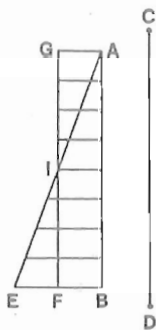
Sagredo - O raciocínio parece-me conclusivo e a experiência tão apropriada para a verificação do postulado, que podemos perfeitamente considerá-lo demonstrado.

Salviati - Não desejo, Sr. Sagredo, que nos ocupemos disso mais do que seria necessário, principalmente se consideramos que devemos servir-nos deste princípio para os movimentos que se realizam em superfícies retas, e não em superfícies curvas, nas quais a aceleração ocorre com graus muito diferentes daqueles que consideramos ocorrer nas superfícies planas. Assim, ainda que a experiência em questão nos mostre que a queda pelo arco CB confere ao móvel um momento tal que possa reconduzi-lo à mesma altura por qualquer um dos arcos BD, BG e BI, não podemos mostrar com a mesma evidência que o mesmo aconteceria quando uma bola perfeitamente redonda descesse por planos retos inclinados segundo as inclinações das cordas dos arcos considerados. Podemos mesmo supor que, formando-se no ponto B ângulos produzidos por estes planos retos, a bola que desce pela inclinação correspondente à corda CB, encontrando o obstáculo nos planos ascendentes segundo as cordas BD, BG, e BI, perderia no choque parte de seu ímpeto e não poderia alcançar a altura da linha CD; mas, removido o obstáculo que prejudica a experiência, parece-me que nosso entendimento é capaz de compreender que o ímpeto (que efetivamente adquire força com a queda) seria suficiente para reconduzir o móvel à mesma altura. Admitamos, portanto, isto como postulado, cuja verdade absoluta nos será posteriormente estabelecida vendo outras conclusões, produzidas sobre tais hipóteses, corresponder e concordar exatamente com a experiência (6). Uma vez introduzido este único princípio, o autor passa a tratar das proposições, deduzindo-as demonstrativamente, a primeira das quais é a seguinte:

#### TEOREMA I - PROPOSIÇÃO I

O tempo no qual um determinado espaço é percorrido por um móvel que parte do repouso com um movimento uniformemente acelerado é igual ao tempo no qual aquele mesmo espaço seria percorrido pelo mesmo móvel com um movimento uniforme, cujo grau de velocidade seja a metade do maior e último grau de velocidade alcançado no movimento uniformemente acelerado.

Representemos por meio da linha AB o tempo durante o qual um móvel, partindo do repouso em C, percorrerá o espaço CD com um movimento uniformemente acelerado. Representemos o maior e último grau de velocidade adquirido durante o intervalo de tempo AB pela linha EB, formando com AB um ângulo reto. Traçemos a linha AE, todas as linhas que partem de diferentes pontos de AB e são equidistantes e paralelas a BE representam os graus crescentes

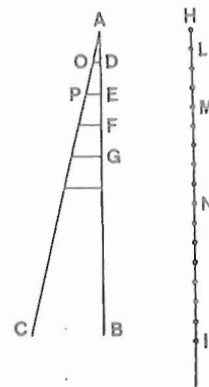


de velocidade a partir do instante A. Dividamos ao meio a linha BE no ponto F e tracemos FG paralela a BA e AG paralela a BF, formando assim o paralelogramo AGFB, igual ao triângulo AEB, visto que o lado GF divide ao meio o lado AE no ponto I. Se, por outro lado, prolongamos as linhas paralelas do triângulo AEB até IC, a soma de todas as paralelas contidas no quadrilátero será igual à soma das paralelas contidas no triângulo AEB, posto que as linhas paralelas do triângulo IEF são equivalentes às linhas contidas no triângulo GIA, e aquelas contidas no trapézio AIFB são comuns. Uma vez que cada um e todos os instantes do intervalo de tempo AB correspondem a cada um e todos os pontos da linha AB, as linhas paralelas traçadas a partir desses pontos no interior do triângulo AEB representam os graus crescentes de velocidade, enquanto que as paralelas contidas no paralelogramo representam os graus de velocidade que não crescem, mas que se mantém constantes; é evidente que a soma dos momentos de velocidade, no caso do movimento acelerado, é representada pelas paralelas crescentes do triângulo AEB, enquanto que, no caso do movimento uniforme, é representada pelas paralelas iguais do paralelogramo GB. Com efeito, os momentos que faltam na primeira metade do movimento acelerado (aqueles que são representados pelas paralelas do triângulo AGI) são compensados pelos momentos representados pelas paralelas do triângulo IEF. E, portanto, evidente que espaços iguais serão percorridos em tempos iguais por dois corpos, dos quais um, partindo do repouso, se move com movimento uniformemente acelerado, enquanto que o outro, que se move com velocidade uniforme, se desloca com um movimento que é igual à metade do momento máximo de velocidade atingido pelo primeiro; que é o que se queria demonstrar.

