Reflexões livre sobre o surgimento dos princípios fundamentais da Mecânica, ao olhar pelas frestas das janelas de

Aristóteles, Galileu, Leibniz, Euler, Young

Aristóteles	Galileu	Descartes	Newton	Leibniz	Euler	Young
Sec IV a.c.	1638	1640	1687	1686	1752	1845

Princípios de conservação do movimento na atualidade

Os princípios fundamentais da Mecânica atual, clássica, relativística ou quântica, consistem na conservação de

- Momento linear
- Energia
- Momento angular

definidos matematicamente em termos da soma sobre o universo (ou de um sistema fechado e isolado), respectivamente, por

- $\sum_{i\ do\ universo} m_i \vec{v}_i = cte$
- $\sum_{universo}\{energia\ cinética + energia\ eletromagnética + energia\ nuclear + energia\ gravitacional\} = cte$
- $\sum_{i\ do\ universo} m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = cte$

Conservação de energia mecânica Em relação à conservação de energia, vale a pena ampliar um pouco nossa conversa. A ideia de conservação se inicia na descrição de movimentos, surgindo aí a definição de energia cinética e de diferentes tipos de energia potencial. Cabe aqui escrever a definição geral da relação entre estas duas energias:

$\boldsymbol{energia\ cinética + energia\ potencial = cte}$, para um <u>sistema isolado</u>.

Note que esta relação representa a ideia de que a energia de movimento pode estar escondida, ou seja "em potencial". Essa relação pode ser representada de forma diferente:

$$variação\ da\ energia\ potencial|_{sistema\ isolado} = -\,variação\ da\ energia\ cinética|_{sistema\ isolado}. \quad \textbf{(A)}$$

A relação entre força e variação da energia cinética pode ser obtida a partir da 2ª lei de Newton, para a relação entre variação de momento linear e força resultante:

$$variação\ de\ energia\ cinética =$$

$$\int_1^2 d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \int_1^2 mvdv = \int_1^2 v\left(m\frac{dv}{dt}\right)dt = \int_1^2 F_{res}(vdt) = \int_1^2 F_{result}dx \quad \textbf{(B)}$$

Comparando (A) e (B), obtemos

$$variação\ da\ energia\ potencial|_{sistema\ isolado} = -\int_1^2 F_{result}(interna)dx$$

Se o sistema é isolado, a força resultante F_{result} deve ser uma **força interna ao sistema** (como na interação gravitacional ou elétrica entre dois corpos).

Forças conservativas A conservação da energia mecânica de um sistema isolado, vale, como nos dizem os manuais de física básica, apenas para forças "conservativas", entre as quais não se incluem a força de atrito ou viscosa. Para a situação geral, de quaisquer tipos de força, teríamos

$$(variação\ da\ energia\ potencial + variação\ da\ energia\ cinética)|_{sistema\ isolado}$$
$$= -\ trabalho\ das\ forças\ dissipativas\ \leq 0$$

Energia mecânica e a termodinâmica Essa restrição sobre forças "conservativas" fica amenizada, nos mesmos manuais de física, quando é ao introduzida a 1ª lei da termodinâmica, geralmente apresentada na forma matemática

$$variação\ da\ energia\ interna\ de\ um\ corpo$$
$$= calor\ recebido\ \boldsymbol{pelo}\ corpo - trabalho\ realizado\ \boldsymbol{pelo}\ corpo$$
$$= calor\ recebido\ \boldsymbol{pelo}\ corpo + trabalho\ realizado\ \boldsymbol{sobre\ o}\ corpo \quad \textbf{(C)}$$

e que identifica o calor como uma possível forma de energia. Um corpo pode aumentar (ou diminuir) sua energia se recebe energia térmica ou se

Que relação tem a última equação, para a variação da energia interna, com a equação de conservação de energia da mecânica (energia cinética + energia potencial)? A primeira é uma equação para variações, a segunda, uma equação para uma constante. Ocorre que $calor\ recebido$ e $trabalho\ realizado$ constituem **trocas de energia** com algo fora do corpo. Portanto essa equação trata de sistemas abertos para troca de energia. Como relacionar com a equação de conservação de energia mecânica? É preciso retornar à equação **(B)** e analisá-la para o caso de um sistema aberto, em que agem forças internas e externas.

