115

2ª Lista de Exercícios Tópicos de Álgebra p 14/04/2023

Escolha 5

Em cada um dos exercícios prove as afirmações pedidas ou exiba contra-exemplo

1ª Questão: (Extra). a) Seja K um corpo em $\mathrm{Alg}\,K$,

Mostre que existe o produto finito de K-algebras.

b) Existe a soma direta (coproduto)?

c) O coproduto de dois objetos é igual ao coproduto?

2ª Questão: A uma K-algebra M um A-Módulo

$f \in \mathrm{End}(M)$ tal que $f^2 = f$.

a) Mostre que $M = \mathrm{Im} f \oplus \ker f$.

b) Se $M = \cancel{\mathrm{Im} f}\ N_1 \oplus N_2$

Seja $\pi: M \to M_1$ a projeção canônica no primeiro somando então $\pi^2 = \pi$ e $N_2 = \ker \pi$.

$$\begin{tikzcd} M = N_1 \oplus N_2 \arrow[r, two heads] \arrow[rr, bend left, "\pi"] & N_1 \arrow[r, hook] & M. \end{tikzcd}$$

3ª) Sejam $(L_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, $(M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ e $(N_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$

3 famílias de A-módulos tais que

para cada $\lambda \in \Lambda$ existe uma sequência

exata curta

$$0 \to L_\lambda \xrightarrow{f_\lambda} M_\lambda \xrightarrow{g_\lambda} N_L \to 0$$

Mostre que existem sequências exatas

curtas induzidas

214

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} L_\lambda \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda \quad \text{e}$$

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} L_\lambda \longrightarrow \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \longrightarrow \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda \ .$$

4) Para todo inteiro positivo $n = rs$, $r>0, s>0$ mostre que existe uma sequência exata (*) $0 \to r\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to s\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$.

Encontre condição necessária e suficiente para * cindir

5) Seja o diagrama com linhas exatas de A-módulos e M um A-Módulo Livre

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\eta_N"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r, "f'"] & M' \arrow[r, "g'"] & N' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Encontre morfismo η_M e η_L de M em M' e L em L' respectivamente que façam o diagrama comutar

6) Mostre que $\mathbb{Q}$ não é um $\mathbb{Z}$-modulo livre.

7) (Extra) seja $\cancel{\{M_n\}}$ $M_n = \mathbb{Z}$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Mostre que $\prod M_n$ não é um modulo livre.

8) Considere o diagrama comutativo com linhas exatas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d, equal] & P \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[r] \arrow[d, "v"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] & M \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Mostre que v se fatora por M $\iff$ a primeira linha cinde.

9) Seja A uma K-algebra e I um ideal bilateral. Seja $\mathcal{C}_A(I)$ a subcategoria plena de A-Mod cujos objetos são os A-modulos M tais que $IM = 0$. Mostre que $\mathcal{C}_A(I) \cong (A/I)$-Mod.

0) Seja A uma K-algebra
e $\mathcal{C}_A$ ideal (bilateral) de A gerado
pelos elementos da forma
$ab - ba$ onde a, b estão em A.

) Mostre que $A/\mathcal{C}_A$ é comutativa
$A \xrightarrow{\pi} A/I$ o epimorfismo canônico

) Se $\varphi : A \to B$ é um homomorfismo
de K-algebras onde B é comutativ
mostre que existe um unico
$\bar{\varphi} : A/\mathcal{C}_A \to B$ tal que o diagrama
seguinte comuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & B \\ & A/\mathcal{C}_A \arrow[u, dashed, "\bar{\varphi}"'] \end{tikzcd}$$

categoria das algebras comutativas

) Seja $F : \mathrm{Alg}\,K \to \mathrm{Alg\,com}\,K$ o funtor
$F(A) \to A/\mathcal{C}_A$. (Faça disso um funtor.)

Mostre que F é adjunta a esquerda
do funtor inclusão $\mathrm{Alg\,com}\,K \to \mathrm{Alg}\,K$
($\mathrm{Alg\,com}\,K$: categoria das K algebras comutativas)