#### TEOREMA II - PROPOSIÇÃO II

Se um móvel, partindo do repouso, cai com um movimento uniformemente acelerado, os espaços por ele percorridos em qualquer tempo estão entre si na razão dupla dos tempos, a saber, como os quadrados desses mesmos tempos.

Representemos o tempo que tem início no instante A por meio da linha reta AB, na qual tomamos dois intervalos quaisquer de tempo AD e AE. Seja HI a linha segundo a qual o móvel, partindo do repouso em H, cairá com um movimento uniformemente acelerado; seja HL o espaço percorrido durante o primeiro intervalo de tempo AD e HM o espaço percorrido durante o intervalo de tempo AE. Afirimo que o espaço MH está para o espaço HL numa proporção du-



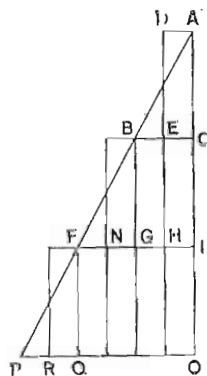
pla daquela que o tempo EA tem para o tempo AD; e podemos também afirmar que os espaços HM e HL têm a mesma proporção que os quadrados de EA e de AD. Tracemos a linha AC que forma um ângulo qualquer com a linha AB; e a partir dos pontos D e E tracemos as linhas paralelas DO e EP: se DO representa o grau máximo de velocidade adquirido no instante D do intervalo de tempo AD, PE representará, por definição, a velocidade máxima obtida no instante E do intervalo de tempo AE. Mas, conforme foi demonstrado acima a propósito dos espaços percorridos, esses espaços são os mesmos, se um móvel, partindo do repouso, se move com um movimento uniformemente acelerado e se, durante um intervalo de tempo igual, ele se move com um movimento uniforme, cuja velocidade é a metade da velocidade máxima adquirida durante o movimento acelerado. Segue-se que as distâncias MH e LH são idênticas às que seriam percorridas nos intervalos de tempos AE e DA por movimentos uniformes, cujas velocidades seriam iguais à metade daquelas representadas por DO e EP. Se tiver, portanto, sido provado que as distâncias MH e LH estão na dupla proporção dos tempos EA e DA, a proposição terá sido provada. Na quarta proposição do livro primeiro foi demonstrado que os espaços percorridos por dois corpos com movimento uniforme estão entre si numa proporção que é igual ao produto da proporção das velocidades com a proporção dos tempos. Neste caso, porém, a proporção das velocidades é a mesma que a proporção dos tempos (uma vez que a proporção entre AE e AD é a mesma que a proporção entre a metade de EP e a metade de DO, ou entre PE e OD). Consequentemente, a

proporção entre os espaços percorridos é a mesma que o quadrado da proporção entre os tempos; o que queríamos demonstrar.

Fica, portanto, claro que a proporção entre as distâncias é igual ao quadrado da proporção entre as velocidades máximas, a saber, entre as linhas PE e OD, posto que PE está para OD assim como EA está para DA.

#### COROLARIO I

Dai, segue-se claramente que, se a partir do primeiro instante do movimento fossem tomados sucessivamente intervalos de tempos iguais, como, por exemplo, AD, DE, EF, FG nos quais se percorrem os espaços HL, LM, MN, NI, estes espaços estariam entre si assim como os números ímpares a partir da unidade, a saber, 1, 3, 5, 7: esta é, com efeito, a proporção entre os excessos dos quadrados das linhas que se excedem igualmente, diferença essa que é igual à menor delas, ou seja, à proporção entre os quadrados dos números inteiros que se seguem à unidade. Quando, portanto, os graus de velocidade aumentam em tempos iguais, de acordo com a simples série dos números, os espaços percorridos em tempos iguais adquirem incrementos segundo a série dos números ímpares *ab unitate*. Sagredo - Peço-lhe, por favor, que interrompa por um momento a leitura, para que eu examine uma certa idéia que me ocorreu; para uma fácil e mútua compreensão, faço um desenho. Represento pela linha AI a sucessão do tempo a partir do primeiro instante A, traçando depois por A, segundo um ângulo qualquer, a reta AF e unindo os pontos extremos I e F, dividido o tempo AI ao meio em C, traço CB paralela a IF. Considerando, depois, a linha CB



como o grau máximo da velocidade que, partindo do repouso no primeiro instante de tempo A, foi aumentando de acordo com o crescimento das paralelas a BC, traçadas no triângulo ABC (que é o mesmo que crescer em proporção ao tempo), admito sem contestação, segundo o que foi dito até o momento, que o espaço percorrido por um móvel, cuja velocidade aumenta do modo indicado, seria igual ao espaço que o mesmo móvel percorreria se, durante o