Se o sistema não está isolado, e a força resultante F_{result} é constituída de uma composição de forças internas ao sistema e forças externas ao sistema,

$$F_{result} = F_{int} + F_{ext}$$

a equação (B) deve ser reinterpretada:

$$variação\ de\ energia\ cinética|_{sistema} = \int_1^2 F_{result} dx = \int_1^2 F_{int} dx + \int_1^2 F_{ext} dx =$$

$$-variação\ da\ energia\ potencial|_{sistema} + trabalho\ da\ força\ externa \quad \textbf{(D)}$$

Podemos agora comparar a equação (D), proveniente da relação entre força e velocidade da mecânica, e a equação (C), da teoria do calor. Vamos reescrever as duas equações abaixo.

Equação D da mecânica:

$$(\boldsymbol{variação\ de\ energia\ cinética + variação\ da\ energia\ potencial})|_{sistema} =$$

$$+ \boldsymbol{trabalho\ da\ força\ externa}$$

Equação C da termodinânica:

$$\boldsymbol{variação\ da\ energia\ interna\ de\ um\ corpo} =$$

$$\boldsymbol{trabalho\ realizado\ sobre\ o\ corpo} + \boldsymbol{calor\ recebido\ pelo\ corpo}$$

A equação (D) diz que a variação da **energia mecânica de um sistema**, sob a ação de **forças conservativas**, é igual ao trabalho realizado por forças externas.

A equação (C) diz que a variação da **energia interna de um corpo** é igual ao trabalho realizado por força externa **somado ao calor** recebido pelo corpo.

A comparação das duas equações *sugere* identificar energia interna ao corpo com a energia mecânica do sistema. No entanto, na equação (C) há o acréscimo de um termo, o do $calor\ recebido\ pelo\ corpo$, que representa uma forma de energia associada às forças dissipativas!

A relação fica muito mais clara quando introduzimos o modelo atômico-molecular para a matéria: a energia interna de um corpo é constituída pela soma das energias cinéticas e potenciais de seus átomos e moléculas. Isto significa que na "dissipação" de energia mecânica por atrito, não há, na verdade, dissipação da energia, mas sim transformação da energia mecânica macroscópica ordenada e síncrona, do conjunto de moléculas, em energia "interna" desordenada, cinética e potencial das moléculas, que detectamos como um aumento de temperatura.

Construindo uma história dos princípios de conservação

Mas de onde surgiram as ideias sobre essas grandezas? De onde surgiu a ideia de conservação? Como se chegou a estas expressões matemáticas?

Uma leitura inquisitiva e inquieta, pessoal, de pequenos trechos dos autores mencionados ao longo de quase 25 séculos, permite enxergar a presença de

ideias "filosóficas" – há algo permanente na natureza?

gosto pelo debate, pela polêmica – uma característica humana!

descrição de eventos reais, observáveis – barcos na água, objetos em queda, colisões, pêndulos;

discussão das grandezas importantes no evento observável – massa, força, tempo, distância, velocidade;

definição e invenção de nomes para as grandezas consideradas importantes;

relações matemáticas – proporções, geometria, cálculo diferencial e integral.

Vejo o conjunto de textos com um caminho percorrido na construção dos princípios (1 e 2) de conservação da mecânica que utilizamos ainda hoje.

Aristóteles A pergunta sobre a perenidade do movimento é feita por Aristóteles, no Sec 4 a.c. No texto 1, ele desenvolve a ideia com uma definição mais abrangente de movimento, que inclui o fogo, a vida e a morte, e argumenta contra as ideias Anaxágoras e Empédocles, utilizando uma relação entre tempo e movimento – o tempo seria um número do movimento. O argumento é lógico: como pode existir "um antes e um depois, sem a existência do tempo?" Tempo deve ser eterno, e, sendo o tempo um número do movimento, conclui-se que o movimento também é eterno.

Mas qual a relação entre aquilo que entendemos como movimento e aquilo que Aristóteles discute, que inclui a luta entre amor e ódio, entre vida e morte, entre chama e céu?

Em alguns momentos do texto, ele se refere ao movimento de uma "coisa" sendo causado pela aproximação de outra "coisa". Em conjunto com seu texto sobre a relação entre movimento de um determinado peso, distância percorrida, e intervalo de tempo correspondente (texto 2), podemos interpretar a ideia desenvolvida no texto 1: há alguma constância do movimento, descrito em termos de peso que percorre uma certa distância em certo tempo, que é transferido de um corpo a outro, quando aquele em movimento se aproxima daquele que está em repouso. Além da discussão filosófica, há em Aristóteles, portanto, a ideia de descrever o movimento em termos de grandezas como peso, distância, tempo e força. Além disso, surgem relações de proporcionalidade descritas em palavras, que poderíamos escrever na forma $força \propto peso \times \frac{distância}{tempo}$. É curioso que o exemplo apresentado no texto de um fenômeno real é o da força necessária para empurrar um barco, levando-nos a pensar na força do empuxo, que pode, de fato, ser proporcional à velocidade!

