NÚMEROS REAIS

RICARDO BIANCONI

RESUMO. Coletamos algumas prorpiedades algébricas e combinatórias dos números naturais, inteiros, racionais e reais.

1. Números Naturais

O conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ tem as seguintes propriedades.

Propriedades da soma e do produto: $m+0 = m$; $m \times 0 = 0$; $m \times 1 = m$; $m+n = n+m$; $n \times m = m \times n$; $k+(m+n) = (k+m)+n$; $k \times (m \times n) = (k \times m) \times n$; $k \times (m+n) = (k \times m) + (k \times n)$.

Divisão com resto: Para todos $m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, existe um único par de números $q, r \in \mathbb{N}$, com $0 \leq r < n$, tais que $m = q \times n + r$:

$$\begin{array}{c|l} m & \underline{\;n\qquad\;} \\ -\underline{(n \times q)} & \;q \\ r & \end{array}$$

Se o resto r for zero, então dizemos que ***n* divide *m***.

Convenção de prioridade do produto sobre a soma: Para evitar o usos de muitos parênteses e facilitar a leitura, produtos são feitos antes da soma numa expressão do tipo $A \times B + C$: isso significa $(A \times B) + C$; outro exemplo: $A \times B + C \times D = (A \times B) + (C \times D)$. Os parêntese são indispensáveis em $A \times (B + C)$ (multiplicar A pelo resultado da soma $B + C$).

Omissão do símbolo da multiplicação, "$\times$": Quando não houver perigo de confusão, omitimos o símbolo da multiplicação em expressões: AB ao invés de $A \times B$.

Números primos: Um número $p \in \mathbb{N}$ é um **número primo** se $p > 1$ e somente 1 e p dividem p. Por exemplo: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...

Decomposição em fatores primos: todo $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, pode ser escrito de modo único como produto de números primos (com ou sem repetições). Por exemplo, $12 = 2 \times 2 \times 3$; $27 = 3 \times 3 \times 3$..

Date: 2023.

Fatorial: Definimos o *fatorial de um número* $n \in \mathbb{N}$, denotado por $n!$, assim:

- $0! = 1$
- $(n+1)! = (n!) \times (n+1)$

Por exemplo: $1! = 1$, $2! = 1 \times 2 = 2$, $3! = (2!)3 = 6$; $5! = 120$; $10! = 3.628.800$, $20! = 2.432.902.008.176.640.000$.

1.1. **Um pouco de análise combinatória.** Aqui usamos argumentos simples de contagem.

Permutação: Se tivermos n objetos distintos (letra, números, expressões, etc) que indicamos A_1, A_2, ..., A_n, perguntamos de quantas maneiras eles podem ser ordenados? Por exemplo, se $n = 3$, podemos ordenar A_1, A_2 e A_3 assim: $A_1A_2A_3$, ou $A_1A_3A_2$, ou $A_2A_1A_3$, ou $A_2A_3A_1$, ou $A_3A_1A_2$, ou $A_3A_2A_1$, um total de 6 possibilidades. Não é mera coincidência que $6 = 3!$.

De fato, para contarmos as possibilidades, temos n elementos disponíveis para começar a lista ordenada. Uma vez escolhido o primeiro elemento, sobram $n-1$ elementos para colocarmos em segundo lugar. A cada escolha, diminui uma possibilidade de escolha. Portanto, temos um total de $n(n-1)(n-2)\ldots 2\times 1 = n!$ ordenações possíveis de A_1,..., A_n.

Arranjo: O problema aqui é parecido, mas temos n elementos distintos, dos quais $k \leq n$ serão escolhidos. Assim, com um mesmo raciocínio que nas permutações, obtemos um total de $n(n-1)(n-2)(n-k+1)$ possibilidades.

Por exemplo, se $n = 4$ e $k = 2$, temos as seguintes possibilidades, com as letras A, B, C e D: AB, AC, AD, BA, BC, BD, CA, CB, CD, DA, DB, DC, um total de $12 = 4 \times 3$ possibilidades.

Combinação: Agora queremos escolher k elementos de uma lista de n elementos distintos, sem nos importarmos com a ordem deles. No exemplo do arranjo, não distinguimos AD de DA. Assim, teríamos $\{A,B\}$, $\{A,C\}$, $\{A,D\}$, $\{B,C\}$, $\{B,D\}$ e $\{C,D\}$ (representação como conjuntos de dois elementos cada, em que a ordem em que aparecem não inmporta).

A quantidade total dessas combinações será o total de arranjos dividido pelo total de permutações dos n elementos (de modo a desconsiderar a ordem em que são escolhidos).

A representação da combinação de n elementos k a k é $\binom{n}{k}$, e sua fórmula (envilvendo fatoriais) é:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Você pode verificar que

$$\binom{n}{0} = 1; \; \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n; \; \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

2. Números Inteiros

Agora introduzimos os números negativos, $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. As propriedades da soma e do produto são basicamente as mesmas de $\mathbb{N}$, com algumas regras extras:

Propriedades da soma e do produto: $m+0 = m$; $m \times 0 = 0$; $m \times 1 = m$; $m+n = n+m$; $n \times m = m \times n$; $k+(m+n) = (k+m)+n$; $k \times (m \times n) = (k \times m) \times n$; $k \times (m+n) = (k \times m) + (k \times n)$.

Propriedades da ordem: se $a > 0$, então $-a < 0$, e se $b < 0$, então $-b > 0$; se $b < c$, então $a+b < a+c$, e se $a > 0$, $ab < ac$; se $a < 0$ e $b < c$, então $ab > ac$ (observe a inversão da ordem). Em particular, se $a < 0$ e $b < 0$, então $ab > 0$.