mesmo intervalo de tempo AC, ele se movesse com um movimento uniforme, cujo grau de velocidade seria igual a EC, metade de BC. Se continuo e imagino que o móvel que cai com um movimento acelerado possui no instante C o grau de velocidade BC, é evidente que, se ele continuasse a mover-se com o mesmo grau de velocidade BC, sem acelerar mais, percorreria no tempo seguinte CI um espaço duplo daquele que percorreu no mesmo tempo AC com o grau de velocidade uniforme EC, que é, por sua vez, metade do grau BC. Contudo, como o móvel desce com uma velocidade que cresce uniformemente em todos os tempos iguais, acrescentará ao grau CB, no tempo seguinte CI, aqueles momentos de velocidade que crescem conforme as paralelas do triângulo BFG, igual ao triângulo ABC. Portanto, acrescentando ao grau de velocidade CI a metade do grau FG, a saber, o maior dos graus adquiridos no movimento acelerado e representados pelas paralelas do triângulo BFG, obteremos o grau de velocidade IN, com o qual se teria movido com movimento uniforme no tempo CI. Este grau IN, sendo o triplo do grau EC, nos dá a certeza de que o espaço percorrido durante o segundo tempo CI deve ser o triplo do espaço percorrido durante o primeiro tempo CA. E se imaginamos que acrescentamos a AI outra parte igual de tempo IO e que aumentamos o triângulo até APO, é evidente que, se o movimento continuasse por todo o tempo IO com o grau de velocidade IF, obtido durante o tempo AI com um movimento acelerado, sendo tal grau IF o quádruplo de EC, o espaço percorrido no tempo IO seria o quádruplo do espaço percorrido durante o primeiro intervalo de tempo igual AC. Mas continuando o aumento da aceleração uniforme no triângulo FPQ, semelhante ao triângulo ABC, o qual, reduzido ao movimento uniforme, aumentaria um grau de velocidade igual a EC, acrescentando o grau QR, igual a EC, teremos toda a velocidade uniforme realizada no tempo IO, que é quádrupla da velocidade uniforme correspondente ao primeiro intervalo de tempo AC, e por isso o espaço percorrido é o quádruplo do espaço percorrido no primeiro intervalo de tempo AC. Vemos, portanto, com este simples cálculo que os espaços percorridos em tempos iguais por um móvel que, partindo do repouso, vai adquirindo velocidade proporcionalmente ao aumento do tempo estão entre si como os números ímpares *ab unitate* 1, 3, 5, etc., e, se tomamos no seu conjunto os espaços percorridos, podemos verificar que o espaço percorrido num tempo duplo é o quádruplo do percorrido no tempo simples, o espaço percorrido num tempo triplo é nove vezes o espaço percorrido no tempo simples, e, numa palavra, os espaços percorridos estão numa proporção dupla dos tempos, a saber, como os quadrados desses tempos (7).

Simplicio - Tive verdadeiramente mais prazer com esta simples e clara argumentação do Sr. Sagredo que com a demonstração do Autor para mim mais obscura; de modo que estou plenamente convencido de que as coisas se passam assim, uma vez enunciada e aceita a definição do movimento uniformemente acelerado. Mas se é essa a aceleração da qual se serve a natureza no movimento de

queda dos graves, tenho no momento minhas dúvidas. Parece-me, pelo que diz respeito a mim e a outros que pensam como eu, que teria sido oportuno neste lugar apresentar uma das muitas experiências que, em diversos casos, concordam com as conclusões demonstradas.

Salviati - Como verdadeiro homem e ciência, sua exigência é muito razoável; pois é assim que convém proceder nas ciências, que aplicam as demonstrações matemáticas aos fenômenos naturais, como se observa no caso da perspectiva, da astronomia, da mecânica, da música e de outras, as quais confirmam com experiências sensatas, seus princípios, que são os fundamentos de toda a estrutura ulterior. Por isso, não quero que pareça supérfluo discorrer longamente a respeito desse primeiro e máximo princípio, sobre o qual se apoia a imensa estrutura de infinitas conclusões, das quais apenas uma pequena parte foi tratada pelo autor deste livro, que muito contribuiu para abrir a porta, até agora fechada, aos espíritos especulativos. Pelo que se refere às experiências, o autor não deixou de fazê-las; e para assegurar-se de que a aceleração dos graves, que caem de modo natural, acontece na proporção acima afirmada, encontrei-me muitas vezes em sua companhia procurando tal prova da seguinte maneira.