Descartes Mais de vinte séculos depois, em texto de 1640, encontramos Descarte argumentando que Deus conserva no universo "tanto movimento e tanto repouso quanto colocou na primeira criação." Penso que podemos atribuir tal afirmação ao rol das ideias filosóficas. No entanto, Descartes oferece também uma descrição desta constância em termos de grandezas físicas, e estabelece relações matemáticas de proporção, quando afirma que "se o tamanho de x é o dobro do tamanho de y, e [x] se move com a metade da velocidade [de y], então há em ambos a mesma quantidade de movimento. Bem, o tamanho de um corpo não pode mudar, mas sua velocidade, sim; podemos entender facilmente a "tese da constância do movimento", pensando que enquanto alguns corpos ganham velocidade, outros perdem velocidade." Descartes define quantidade de movimento em termos do produto de tamanho e velocidade: $quantidade\ de\ movimento \propto tamanho \times velocidade$. Não me parece exagerado associar quantidade de movimento ao nosso momento linear, mesmo que lhe falte o atributo vetorial e uma definição mais precisa de "tamanho".

Leibniz Quase meio século depois da proposta de Descartes a respeito da conservação de momento (tamanho x velocidade) no mundo, Leibniz chama a proposta de "erro memorável" de um "gênio presunçoso". Apresenta uma nova proposta. Define "força" em termos do produto de massa e altura. Assim, um corpo de massa 1 a uma altura 4 possui a mesma "força" que um corpo de massa 4 a uma altura 1:

$$força\ (massa\ 1\ na\ altura\ 4) = 1\ \times\ 4$$

$$força\ (massa\ 4\ na\ altura\ 1) = 4 \times 1$$

Leibniz alega que acreditam nessa igualdade filósofos e matemáticos, incluindo os Cartesianos (seguidores de Descartes). Essa "força" reapareceria para qualquer dos dois corpos ao recuperarem a altura inicial, após sua queda ao chão. Essa "força", que é a mesma para os corpos de massa 1 e 4 (em alturas 4 e 1), produz velocidade 2 para o corpo de massa 1 e velocidade 1 para o corpo de massa 4, como demonstrado por Galileu (em seu trabalho de 50 anos antes), segundo Leibniz. Assim, argumenta Leibniz, a mesma "força" é distinta da quantidade de movimento definida por Descartes, pois embora os dois corpos possuam a mesma "força", a quantidade de movimento adquirida pelos dois é diferente:

$$quantidade\ de\ movimento\ (m = 1) = 1\ \times 2$$

$$quantidade\ de\ movimento\ (m = 4) = 4 \times 1$$

Embora Leibniz não explicite na forma em que escrevemos hoje, podemos ver surgir a ideia de que a "força" $massa\ x\ altura$ se transforma em $massa\ x\ v^2$. A discussão parece oferecer uma provável trilha para a ideia da descrição matemática da transformação de energia potencial gravitacional (na proximidade da superfície da Terra) em cinética.

Euler No trabalho de Euler, escrito cerca de 70 anos depois do trabalhos de Leibniz, desaparece qualquer preocupação "filosófica"! Não se fala em conservação de coisa nenhuma. Euler trata da mudança de velocidades de dois corpos que se chocam e se deformam durante um impacto ao longo de uma reta. A partir do que podemos identificar como as leis de Newton, embora o nome de Newton não seja mencionado, Euler deduz tanto o que chamamos de **conservação de momento linear**, quanto o que chamamos de **conservação de energia**, para o sistema.

As equações do texto,

$$A\,dv = \, -P\,dt \;\text{ e }\; B\,du = \, P\,dt, \qquad \text{(E1)}$$

para as quais Euler diz utilizar "os princípios da mecânica", estão de acordo com a 2ª e a 3ª leis de Newton (contemporâneo de Leibniz), não mencionado no texto, e seriam escritas, em notação atual, na forma

$$m_A\,dv_A = \, F_{BA} \;\text{ e }\; m_B\,dv_B = \, F_{AB}, \;\text{ com }\; F_{AB} = \, -F_{BA}.$$

Integrando a soma das duas equações, Euler obtém a equação

$$A\,v + B\,u = A\,a + B\,b,$$

em que a e b representam as velocidades dos corpos A e B antes do impacto, e v e u representam as velocidades dos corpos A e B **"a cada instante durante a colisão"** (item 40). Em notação atual, escreveríamos

$$m_A\, v_A(antes\ do\ choque) + m_B\, v_B(antes\ do\ choque) =$$

$$= m_A\, v_A(durante\ o\ choque) + m_B\, v_B(durante\ o\ choque) =$$

que traduz a **conservação de momento linear** em um choque unidimensional. Na interpretação de Euler, no entanto, o resultado está "de acordo com o grande princípio de que o movimento do centro de gravidade comum não se altera através da ação dos corpos que se chocam".