3. Números Racionais

Consideramos no próximo passo as frações de números inteiros, os *números racionais*, $\mathbb{Q} = \{m/n : m, n \in \mathbb{Z},\ n > 0\}$. Observe que um mesmo número racional pode ser representado por diversas frações:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \dots; -\frac{3}{5} = -\frac{6}{10} = \dots$$

Na fração $\frac{m}{n}$, m é o *numerador* e n o *denominador*.

As propriedades da soma, produto e ordem de números racionais repetem aquelas de $\mathbb{Z}$.

Soma de Frações: reduzimos aos mesmos denominadores e somamos assim:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$$

Produto de frações: isso é mais direto:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

3.1. Representação decimal.

A representação decimal de um número racional consiste em escrevê-lo da forma $a, b_1 b_2 b_3 \dots$, onde a é inteiro e cada b_ké um algarismo entre 0 e 9. Se o número for positivo,

$$a + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{100} + \frac{b_3}{1000} + \dots$$

Os números a, b_1, b_2,... podem ser obtidos pela divisão com restos de números naturais. Por isso, a distribuição dos algarismos depois da vírgula formam um padrão repetitivo a partir de certo ponto.

Por exemplo,

$$\frac{22}{7} = 3,\overline{142857}\,142857\ldots,$$

onde a sequência 142857 repete-se indefinidamente.

$$\frac{221}{70} = 3,1\,\overline{571428}\,571428\ldots,$$

onde o padrão 571428 repete-se sempre, mas a partir da segunda casa depois da vírgula.

Essa repetição é chamada de *dízima periódica.*

4. Números Reais

Números reais completam os racionais, introduzindo os números irracionais, como, por exemplo, $\sqrt{2}$, π, etc. A representação decimalde um número irracional não tem dízima periódica.

As propriedades da soma, produto e ordem repetem as mesmas de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Z}$.

Intervalos de números reais: se $a < b$, denotamos os *intervalos*

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$;
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$;
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$;
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.

Uma propriedade importante do conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é a **Propriedade do Supremo**: se X for um conjunto não vazio (existe pelo menos um elemento nele) e limitado superiormente (existe um número real M maior que qualquer número em X), então existe o menor limitante superior de X (um número real denotado "$\sup X$" – o supremo de X – que é maior ou igual a cada elemento de X).

Por exemplo, $\sup[0, 1] = \sup[0, 1[= 1$; $\sup\{x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{2}\} = \sqrt{2}$.

4.1. **Equações de segundo grau.**

Equações de segundo grau são da forma $ax^2 + bx + c = 0$ (com $a \neq 0$). Seu *discriminante* é $\Delta = b^2 - 4ac$. Se $\Delta \geq 0$, então as soluções são

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a};\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Em particular, se $\Delta = 0$, então $x_1 = x_2$. Se $\Delta < 0$, a equação não tem solução em $\mathbb{R}$.

5. Potenciação

Se $a \in \mathbb{R}$, e $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, representamos a multiplicação de a por ele mesmo n vezes por

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ vezes}}$$

Assim, $a^1 = a$, $a^2 = a \times a$, etc.

Expoentes inteiros: Uma simples contagem mostra que $a^m \times a^n = a^{m+n}$. Se dividirmos a^m por a^n (se $n \leq m$), os cancelamentos produzem $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$. Assim, se definirmos $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$, continua valendo $a^m \times a^n = a^{m+n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$. Para completar essa definição, é coerente definir $a^0 = 1$. É fácil ver que $(a^m)^n = a^{mn}$.

Expoentes racionais: Se $a > 0$, temos que $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a = a^1$. Assim, é natural definir $\sqrt{a} = a^{1/2}$ e, mais geralmente $a^{p/q} = (\sqrt[q]{a})^p = \sqrt[q]{a^p}$. Com isso, ainda valem $a^r \times a^s = a^{r+s}$, e $(a^r)^s = a^{rs}$, para $r, s \in \mathbb{Q}$.

Expoentes reais: Se $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$, para definirmos a^b, no caso em que b for irracionais, fazemos uma aproximação por potências racionais. Por exemplo, aproximamos $\sqrt{2}$ por números racionais, 1; 1,4; 1,41; 1,414; etc., e fazemos as potências a^1, $a^{1,4}$, $a^{1,41}$, etc. Não é muito comlicado mostrar que esse procedimento tende a um número real, e que, com isso, valem $a^r \times a^s = a^{r+s}$, e $(a^r)^s = a^{rs}$, para $r, s \in \mathbb{R}$. Uma justificativa disso fica para mais tarde, quando tratarmos dos *limites*.

6. Fórmulas Algébricas Diversas

Aqui, as letras A, B e C representam números ou expressões.

(1) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$; $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$;
(2) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$;
(3) $(A+B)(A^2 - AB + B^2) = A^3 + B^3$; $(A-B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3$;

Representação de somas e produtos de vários números ou expressões: se $a_1, \ldots a_n$ forem números ou expressões, representamos a soma $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ de forma resumida como

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

O produto deles, $a_1 \times a_2 \times a_3 \cdots \times a_n$ representa-se como

$$\prod_{k=1}^{n} a_k$$

Fórmulas combinatórias: A combinação de n elementos k a k tem uma-propriedade interessante:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Isso reflete-se no **Triângulo de Pascal:**

$\boldsymbol{n \backslash k}$	0	1	2	3	4	5
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

TABELA 1. Cinco linhas do Triângulo de Pascal. As linhas são numeradas de 1 a 5, e as colunas de 0 a 5. A linha n e coluna k contém o número $\binom{n}{k}$.

Aplicação a potências de somas:

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

$$(A-B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} A^k B^{n-k}$$

Em particular, se $A = B = 1$,

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

. . . .