Numa ripa, ou melhor dito, numa viga de madeira com um comprimento aproximado de 12 braças, uma largura de meia braça num lado e três dedos no outro, foi escavada uma canaleta neste lado menos largo com pouco mais que um dedo de largura. No interior desta canaleta perfeitamente retilínea, para ficar bem polida e limpa, foi colada uma folha de pergaminho que era polida até ficar bem lisa; fazíamos descer por ela uma bola de bronze duríssima perfeitamente redonda e lisa. Uma vez construído o mencionado aparelho, ele era colocado numa posição inclinada, elevando sobre o horizonte uma de suas extremidades até a altura de uma ou duas braças, e se deixava descer (como afirmei) a bola pela canaleta, anotando como exporei mais adiante o tempo que empregava para uma descida completa; repetindo a mesma experiência muitas vezes para determinar exatamente a quantidade de tempo, na qual nunca se encontrava uma diferença nem mesmo da décima parte de uma batida de pulso. Feita e estabelecida com precisão tal operação, fizemos descer a mesma bola apenas por uma quarta parte do comprimento total da canaleta; e, medido o tempo de queda, resultava ser sempre rigorosamente igual à metade do outro. Variando a seguir a experiência, e comparando o tempo requerido para percorrer todo o comprimento com o tempo requerido para percorrer a metade, ou os dois terços, ou os três quartos, ou para concluir qualquer outra fração, através de experiências repetidas mais de cem vezes, sempre se encontrava que os espaços percorridos estavam entre si como os quadrados dos tempos e isso em todas as inclinações do plano, ou seja, da canaleta, pela qual se fazia descer a bola. Observamos também que os tempos de queda para as diferentes inclinações do plano mantinham exatamente entre si aquela proporção que, como veremos mais adiante,

foi encontrada e demonstrada pelo autor. No que diz respeito à medida do tempo, empregávamos um grande recipiente cheio de água, suspenso no alto, o qual através de um pequeno orifício feito no fundo, deixava cair um fino fio de água, que era recolhido num pequeno copo durante todo o tempo em que a bola descia pela canaleta ou por suas partes. As quantidades de água assim recolhidas eram a cada vez pesadas com uma balança muito precisa, sendo as diferenças e proporções entre os pesos correspondentes às diferenças e proporções entre os tempos; e isto com tal precisão que, como afirmei, estas operações, muitas vezes repetidas, nunca diferiam de maneira significativa (8).

Simplicio - Teria tido grande satisfação em presenciar tais experiências; contudo, estando certo de seu zelo em efetuá-las e de sua fidelidade em relatá-las, não tenho escrúpulo em aceitá-las como verdadeiras e certas.

Salviati - Podemos, portanto, retomar e prosseguir nossa leitura.

#### COROLÁRIO II

Segue-se, em segundo lugar, que se se tomam, a partir do começo do movimento, dois espaços quaisquer, percorridos em tempos quaisquer, esses tempos estarão entre si assim como qualquer dos espaços está para a média proporcional entre os dois espaços dados.

Se tomamos, a partir do ponto inicial S duas distâncias ST e SV, cuja média proporcional é SX, o tempo de queda por ST está para o tempo de queda por SV como ST está para SX, ou ainda, o tempo de queda por SV está para o tempo de queda por ST como VS está para SX. Com efeito, foi demonstrado que os espaços percor-



ridos estão em dupla proporção dos tempos ou (o que é o mesmo) como os quadrados dos tempos; por outro lado, a proporção entre o espaço VS e o espaço ST é o quadrado da proporção entre VS e SX, que é a mesma proporção que tem o quadrado de VS para o quadrado de SX; segue-se, portanto, que a proporção dos tempos de queda por SV e ST é a mesma que a proporção entre as respectivas distâncias lineares VS e SX.

## ESCOLIO

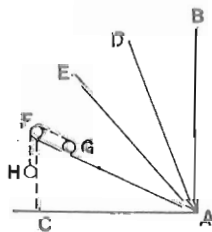
Portanto, o que foi demonstrado no referente às quedas verticais, também acontece do mesmo modo para os movimentos que se realizam em planos inclinados quaisquer; supusemos, com efeito, que em tais planos os graus de velocidade aumentam sempre na mesma proporção, ou seja, proporcionalmente ao tempo, ou ainda, segundo a simples série dos números inteiros.

Salviati (9) - Desejo aqui, Sr. Sagredo, que me seja ainda permitido, embora isso possa entediar o Sr. Simplicio, interromper durante algum tempo a presente leitura, para que eu possa explicar, a partir do que foi dito e demonstrado até o momento, e acrescentando algumas conclusões mecânicas que aprendi com nosso Acadêmico, de que maneira penso poder agora melhor confirmar a verdade do princípio que com raciocínios prováveis e experiências foi por nós examinado, ou o que é mais importante, de que maneira penso poder deduzi-lo geometricamente, provando antes um único lema elementar relativamente ao ímpeto.