Com o argumento de que esta equação não é suficiente para determinar v e u, dados a e b, Euler continua sua argumentação, utilizando a definição de velocidade para os dois corpos,

$$v = \frac{dx}{dt}\text{ (corpo A)} \quad \text{e} \quad u = \frac{dy}{dt}\text{ (corpo B)}\,,$$

em que as variáveis x e y definem as posições dos centros de massa de A e de B, em relação a alguma origem comum. A partir destas definições, reescreve e soma as equações (E1), que adquire a seguinte forma:

$$A\, vdv + B\, udu = -P\, dz,$$

em que z corresponde à distância relativa entre os centros de massa de A e de B durante a colisão. A integral desta equação resulta na última equação do item 42, que, em notação de hoje, seria escrita na forma

$$m_A\, {v_A}^2(durante) + m_B\, {v_B}^2(durante)$$

$$= m_A\, {v_A}^2(antes) + m_B\, {v_B}^2(antes) - 2\int F_{deformação} d\, r_{AB}$$

Podemos vislumbrar a descrição atual a respeito das variações de energia em uma colisão: a energia cinética do sistema de duas massas durante a colisão é igual à energia cinética do sistema antes do impacto, subtraída a energia de deformação. Se a força de deformação for uma força elástica, no sentido de que a energia de deformação é transformada integralmente em energia cinética, após a colisão, teremos o caso da colisão chamada elástica, em que a soma das energias cinéticas antes do choque dá o mesmo número que a soma das energias após o choque.

O parágrafo acima refere-se a um caminho que ainda está por completar-se, em Euler. Euler não utiliza em momento nenhum o termo energia, ou o termo momento linear. Não dá nomes às grandezas mv ou mv^2. Não se refere a ideias "filosóficas" como as de conservação.

Euler é o primeiro, entre os textos que escolhemos, que apresenta equações matemáticas para apresentar seu raciocínio. Aristóteles e Descartes descrevem em palavras relações de proporção, Galileu utiliza a geometria, Leibniz invoca relações de proporção e relações derivadas da geometria por Galileu.

Young Young, mais de um século depois de Euler, retoma o tema das colisões, no contexto do pêndulo conhecido como "pêndulo de Newton". No trecho escolhido do texto, não há equações. Como Euler, Young dá destaque ao "princípio geral estabelecido de que a posição do centro de inércia [gravidade] não sofre efeito nenhum da ação recíproca, ou mútua, dos corpos que compõem o sistema." O processo que ocorre durante a colisão, que envolve a mudança de forma dos corpos que entram em choque, as forças envolvidas e a consequente variação de velocidades, é descrito em detalhes. Distingue o choque elástico do choque inelástico, em que a força repulsiva que surge após a compressão que ocorre durante o impacto, não é "capaz de separá-los com a mesma velocidade relativa". Reconhece que, independente da presença de elasticidade, "a soma dos momentos de todos os corpos do sistema, ou seja, de suas massas ou pesos multiplicados pelos números que exprimem suas velocidades, após a colisão mútua, é a mesma, quando reduzida à mesma direção, que era antes da colisão." Não usa o termo conservação para expressar a igualdade entre duas grandezas relativas ao movimento (a soma de momentos do sistema), e atribui essa igualdade à propriedade do centro de massa de se manter com velocidade constante.

Trata separadamente do caso da colisão elástica, e aponta para o fato de que é possível demonstrar que a soma das **energias**, constituídas do "produto da massa, ou peso, de um corpo com o quadrado do número que expressa sua velocidade", "...permanecem também inalteradas." Entre os textos reunidos aqui, somente em Young encontramos o termo energia, que ele associa ao que hoje chamamos de energia cinética (a menos do fator ½). Cita o termo energia como uma alternativa para o termo "forças ascendentes", nos lembrando que em todos os textos anteriores, "força" é o termo mais utilizado para aquilo que denominamos energia.

Em relação à matemática, Young volta ao estilo dos textos anteriores a Euler, em que as relações de proporção entre números é discutida em palavras e em termos numéricos.