Sagredo - Diante do ganho que V.Sa. nos promete, não existe tempo que eu não dispenderia de bom grado para confirmar e estabelecer definitivamente estas ciências do movimento; de minha parte, não apenas lhe permito discorrer sobre esse assunto mas peço-lhe ainda satisfazer a curiosidade em mim despertada; acredito que também o Sr. Simplicio tenha o mesmo sentimento.

Simplicio - Não poderia negá-lo.

Salviati - Já que me permitis, consideremos, em primeiro lugar, o fato muito conhecido de que os momentos ou as velocidades de um mesmo móvel variam com as diferentes inclinações dos planos, e de que a velocidade máxima é alcançada ao longo da perpendicular ao horizonte, enquanto que nas outras inclinações tal velocidade diminui à medida que se afastam da vertical, ou seja, à medida que se tornam mais oblíquas. Daí que o ímpeto, o poder, a energia, ou queremos dizer, o momento da descida são diminuídos no móvel sustentado por um plano, sobre o qual esse móvel se apoia e desce. Para maior clareza, imaginemos a linha AB, traçada perpendicularmente com respeito à horizontal AC; coloquemos, depois, essa mesma linha em diferentes inclinações com respeito à horizontal, como em AD, AE, AF, etc. Afirmo que o ímpeto má-



ximo e total do grave para descer será, na perpendicular BA, menor que na DA, e ainda menor que na EA e que diminui progressivamente na linha mais inclinada FA, extinguindo-se totalmente na horizontal CA, onde o móvel se acha indiferente ao movimento e ao repouso, não tendo por si mesmo tendência a mover-se em qualquer direção, nem tampouco oferecendo resistência alguma ao movimento; pois, assim como é impossível que um grave ou um conjunto deles se mova naturalmente para o alto, afastando-se do centro comum para o qual tendem todos os corpos graves, também é impossível que um grave se mova espontaneamente, se com tal movimento seu próprio centro de gravidade não se aproxima do centro comum anteriormente mencionado; razão pela qual será nulo o ímpeto ou movimento de dito móvel sobre a horizontal, que aqui se considera como uma superfície igualmente distante de um mesmo centro e, por isso, completamente desprovida de inclinação. Esclarecida esta variação do ímpeto, é necessário que eu explique agora o que nosso Acadêmico num antigo tratado de mecânica (10), escreveu em Pádua para uso exclusivo de seus discípulos, tinha longa e conclusivamente demonstrado, quando estudou a origem e a natureza desse maravilhoso instrumento que é o parafuso. O estudo referia-se à proporção em que varia o ímpeto nas diferentes inclinações dos planos: como, por exemplo, do plano inclinado AF, traçando a sua altura sobre a horizontal, ou seja, a linha FC, pela qual o ímpeto de um grave e o momento da descida é o máximo, procuramos estabelecer a proporção que se dá entre este momento e o momento da descida do mesmo móvel pela linha inclinada FA. Afirmo que essa proporção é a proporção inversa dos comprimentos; e este é o lema que deve preceder o teorema que espero a seguir poder demonstrar. Aqui é evidente que o ímpeto de descida de um grave é igual à resistência ou força mínima que é suficiente para impedir seu movimento e pará-lo: para calcular tal força e resistência usarei a gravidade de um outro móvel. Imaginemos agora que sobre o plano FA colocamos um móvel G, ligado ao peso H por intermédio de um fio que passa pelo ponto F; e consideremos que o espaço da descida ou subida vertical é sempre igual a toda a subida ou descida do outro móvel G pelo plano inclinado AF: mas não é certamente igual à descida ou subida vertical, que é a única na qual esse móvel G (do mesmo modo que qualquer outro móvel) exerce sua resistência. Isto é evidente. Se consideramos, portanto, que no triângulo AFC o movimento do móvel G, por exemplo, para cima de A a F, é composto pela distância horizontal AC e pela perpendicular CF e, dado que na horizontal, como se afirmou, a resistência do móvel ao movimento é nula (visto que com tal movimento não existe nem perda, nem ganho no referente à própria distância do centro comum dos graves, que no plano horizontal se mantém sempre a mesma), segue-se que a resistência é devida unicamente à necessidade de percorrer a vertical CF. Assim, enquanto que o grave G, ao mover-se de A a F, não oferece resistência a não ser para subir o espaço vertical CF, o outro grave H desce necessariamente pela vertical por

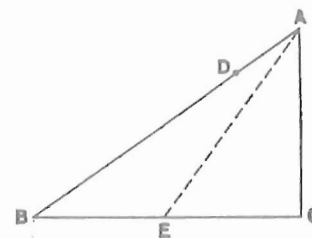
um espaço igual a todo o espaço FA, e dado que tal proporção entre a subida e a descida se mantem sempre a mesma, por pouco ou muito que seja o movimento desses móveis (por estarem ligados), podemos afirmar positivamente que, caso exista equilíbrio, ou seja, repouso dos móveis, seus momentos, suas velocidades ou suas propensões ao movimento, a saber, os espaços que eles percorreriam ao mesmo tempo, devem estar em proporção inversa a suas gravidades, conforme demonstrado para todos os casos de movimentos mecânicos; de modo que será suficiente para impedir a descida de G que a gravidade de H seja tanto menor que a gravidade daquele, quanto menor é proporcionalmente o espaço CF ao espaço FA. Suponhamos, portanto, que o grave G está para o grave H, como FA está para FC; seguir-se-á, assim, um estado de equilíbrio, ou seja, os graves H e G terão momentos de descida iguais e cessará o movimento desses móveis. E, posto que concordamos que o ímpeto, a energia, o momento ou a propensão de um móvel ao movimento são iguais à força ou resistência mínima que é suficiente para pará-lo e, que concluímos que o grave H é suficiente para impedir o movimento do grave G, segue-se que o peso menor H, que exerce seu momento total na perpendicular FC, será a medida precisa do momento parcial que o peso maior G exerce no plano inclinado FA; mas como o momento total do grave G é medido por ele mesmo (posto que, para impedir a descida vertical de um grave, é necessário opor-lhe outro grave igual e que também esteja em condição de mover-se em liberdade verticalmente), portanto, o ímpeto ou momento parcial de G ao longo do plano inclinado FA estará para o ímpeto máximo e total do mesmo G ao longo da perpendicular FC assim como o peso H está para o peso G, ou seja, por construção, assim como a perpendicular FC, altura do plano inclinado, está para o comprimento FA do mesmo plano. Tal é o lema que se queria demonstrar e que foi, como veremos, suposto como conhecido pelo nosso Autor na segunda parte da sexta proposição do presente tratado.

**Sagredo** - Do que foi demonstrado até aqui, parece-me que podemos concluir facilmente, argumentando ex aequali et cum proportione perturbata, que os momentos de um mesmo móvel em planos diferentemente inclinados, como FA e FI, que têm a mesma altura, estão entre si numa proporção inversa aos comprimentos dos mesmos planos.

**Salviati** - Conclusão exata. Estabelecido este ponto, passarei agora a demonstrar o teorema, a saber, que:

Os graus de velocidade de um móvel descendente com movimento natural a partir da mesma altura por planos com qualquer inclinação são sempre iguais ao chegar no plano horizontal, desde que sejam removidos os obstáculos. Devemos aqui ter presente, antes de mais nada, que qualquer que seja a inclinação do plano no qual o móvel, que parte do repouso, aumenta sua velocidade, ou a quantidade de ímpeto proporcionalmente ao tempo (segundo a definição dada pelo autor do movimento naturalmente acelerado), os espaços percorridos são proporcionais aos quadrados dos tempos e,

consequentemente, aos graus de velocidade, como demonstrado pela proposição precedente. Dependendo de quais foram os ímpetos do primeiro movimento, tais serão proporcionalmente os graus de velocidade adquiridos no mesmo tempo, posto que tanto estes como aqueles aumentam na mesma proporção ao mesmo tempo. Suponhamos agora o plano inclinado AB, cuja altura em relação à horizontal CB é a perpendicular AC. Posto que, como se demonstrou há pouco,



o ímpeto de um móvel ao longo da vertical AC está para seu ímpeto pelo plano inclinado AB assim como AB está para AC, tomemos no plano inclinado AB, AD como terceira proporcional de AB e AC; portanto, o ímpeto em AC está para o ímpeto em AB, ou seja em AD, assim como AC está para AD. Por esta razão, o móvel no mesmo tempo que percorreria o espaço vertical AC, percorrerá também o espaço AD no plano inclinado AB (sendo os momentos como os espaços), e o grau de velocidade em C estará para o grau de velocidade em D na mesma proporção que existe entre AC e AD. Mas o grau de velocidade em B está para o grau de velocidade em D assim como o tempo por AB está para o tempo por AD, pela definição do movimento acelerado, e o tempo por AB está para o tempo por AD assim como a mesma AC, que é a média proporcional entre BA e AD, está para AD, de acordo com o último corolário da segunda proposição; portanto, os graus de velocidade em B e em C estão para o de velocidade em D na mesma proporção que existe entre AC e AD, e são portanto iguais; que é o teorema que queríamos demonstrar.

Disto podemos provar mais conclusivamente a seguinte terceira proposição do autor, na qual se vale do princípio segundo o qual o tempo para percorrer um plano inclinado está para o tempo para percorrer a perpendicular na mesma proporção em que o comprimento do plano inclinado está para o comprimento da perpendicular. Com efeito, de acordo com o segundo corolário da segunda proposição, se BA representa o tempo em AB, então o tempo em AD será igual à média proporcional entre tais distâncias, a saber, AC; mas se AC é o tempo em AD, será também o tempo em AC, por serem AD e AC percorridos em tempo iguais; de modo que, se BA é o tempo em AB, AC será o tempo em AC. Consequentemente, assim como AB está para AC, o tempo em AB está para o tempo em AC.

Com o mesmo raciocínio, provaríamos que o tempo segundo AC está para o segundo outro plano inclinado AE assim como AC está

para AE. Portanto, ex aequali, o tempo segundo o plano inclinado AB está para o tempo segundo o plano inclinado AE assim como a distância AB está para a AE, etc. Poderíamos ainda, seguindo o mesmo teorema, como poderá ver muito bem o Sr. Sagredo, demonstrar imediatamente a sexta proposição do autor. Deixemos de lado, porém, esta digressão, que talvez tenha sido muito tediosa, ainda que proveitosa para a questão do movimento.

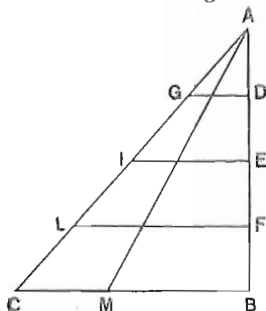
Sagredo - Pelo contrário, ela foi de muito agrado e muito necessária para o perfeito entendimento daquele princípio.

Salviati - Retomarei, pois, a leitura do texto.

### TEOREMA III, PROPOSIÇÃO III

Se sobre um plano inclinado ou segundo uma vertical, tendo ambos a mesma altura, um móvel se movimenta a partir do repouso, os tempos do movimento estarão entre si na mesma proporção dos comprimentos do plano inclinado e da vertical.

Suponhamos que AC seja o plano inclinado e AB a vertical, tendo ambos a mesma altura que chamamos BA sobre a horizontal CB. Afirmo que o tempo de descida de um mesmo móvel ao longo do plano AC está para o



tempo de descida pela vertical AB na mesma proporção que existe entre o comprimento do plano AC e o comprimento da vertical AB. Suponhamos agora que DG, EI, FL sejam linhas paralelas à horizontal CB; segue-se, pelo que foi admitido, que os graus de velocidade de um móvel que parte de A, ponto inicial do movimento, serão os mesmos nos pontos G e D, posto que nos dois casos a altura é a mesma; do mesmo modo, as velocidades nos pontos I e E serão iguais, e o mesmo para L e F. Podemos afirmar em geral que os momentos de seus graus de velocidade nos pontos extremos de qualquer paralela, traçada a partir de qualquer ponto da linha AB ao comprimento da linha AC, serão iguais entre si. Portanto, os dois espaços AC e AB são percorridos com os mesmos graus de velocidade. Mas foi demonstrado que, se dois espaços são percorridos por um móvel com os mesmos graus de velocidade, então os tempos estarão entre si como os espaços estão entre si; consequentemente, o tempo de descida por AC está para o tempo de des-

cida por AB como o comprimento da vertical AB; o que queríamos demonstrar.

Sagredo - Parece-me que se poderia concluir o mesmo de forma clara e breve, uma vez que já concluímos que a soma dos espaços percorridos pelo movimento acelerado por AC e AB é igual ao movimento uniforme, cujo grau de velocidade é a metade do grau máximo CB; e como os dois espaços AB e AC são percorridos com o mesmo movimento uniforme, fica evidente pela proposição I do primeiro livro, que os tempos de descidas estarão entre si como os mesmos espaços.

### COROLÁRIO

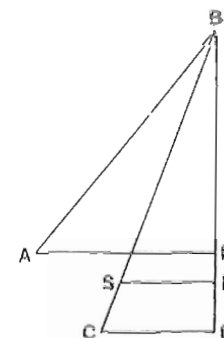
Do que foi dito pode-se concluir que os tempos empregados para descer por planos diversamente inclinados, desde que tenham a mesma altura, estão entre si como seus respectivos comprimentos. Com efeito, se tomamos um outro plano AM, do ponto A até a horizontal CB, demonstra-se do mesmo modo que o tempo de descida por AM está para o tempo de descida por AB assim como a linha AM está para a linha AB; mas o tempo por AB está para o tempo por AC assim como a linha AB está para a linha AC, segue-se, ex aequali, que assim como AM está para AC, o tempo por AM está para o tempo por AC.

### TEOREMA IV, PROPOSIÇÃO IV

Os tempos de descida por planos de mesmo comprimento, mas de diferentes inclinações, estão entre si na proporção inversa das raízes quadradas de suas respectivas alturas.

Tracemos, a partir de um ponto B, os planos BA e BC, que têm o mesmo comprimento, mas diferentes inclinações; suponhamos que AE e CD sejam linhas horizontais traçadas até encontrar a perpendicular BD, e seja BE a altura do plano BA, da mesma forma que BD é a altura do plano BC; seja ainda BI a média proporcional entre as alturas DB e BE.

E evidente que a proporção entre DB e BI é igual à raiz qua-

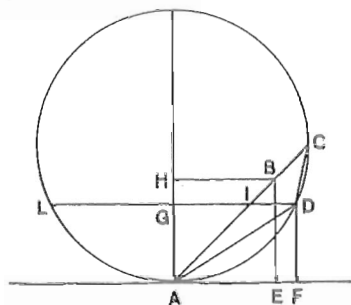




proporção entre o tempo de descida por AC e o tempo de descida por AB é igual ao produto das relações entre CA e AB e entre BA e AC, sendo consequentemente a proporção entre os tempos uma relação de igualdade; o que demonstra a proposição.

O mesmo pode ser demonstrado de outra maneira ex mechanicis, mostrando na figura seguinte que o móvel percorrerá CA e DA em tempos iguais.

Tomemos BA igual a DA e tracemos as perpendiculares BE e DF. Dos princípios da mecânica segue-se que o momento de um peso so-



bre o plano inclinado ABC está para seu momento total assim como BE está para BA e, da mesma forma, que o momento do peso sobre o plano AD está para seu momento total assim como DF está para DA, ou também BA. Logo, o momento deste mesmo peso sobre o plano inclinado DA está para seu momento sobre o plano inclinado ABC assim como a linha DF está para BE. Por esta razão, este mesmo peso percorrerá no mesmo tempo os espaços sobre os planos CA e DA, que estão entre si como os comprimentos BE e DF, de acordo com a proposição II do primeiro livro. Mas pode-se demonstrar que AC está para DA assim como BE está para DF; dessa forma, o móvel percorrerá as distâncias CA e DA em tempos iguais.

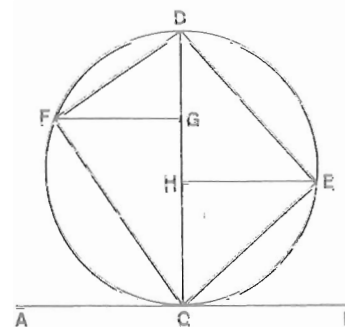
Que BE esteja para DF assim como CA está para DA, pode-se demonstrar como segue:

Unamos CD e depois a partir de D e B tracemos as paralelas a AF, formando a linha DGL, que corta a linha CA no ponto I, e a linha BH; neste caso, o ângulo ADI será igual ao ângulo DCA, posto que compreendem arcos iguais da circunferência LA e AD, sendo o ângulo DAC comum. Portanto, os lados dos triângulos equi-ângulos CAD e DAI, adjacentes aos ângulos iguais, serão proporcionais entre si e CA estará para AD assim como DA está para AI, ou seja, como BA está para AI ou como HA está para AG ou, o que é o mesmo, como BE está para DF, o que se queria provar.

A mesma proposição pode ser demonstrada com maior facilidade

da seguinte maneira:

Sobre a linha horizontal AB tracemos um círculo, cujo diâmetro CD é perpendicular ao horizonte. A partir do ponto superior D tracemos um plano inclinado qualquer DF até a circunferência. Afirmando que um móvel empregará o mesmo tempo quando desce pelo



plano DF que quando cai pelo diâmetro DC. Com efeito, tracemos FG paralela à horizontal AB, perpendicular ao diâmetro DC, e unamos FC. Considerando que o tempo de queda por DC está para o tempo de queda por DG assim como a média proporcional entre CD e DG está para a mesma DG; e como DF é a média proporcional entre CD e DG, sendo reto o ângulo DFC inscrito no semi-círculo, e FG perpendicular a DC, segue-se que o tempo de queda por DC está para o tempo de queda por DG assim como a linha FD está para DG. Mas já foi demonstrado que o tempo de queda por DF está para o tempo de queda por DG assim como DF está para DG; portanto, os tempos de queda por DF e DG, estando na mesma relação com os tempos de queda por DG, serão portanto iguais.

Demonstra-se da mesma maneira que se a partir do ponto inferior C traçarmos uma corda CE e também a linha EH, paralela à horizontal, e unirmos depois os pontos E e D, então o tempo de descida por EC será igual ao tempo de descida pelo diâmetro DC.

#### COROLARIO I

Do que se disse resulta que os tempos de descida ao longo de todas as cordas traçadas a partir dos pontos extremos C ou D são iguais entre si.

#### COROLARIO II

Resulta também que se de um mesmo ponto descem uma perpendicular e um plano inclinado, nos quais os tempos de descida são iguais, essa perpendicular e plano inclinado são inseridos num semi-círculo, cujo diâmetro será a própria perpendicular.